Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**Методические рекомендации**

**по выполнению практических работ**

по учебной дисциплине

**«ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»**

для студентов специальности

**09.02.06 Сетевое и системное администрирование**

Челябинск, 2019

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методические рекомендации составлены в соответствии с утвержденной программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» для специальности 09.02.06 Сетевое и системное администрирование | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  комиссией ЕМД  протокол №  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2019 г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/ Макаренко О.И. | УТВЕРЖДАЮ  Зам. директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2019 г. |

**Автор:** Макаренко О.И, преподаватель Южно-Уральского государственного технического колледжа

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Элементы высшей математики» предназначены для обучающихся по специальности 09.02.06 Сетевое и системное администрирование для организации аудиторной работы на практических занятиях.

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» предусмотрено выполнение 25 практических работ, направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

***умений*:**

* Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений.
* Определять предел последовательности, предел функции.
* Применять методы дифференциального и интегрального исчисления.
* Использовать методы дифференцирования и интегрирования для решения практических задач.
* Решать дифференциальные уравнения.
* Пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

**обобщение, систематизацию, углубление и закрепление *знаний*:**

* Основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.
* Основы дифференциального и интегрального исчисления.
* Основы теории комплексных чисел.

В методических рекомендациях по выполнению практических работ содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая практическая работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий.

**Ход выполнения практических работ**

Практические работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

*Ход работы:*

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. В тетрадях для практических работ выполнить самостоятельную работу или решить номера, которые указаны в работе.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

**Критерии оценивания практических работ**

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

**Перечень практических работ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № работы | Наименование практических работ | Кол-во  часов |
|  | Выполнение операций над матрицами. | 2 |
|  | Вычисление определителей. | 2 |
|  | Решение систем линейных уравнений (матричный метод, метод Крамера) | 2 |
|  | Решение систем линейных уравнений (метод Гаусса) | 2 |
|  | Линейные операции над векторами | 2 |
|  | Вычисление модуля и скалярного произведения | 2 |
|  | Составление уравнений прямых, их построение | 2 |
|  | Составление уравнений кривых 2-го порядка, их построение | 2 |
|  | Выполнение операций над комплексными числами в алгебраической форме | 2 |
|  | Выполнение операций над комплексными числами в тригонометрической форме | 2 |
|  | Вычисление пределов последовательностей | 2 |
|  | Вычисление пределов функций | 2 |
|  | Исследование функции на непрерывность | 2 |
|  | Механический и геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали. | 2 |
|  | Вычисление производных сложных функций. | 2 |
|  | Раскрытие неопределенностей с помощью правила Лопиталя. | 2 |
|  | Применение производной для исследования функции. | 2 |
|  | Интегрирования заменой переменной в неопределенном интеграле | 2 |
|  | Интегрирования по частям в неопределенном интеграле | 2 |
|  | Вычисление определенных интегралов | 2 |
|  | Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов | 2 |
|  | Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка | 2 |
|  | Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами | 2 |
|  | Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами | 2 |
|  | Решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка | 2 |

**Практическая работа № 1**

***Выполнение операций над матрицами.***

**Цель работы:**

Научиться выполнять операции над матрицами.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие матрицы, определителя матрицы.

2. Понятие об основных операциях над матрицами.

**Умения:**

1. Применять полученные знания на сложение, вычитание и умножение матриц.

**Содержание работы:**

**Матрицей** называется прямоугольная таблица чисел .

А–матрица, –элемент матрицы, номер строки, в которой стоит данный элемент, номер соответствующего столбца; *m*–число строк матрицы, *n*–число ее столбцов. Числа *m* и *n* называются **размерностями** матрицы.

Матрица называется **квадратной**, если *m=n*. Число n называют **порядком** квадратной матрицы.

Матрицы одинаковой размерности называются **равными**, если у них соответственно равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны 0.

Квадратная матрица называется **единичной**, если элементы, стоящие на ее главной диагонали, равны 1, а остальные равны 0.

**Суммой (разностью) матриц** А и В одинаковой размерности  называется матрица С той же размерности, каждый элемент которой равен сумме (разности) элементов матриц А и В, стоящих на тех же местах:  () 

Пример: А=

Решение: А+В=

А-В=

**Произведением матрицы на число** называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число.

Пример: А=. Найти: 5\*А

Решение: 5\*А=

**Произведением матрицы *А* размерности mp и матрицы *В* размерности pn** называется матрица *С* размерности , каждый элемент которой  определяется формулой: , . Таким образом, элемент  представляет собой сумму произведений элементов *i*-й cтроки матрицы *А* на соответствующие элементы j-го столбца матрицы *В*.

Умножение матрицы на матрицу возможно лишь тогда, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго.

Пример:.

Произведение *АВ –* существует, но не существует произведение *ВА*.

Размерность матрицы *С=АВ* составляет  Найдем элементы матрицы *С*: 



Итак, 

**Решение типовых заданий:**

1. Найти матрицу С, если:

3С=

3С=, следовательно С=

1. Даны матрицы А= Найти:
2. 4А+2В
3. 3В+2А-С
4. В\*А
5. АС+В
6. ВС+С²
7. АВ-3С
8. А²-В²

Решение:

1. 4А=, 2В=, 4А+2В=
2. 3В=, 2А=, 3В+2А=,

3В+2А-С=

1. В\*А=
2. А\*С+В=

А\*С=

1. В\*С+С²=

В\*С=

С²=

1. АВ-3С=

А\*В=

3С=

1. А²-В²=

А²=

В²=

**Задания для практической работы:**

**Вариант 1**

1. Найти матрицу С, если:
2. Даны матрицы А=
3. Найти:
4. 4А+2В
5. 3В+2А-С
6. В\*А
7. АС+В
8. ВС+С²
9. АВ-3С
10. А²-В²

**Вариант 2**

1. Найти матрицу С, если:
2. Даны матрицы А=

Найти:

1. 4А+2В
2. 3В+2А-С
3. В\*А
4. АС+В
5. ВС+С²
6. АВ-3С
7. А²-В²

**Практическая работа № 2**

***Вычисление определителей***

**Цель работы:**

1. Научиться вычислять определители 2 и 3 порядков.
2. Научиться применять метод разложения определителей по строке (столбцу).

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие определителя, его свойств и правила вычисления определителей;
2. Понятие алгебраического дополнения и минора.

**Умения:**

1. Вычислять определители различных порядков.

**Содержание работы:**

1. Определитель второго порядка вычисляется по формуле: 

*Пример 1.*



2. Определитель третьего порядка вычисляется по формуле «треугольников»: 

*Пример 2.*



3. Определитель четвёртого порядка и выше может быть вычислен с помощью разложения по строке (столбцу):

,

где 

*Пример 3.*

**

**

**Задания для практической работы:**

*Вычислить определители:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант № 1 | Вариант № 2 | Вариант № 3 |
| 1. | 1. | 1. |
| 2. | 2. | 2. |
| 3. | 3. | 3. |

**Практическая работа № 3**

***Решение систем линейных уравнений (матричный метод, метод Крамера)***

**Цель работы:**

1. Научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.
2. Научиться решать системы линейных уравнений матричным методом.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие системы линейных уравнений.
2. Матричный метод и метод Крамера.

**Умения:**

1. Решать системы линейных уравнений матричным методом и методом Крамера.

**Содержание работы:**

Системой из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными называется система вида: (1)

1. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений:



где , 

***Пример*:** Решить систему методом Крамера

Вычисляем определители системы:

,

,

,

.

Чтобы получить определитель , мы заменили в определителе первый столбец на столбец из свободных членов; заменяя в определителе  2-ой столбец на столбец из свободных членов, получаем ; аналогичным образом, заменяя в определителе  3-ий столбец на столбец из свободных членов, получаем . Решение системы:

.

*Ответ: (1; 0; -1)*

2. Запишем систему (I) в матричном виде , тогда решение ищем в виде:  (при условии, что матрица А- невырожденная, т.е. ).

***Пример*:** Решить систему с помощью обратной матрицы

.

Обозначим 



Найдем матрицу 

, , ,

,  , ,

, , ,

, тогда 

*Ответ: (1; 0; -1)*

**Задания для практической работы:**

Решить системы линейных уравнений а) матричным методом; б) методом Крамера:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 

10) 

**Практическая работа № 4**

***Решение систем линейных уравнений (метод Гаусса)***

**Цель работы:**

Научиться решать системы уравнения методом Гаусса.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие системы линейных уравнений.

2. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.

**Умения:**

1. Решать системы линейных уравнений матричным методом Гаусса.

**Содержание работы:**

Процесс решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Гаусса состоит из двух этапов.

*Первый этап* (прямой ход метода) – система приводится к треугольному виду.

*Второй этап* (обратный ход) – неизвестные определяются последовательно, начиная с последнего неизвестного и заканчивая первым.

***Пример 1****:* Решить систему: 

Решение:

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

~~~

полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем, ранг матрицы системы также равен трем, r(A)=3 и число неизвестных n=3, следовательно, система определенная, т.е. имеет единственное решение.

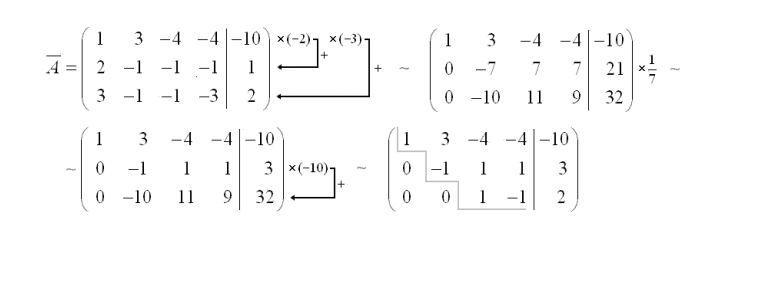
2. Записываем уравнение, используя последнюю строку приведённой матрицы: *z=1.*

Из второй строки: *5y-7z = -7,* т.к*. z=1, то y= 0.*Из третьей строки: *x- 2y +4z=3,* т.к*.z =1 y = 0,* то*x = 1.*

*Ответ: (-1,0,1)*

***Пример 2 :***Решить систему: 

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:



полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем, ранг матрицы системы также равен трем, r(A)=3. Поскольку ранг рассмотренных матриц равен 3, а число неизвестных переменных 4, т. е. r=3< n= 4, то делаем вывод о неопределенности данной системы линейных уравнений (т.е. система имеет бесконечное множество решений).

Базисными переменными будут (соответствующие этим переменным коэффициенты находятся в уголках ступенек треугольной матрицы), а переменная будет свободной. Пусть , тогда

из третьей строки приведённой матрицы: 

из второй строки:

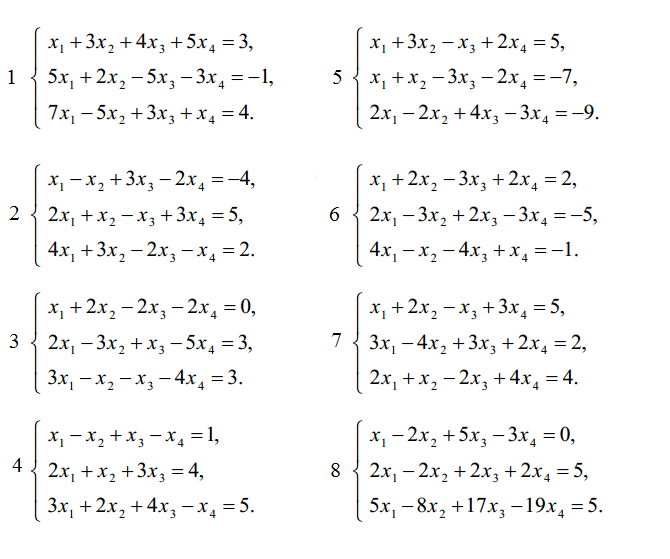
из первой строки:



Ответ: *(2С+1; 2С-1; С+2; С), СR*

**Задания для практической работы:**

*Решить системы методом Гаусса:*

****

**Практическая работа № 5**

***Линейные операции над векторами***

**Цель работы:**

Научиться выполнять линейные операции над векторами.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие вектора.

2. Понятие линейных операций над векторами.

**Умения:**

1. Строить суммы и разности векторов, коллинеарных векторов.

**Содержание работы:**

*Определение:* Направленный отрезок (или упорядоченная пара точек) называется ***вектором***.

|  |  |
| --- | --- |
| рисунок 1 | Вектор обычно обозначается символом image003, где А – начало, а В – конец направленного отрезка, либо одной буквой image004 |
| рисунок 4  Рис 1.Сложение векторов | Суммой векторов  и называется такой третий вектор , что при совмещенных началах этих трех векторов, векторы  и  служат сторонами параллелограмма, а вектор - его диагональю (рис.1). Сложение векторов в соответствии с рисунком называется сложением по правилу параллелограмма  Разностью векторов  и  называется сумма.  +(-) |
| pimage003  Рис2.Правило треугольника | Однако бывает более удобным использовать для сложения правило треугольника, которое становится ясным из рисунка 2. Из того же рисунка видно, что результаты сложения по правилу параллелограмма и по правилу треугольника одинаковы. |
| pimage004  Рис.3Умножение вектора на число | Произведением векторана вещественное число$ {\alpha}$называется вектор , определяемый условием  1) и, если, то еще двумя условиями:  2) вектор коллинеарен вектору;  3) векторы  и  направлены одинаково, если, и противоположно, если$ {\alpha}<0$Произведение вектора  на число $ {\alpha}$обозначается (рис 3). |

**Задания для практической работы:**

Постройте векторы 1) ; 2); 3); 4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант №1 | Вариант №2 | Вариант №3 | Вариант №4 | Вариант №5 | Вариант №6 | Вариант №7 | Вариант №8 | Вариант №9 | Вариант №10 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Практическая работа № 6**

***Вычисление модуля и скалярного произведения***

**Цель работы:**

1. Научиться вычислять скалярное произведение векторов.
2. Научиться вычислять углы между векторами с помощью скалярного произведения.

**Знания (актуализация):**

1. Понятие модуля вектора.

2. Понятие скалярного произведения.

**Умения:**

1. Вычислять скалярное произведение векторов.

2. Определять угол между векторами.

**Содержание работы:**

Координатами вектора называют проекции этого вектора на координатные оси, записывают.

Формула длины вектора через его координаты:

Если рассмотреть вектор заданный двумя точками и , то координаты вектора выражаются формулой т.е. *координаты вектора равны разности соответствующих координат его конца и начала.*

Рассмотрим два вектора и

1. тогда сумма этих векторов

т.е. координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат.

1. аналогично получим

т.е. координаты разности векторов равны разности соответствующих координат.

1. найдем координаты вектора *=* :

т.е. координаты произведения вектора  на число равны произведениям соответствующих координат вектора на.

1. векторы  и **равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т.е. 
2. векторы  и ** коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е. .

*Пример 1:* Даны точки А(2;-1;0) и В(-2 ;-3; 4). Найти длину вектора .

*Решение:* Найдём координаты вектора.

Вычислим длину вектора

*Пример 2:* При каких значениях  вектора коллинеарны?

*Решение :*Так как  отсюда находим .

*Скалярным произведением* векторов  и **называется число*,* равное произведению их длин на косинус угла между ними: .

Пусть векторы  и ** заданы своими координатами и, тогда

- скалярное произведение этих векторов находится по формуле

- косинус угла между ними – по формуле

- проекция одного из векторов на другой - по формуле:

*Пример 3:* Найти , если

*Решение:*

(, т.к.).

**Задания для практической работы:**

1. Даны векторы и , где; ;.

Найти а) ; б) ; в) .

1. -5, -4, 3, 6, 3, 5, , -2,1/3,1,2.
2. -2, 3,4,-1,1,3,,3,2,-2,4.
3. 5, -2,3,-1,4,5,,2,3,-1,5.
4. 5, 2,-6,-4,3,2,,-1,1/2,2,3.
5. 3, -2,-4,5,2,3,,2, -3,5,1.
6. 2, -5,-3,4,2,4,,3,-4,,3.
7. 3, 2,-4,-2,2,5, ,1,-3,0,-1/2.
8. 5, 2,1,-4,3,2, ,1,-2,3,-4.
9. -3, -2,1,5,3,6, ,-1,2,1,1.
10. 5, -3,4,2,4,1, ,2,-1/2,3,0.
11. Проверить коллинеарность векторов 
    1. 
    2. 
    3. 
    4. 
    5. 
    6. 
    7. 
    8. 
    9. 
    10. 
12. По координатам точек *А, В* и *С* для указанных векторов найти:

а) модуль вектора а;

б) Скалярное произведение векторов а и b;

1. А(4,6,3), В(-5,2,6), С(4,-4,-3), а=,b=,c=
2. А(4,3,-2), В(-3,-1,4), С(2,2,1), а=,b=,c=
3. А(-2,-2,4), В(1,3,-2), С(1,4,2), а=,b=,c=
4. А(2,4,3), В(3,1,-4), С(-1,2,2), а=,b=,c= 
5. А(2,4,5), В(1,-2,3), С(-1,-2,4), а=,b=,c= 
6. А(-1,-2,4), В(-1,3,5), С(1,4,2), а=,b=,c= 
7. А(1,3,2), В(-2,4,-1), С(1,3,-2), а=,b= ,c= 
8. А(2,-4,3), В(-3,-2,4), С(0,0,-2), а=,b=,c=
9. А(3,4,-4), В(-2,1,2), С(2,-3,1), а=,b=,c=

10.А(0,2,5), В(2,-3,4), С(3,2,-5), а=,b=,c=

**Практическая работа № 7**

***Составление уравнений прямых, их построение***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться составлять различные уравнения прямой.

**Знания (актуализация)**:

1. Виды уравнений прямой на плоскости.

**Умения:**

1. Составлять различных видов уравнений прямой.

**Содержание работы:**

1. **Аx+Вy+С=0** – общее уравнение прямой

а) *А=0, В ≠ 0.* Уравнение определяет прямую, параллельную оси абсцисс и пересекающую ось ординат в точке с координатой.

б) *B = 0, A ≠ 0*. Уравнение определяет прямую, параллельную оси ординат и пересекающую ось абсцисс в точке с координатой .

в) c = 0. Уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.

**2.**  - уравнение прямой, проходящей через две точки *(х1, у1); (х2, у2).*

**3**.- параметрические уравнения прямой, где -координаты любой точки, лежащей на прямой, - координаты направляющего вектора (вектора параллельного прямой или лежащего на прямой).

**4**. - уравнение прямой, проходящей через точку *А (х0, у0 )* и направляющий вектор

**5**.- уравнение прямой в отрезках, где *a*и*b*отрезки отсекаемые на осях координат.

**6**.**А(x-х0) + В(y-у0) = 0** – уравнение прямой, проходящей через точку *А(х0, у0)* и вектор нормали (вектор, перпендикулярный прямой).

**7. –**уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении, т.е. с заданным угловым коэффициентом k.

*Пример:* Пусть даны координаты вершин треугольника: *A(4;3), B(16;-6), C(4;-12).*

а) Найти длины сторон треугольника *АВС.*

Используем формулу, определяющую расстояние d между точками и

Тогда по формуле получим:

б) Найти уравнения сторон треугольника, указать их угловые коэффициенты и координаты направляющих и нормальных векторов соответственно.

Используем формулу уравнения прямой, проходящей через две точки

Подставляя в формулу координаты соответствующих вершин треугольника ABC, определим искомые уравнения сторон.

(AB) :

или*-3(x-4)=4(y-3);-3x+12=4y-12;* ***3x+4y-24=0 (AB****)*

Получили общее уравнение прямой АВ. Разрешим это уравнение относительно переменной y , тогда коэффициент перед переменной x является угловым коэффициентом прямой АВ:

Если прямая задана своим общим уравнением *Ax+ By +C = 0*, то вектор нормали и направляющий вектор имеют следующие координаты:

Значит, для прямой АВ:

Аналогично определим уравнения сторон *ВС* и *АС* и координаты их нормальных и направляющих векторов соответственно.

(BC) :

*11(x-16)=2(y+6);11x-176=2y+12;* ***11x-2y-188=0 (BC)***

Координаты их нормальных и направляющих векторов:

(AC) :

*13(x-4)=16(y-3);13x-52=16y-48;* ***13x-16y-4=0 (AC)***

Координаты их нормальных и направляющих векторов:

в) Определить величину угла B треугольника ABC.

Если две прямые*l*1 и *l*2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: и, то угол между ними можно найти по формуле:

В нашем примере: , значит:

. Таким образом, .

г) Найти уравнение высоты CD и ее длину.

Поскольку CD является высотой треугольника АВС, значит CD⊥AB . Используем условие перпендикулярности двух прямых:

прямые перпендикулярны, если их угловые коэффициенты обратно пропорциональны и взяты с противоположными знаками, т.е.

В нашем случае: CD⊥AB

Далее, используем уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении:В нашем случае известна точка C(20;16) точка, через которую проходит высота CD, и угловой коэффициент этой прямой

Тогда получим: **(CD)**

Для определения длины высоты CD, используем формулу ,

но сначала найдем координаты точки D. Поскольку точка D является пересечением прямых CD и AB, то для определения еѐ координат необходимо решить совместно уравнения этих прямых, т.е.

Значит, точка D имеет следующие координаты: D(8;0).

д) Найти уравнение медианы *BK* .

Так как *BK* является медианой, то точка K - середина отрезка AC. Определим координаты середины отрезка *AC* по формуле:

Далее, использую формулу , найдем уравнение медианы BK:

*31(x-16)=-8(y+6);* ***31x+8y-448=0(BK)***

е) Найти уравнение прямой, проходящей через точку D, параллельно стороне AС.

Пусть *l*искомая прямая. Тогда, по условию она параллельна прямой AС. Используем условие параллельности двух прямых:

*две прямые параллельны, если они имеют равные угловые коэффициенты*, т. е.

⇔

В нашем случае: .

Также, по условию, известно, что прямая *l* , проходит через точку D. Тогда используя формулу , определим уравнение искомой прямой:

**13(*l*)**

**Задания для практической работы:**

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

а) длины сторон треугольника;

б) уравнения сторон треугольника, указать их угловые коэффициенты и координаты направляющих и нормальных векторов соответственно;

в) угол C треугольника ABC;

г) уравнение высоты AL и ее длину;

д) уравнение медианы BK;

е) уравнение прямой, проходящей через точку L, параллельно стороне AB;

ж) сделать рисунок

1) *A(5;14), B(-5;9), C(7;0)*

2) *A(3;9), B(-7;4), C(5;-5)*

3) *A(10;8), B(0;3), C(12;-6)*

4) *A(14;6), B(4;1), C(16;-8)*

5) *A(0;10), B(-5;9), C(7;0)*

6) *A(4;13), B(-6;8), C(6;-1)*

7) *A(15;17), B(-1;4), C(11;-5)*

8) *A(22;23), B(-4;10), C(8;1)*

9) *A(13;11), B(3;6), C(15;-3)*

10) *A(8;12), B(-2;7), C(10;-2)*

**Практическая работа № 8**

***Составление уравнений кривых 2-го порядка, их построение***

**Цель работы:**

Научиться составлять уравнения и строить кривые второго порядка.

**Знания (актуализация):**

1. Определения кривых второго порядка.

**Умения:**

1. Составлять уравнения кривых второго порядка.

2. Строить эллипс, гиперболу, параболу и окружность.

**Содержание работы:**

*Определение* Кривой второго порядка называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второго порядка:

|  |  |
| --- | --- |
| Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой центром окружности.  $\displaystyle (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$ | *Пример 1*  Нарисуйте кривую $ {x^2+y^2-2x+6y+6=0}$.  **Решение.** Выделив полные квадраты, получим  $\displaystyle (x-1)^2+(y+3)^2=2^2.$  Итак, центр окружности –C(1;-3), радиус равен 2  pimage302 |
| Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная.  $\displaystyle \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$ b^2=a^2-c^2$  Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются вершинами эллипса, центр симметрии – центром эллипса, отрезок между двумя вершинами, содержащий фокусы, называется большой осью эллипса, половина его длины -- большой полуосью эллипса. Отрезок между вершинами на оси симметрии, не содержащей фокусов, называется малой осью эллипса, половина его длины - малой полуосью. Величина $ {\varepsilon}=\dfrac ca$называется эксцентриситетом эллипса. | *Пример 2*Постройте кривую .Найдите фокусы и эксцентриситет.  **Решение.** Разделим обе части уравнения на 36. Получаем уравнение  $\displaystyle \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1.$  *a=3, b=2*  pimage306  .  Фокусы т--,  эксцентриситет- |
| Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек той же плоскости, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная.  $\displaystyle \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$\displaystyle b=\sqrt{c^2-a^2}.$  $ y=\frac bax$, $ {y=-\frac bax}$- асимптоты гиперболы  Точки пересечения гиперболы, заданной каноническим уравнением, с осью $ Ox$называются вершинами гиперболы, отрезок между ними называется действительной осью гиперболы. Отрезок оси ординат между точками (0, *-в*) и (0,*в*) называется мнимой осью. Числа $ a$и $ b$называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы. Начало координат называется ее центром. Величина  называется эксцентриситетом | *Пример 3* Постройте гиперболу, найдите ее фокусы и эксцентриситет.  **Решение.** Разделим обе части уравнения на 4. $\displaystyle \frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=1,$$ a=1$, $ b=2$.  Проводим асимптотыи строим гиперболу.  pimage312  . Тогда фокусы -- --, |
| Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки этой плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой, лежащей в той же плоскости и называемой директрисой параболы.  $\displaystyle y^2=2px.$  директриса имеет уравнение $ {x=-\frac p2}$ | *Пример 4* Постройте параболу . Найдите ее фокус и директрису.  ***Решение.*** Уравнение является каноническим уравнением параболы, 2р=3, р=1,5. Для построения найдем несколько точек параболы. Возьмем точки $ \left(\frac13;1\right)$, $ \left(\frac43;2\right)$, $ (3;3)$.  pimage316  Фокус *F*лежит на оси *Ох* на расстоянии от вершины, то есть имеет координаты (0,75;0). Директриса имеет уравнение , то есть х=-0,75. |

**Задания для практической работы:**

Даны точки и. Требуется:

а) составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки A и B, найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис. Сделать чертеж.

б) составить уравнение гиперболы, фокусы и вершины которой находятся соответственно в вершинах и фокусах найденного в п. а) эллипса. Найти её асимптоты, директрисы, эксцентриситет. Сделать чертеж.

в) составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку . Найти еѐ фокус, уравнение директрисы. Сделать чертеж.

**Практическая работа № 9**

**Выполнение операций над комплексными числами в алгебраической форме.**

**Цель работы:**

Научиться выполнять операции над комплексными числами в алгебраической форме.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие комплексного числа.

**Умения:**

1. Выполнять операции над комплексными числами в алгебраической форме.

2. Решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом.

**Содержание работы:**

Число вида , где - действительные числа, а*i*- мнимая единица, определяемая равенством: , называется *комплексным числом*. - действительная часть комплексного числа, - мнимая часть комплексного числа.

Модулем комплексного числа :

Числа и называются *сопряженными.*

Для того, чтобы *сложить или вычесть* два комплексных числа в алгебраической форме нужно соответственно сложить или вычесть их действительные и мнимые части.

*Пример:* Найти сумму и разность чисел:

Для того, чтобы *умножить* два комплексных числа в алгебраической форме нужно перемножить их как многочлены и учесть при этом, что .

*Пример:* Найти произведение чисел:

Для нахождения частного комплексных чисел и сначала числитель и знаменатель дроби умножают на сопряженное знаменателю число, а затем производят остальные действия.

*Пример:* Найти частное чисел:

=

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| 1. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел | | |
|  |  |  |
| 2. Вычислить | | |
|  |  |  |
| 3. Определить, при каких действительных значениях*x*и*y*комплексные числа и будут равны | | |
|  |  |  |
| 4. Решить уравнение | | |
|  |  |  |
| 5. Решить уравнение | | |
|  |  |  |

**Практическая работа № 10**

***Выполнение операций над комплексными числами в тригонометрической форме.***

**Цель работы:**

Научиться выполнять операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие комплексного числа.

**Умения:**

1. Выполнять операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

**Содержание работы:**

Число вида , где - действительные числа, а*i*- мнимая единица, определяемая равенством: , называется *комплексным числом*. - действительная часть комплексного числа, - мнимая часть комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде называется алгебраической формой записи комплексного числа. Часто бывает удобна другая форма записи комплексного числа. Пусть и. Тогда по определению аргумента имеем:

|  |
| --- |
|  |

Отсюда получается

Такая форма называется тригонометрической формой записи комплексного числа. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

***Пример*** Записать число в тригонометрической форме.

Найдём модуль этого числа: Аргумент данного числа находится из системы

Значит, один из аргументов числа равен .

Получаем: .

Умножение, деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме определяются следующим образом:

если , , то

1) ;

2) ;

если , , то

3) ;

4) .

В ответ записываются главные значения аргумента полученного результата, заключенные в промежутке .

***Пример*** Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:

а) б) ; в) , если

а)

б)

в)

***Пример***Найти

Представим в тригонометрической форме – 16:

Найдём модуль этого числа: Аргумент данного числа находится из системы

Значит, один из аргументов числа равен .

Получаем: .

Найдем корень: *=*

Найдем различные корни:

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| 1. Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:  а) б) ; в) | | |
| *n=3* | *n=3* | *n=6* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2.Выполнить действия в тригонометрической форме и представить результат в тригонометрической и алгебраической формах | | |
|  |  |  |
| 3. Найти значения корней | | |
|  |  |  |

**Практическая работа № 11**

***Вычисление пределов последовательностей***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять пределы последовательностей.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие числовой последовательности.

2. Определения предела последовательности.

**Умения:**

1. Вычислять пределы последовательностей.

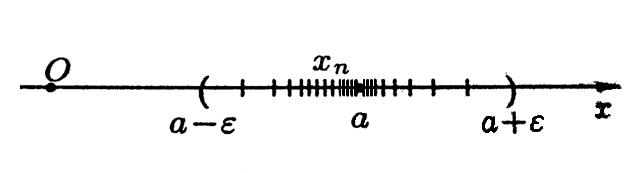
**Содержание работы:**

**Определение.** Число  называется пределом последовательности , если для любого положительно  го числа найдется такое натуральное число , что при всех > выполняется неравенство 

Пишут:

Графически это выглядит так:

n-



Т.е. элемент  находится в - окрестности точки а. При этом последовательности  называется сходящейся, в противном случае – расходящейся.

**Основные свойства сходящихся последовательностей**

1)Сходящаяся последовательность ограничена.

2)Пусть , , тогда а)  б)  в) 

3)Если  и для всех  выполняется неравенства , то.

4) Еслии последовательность {уn}- ограниченная, то 

|  |  |
| --- | --- |
| **Задания для практической работы:** | |
|  |  |

**Практическая работа № 12**

***Вычисление пределов функций***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять пределы с различными видами неопределённостей.

**Знания (актуализация)**:

1. Определения предела функции.

**Умения:**

1. Вычислять пределы функций: раскрывать неопределённости вида .

**Содержание работы:**

***Типы неопределённостей и их виды***

*1 тип Неопределённость вида в пределе*

**Примеры***:*

*1)*(т.к. старшие степени числителя и знаменателя равны, то делим коэффициенты при старших степенях *х*).

*2)*(т.к. старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя)

*2 тип Неопределённость вида в пределе*

Для раскрытия неопределённости необходимо либо разложить числитель и знаменатель на множители, либо умножить выражение содержащее корни на сопряжённое.

**Примеры:**

1)

2)==

*3 тип I-ый замечательный предел и основные эквивалентности:*

При ***х→0*** имеют место следующие неопределённости:

**Примеры:**

*4 тип II -ой замечательный предел*

**Примеры:**

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Вариант 1* | *Вариант 2* | *Вариант 3* |
| **«3»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| д) | д) | д) |
| **«4»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| д) |  |  |
| **«5»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| д) | д) |  |

**Практическая работа № 13**

***Исследование функции на непрерывность***

**Цель работы:**

Научиться определять точки разрыва функции и их вид, исследовать функцию на непрерывность.

**Знания (актуализация)**:

1. Определение непрерывной функции.

2. Определение точек разрыва и их классификация.

**Умения:**

1.Нахождить точки разрыва и устанавливать их тип.

2. Строить схематичный график функции.

**Содержание работы:**

*Определение*: функция непрерывна в точке, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: .

Определение детализируется в следующих условиях:

1) Функция должна быть определена в точке , то есть должно существовать значение .

2) Должен существовать общий предел функции: . Это подразумевает существование и равенство односторонних пределов:

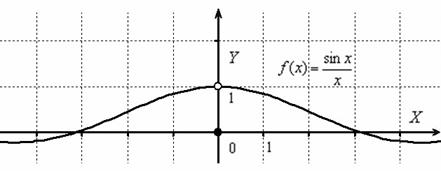
3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке:.

**Замечание:** Если нарушено **хотя бы одно** из 3-х условий, то функция теряет свойство непрерывности в точке.

### **Классификация точек разрыва**

### ***Точки разрыва первого рода***

Если в точке нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы конечны,** то она называется **точкой разрыва первого рода.**

***Пример*** *1:*Изобразим на чертеже график функции:

Данная функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки *x=0*. И в самом деле, знаменатель же не может быть равен нулю. Однако хоть точка и выколота, справедливость первого замечательного пределане нарушена – мы можем приблизиться к «нулю» и слева и справа бесконечно близко, таким образом, односторонние пределы существуют и совпадают:=1 (Условие №2 непрерывности выполнено).

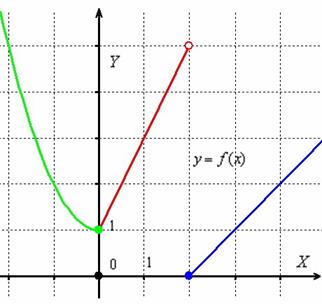
Но функция не определена в точке *х=0*, следовательно, нарушено Условие №1 непрерывности, и функция терпит разрыв в данной точке.

Разрыв такого вида (с существующим общим пределом) называют **устранимым разрывом**. Почему устранимым? Потому что функцию можно доопределить в точке разрыва:http://www.mathprofi.ru/i/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva_clip_image081.gif

***Пример 2:***

Рассмотрим функцию, заданную кусочно и выполним её чертёж.

Исследуем точку *х=2*на непрерывность:

1)*f(2)=2-2=0*– функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы.

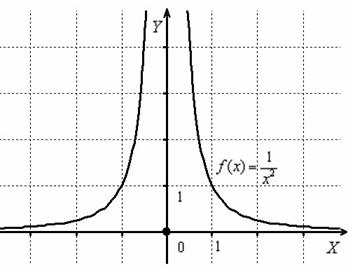
В результате получены конечные числа, причем они не равны. Поскольку односторонние пределы конечны и различны, то наша функция терпит разрыв первого рода неустранимый.

### ***Точки разрыва второго рода:***

*Пример 3:*Рассмотрим функцию .

Исследуем на непрерывность точку*x=0*:

1) Функция не определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы:Односторонние пределы бесконечные, следовательно*x=0* является точкой разрыва второго рода. Построим схематичный гафик данной функции, для этого вычислим ещё пределы этой функции на бесконечности .

**Задания для практической работы:**

Исследовать непрерывность функций в соответствии с заданиями.

а) Проверить, является ли функция  непрерывной в точках *х*1 и *х*2. В случае разрыва функции указать тип разрыва и сделать схематический чертеж в окрестности точки разрыва.

б) Построить график функции , используя график, записать промежутки непрерывности функции, перечислить точки разрыва и указать тип каждого из них.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № варианта | а) | б) |
| 1 | , *х*1 = 4, *х*2 = 5 |  |
| 2 | , *х*1 = 1,5, *х*2 = 2 |  |
| 3 | , *х*1 = 5, *х*2 = 7 |  |
| 4 | , *х*1 = 1, *х*2 = 4 |  |
| 5 | , *х*1 = 0, *х*2 = 0,5 |  |
| 6 | , *х*1 = –1, *х*2 = 2 |  |
| 7 | , *х*1 = 3, *х*2 = 5 |  |
| 8 | , *х*1 = 1, *х*2 = 3 |  |
| 9 | , *х*1 = 0, *х*2 = 1 |  |
| 10 | , *х*1 = –0,5, *х*2 = 1 |  |

**Практическая работа № 14**

***Механический и геометрический смысл производной.***

***Уравнения касательной и нормали.***

**Цель работы:**

Научиться составлять уравнения касательной и нормали для заданной функции.

**Знания (актуализация):**

1. Определение производной.

2. Геометрический смысл производной.

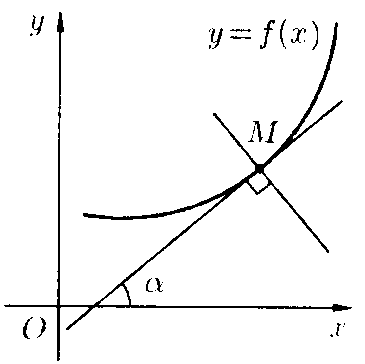
**Умения:**

1.Вычислять производную заданной функции.

2. Составлять уравнения касательной и нормали.

**Содержание работы:**

Производная функции при заданном значении аргумента равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой и ординатой : .

Уравнение касательной*:*

Уравнение нормали:

(Т.к. нормаль перпендикулярна касательной, то её угловой коэффициент .)

Если , то уравнение касательной будет иметь вид: .

*Пример:*

Составить уравнения нормали и касательной к функции  в точке .

Решение:

1. Вычислим , для этого подставим в заданную функцию
2. Находим производную
3. Вычисляем
4. Составляем уравнение касательной: или
5. Составляем уравнение нормали: или

**Задания для практической работы:**

Составить уравнения касательной и нормали к заданным линиям в точке :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант | Задача 1 | Задача 2 |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |

**Практическая работа № 15**

***Вычисление производных сложных функций***

**Цель работы:**

Проверить умения нахождения производной сложной функции.

**Знания (актуализация)**:

1. Определение производной и её свойства.

2. Понятие сложной функции.

3. Формула вычисления производной сложной функции.

**Умения:**

1.Вычислять производную заданной сложной функции.

**Содержание работы:**

***Таблица производных основных элементарных функций:***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

***Основные правила нахождения производной:***

; ; ; ; ; .

***Производная сложной функции***

Если  и , то- сложная функции, тогда её производная вычисляется по формуле, то есть . Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: *производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.*

***Примеры:***

1.Найти производную сложной функции:*.*

Положим , где получим:

2. .Найти производную сложной функции:*.*

Положим , получим:

**Задания для практической работы:**

Вычислите производные сложных функций:

Вариант 1

1) 2) 3) 4) 5)

Вариант 2

1) 2) 3)

4) 5)

Вариант 3

1) 2) 3)

4) 5)

Вариант 4

1) 2) 3) 4)

5)

Вариант 5

1) 2) 3) 4)

5)

**Практическая работа № 16**

***Раскрытие неопределенностей с помощью правила Лопиталя***

**Цель работы:**

Научиться устранять неопределённости в пределах с помощью правил Лопиталя.

**Знания (актуализация):**

1. Понятие неопределённости в пределах.

2. Правило Лопиталя.

**Умения:**

1.Вычислять производную функции и применять её при устранении неопределённостей в пределах.

**Содержание работы:**

В случаях неопределённостей вида справедливо правило Лопиталя: . Это правило применимо и в том случае, когда .

*Пример 1*

*Пример2*

*Замечание*: В данном примере пришлось применить правило Лопиталя дважды, т.к. после первого взятия производной неопределённость ещё сохранилась.

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вариант 1** | **Вариант 2** | **Вариант 3** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Практическая работа № 17**

***Применение производной для исследования функции***

**Цель работы:**

Используя схему исследования функции, научиться исследовать функции и строить их графики.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие экстремумов функции и её точек перегиба.

2. Понятие асимптот и их классификация.

**Умения:**

1. Строить графики функций.

**Содержание работы:**

*Общая схема исследования функции и построение её графика.*

1. Найдите область определения функции.

2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.

3. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат (нули функции).

4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.

5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.

6. Определите наличие асимптот.

7. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

**Пример:**

Построить график функции:

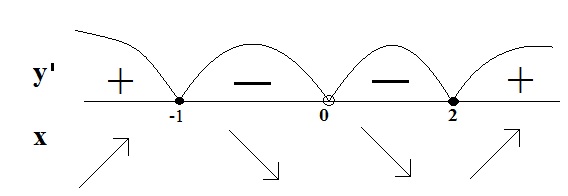
1.

2. Т.к. область определения не симметрична относительно начала координат, то функция не является ни чётной, ни нечётной (т.е. общего вида).

3. При *х=0*, *y(0)=0* – это единственная точка пересечения графика с осями координат.

4.

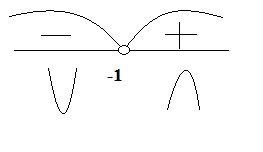
Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:



*x=-2 – т. max ymax =y(2) = -4*

*x=0 – т. min ymin =y(0) = 0*

5. Вычислим вторую производную и приравняем её к нулю:



Точек перегиба у данной функции нет.

6. Определим наличие асимптот:

а) т.е. горизонтальных асимптот нет.

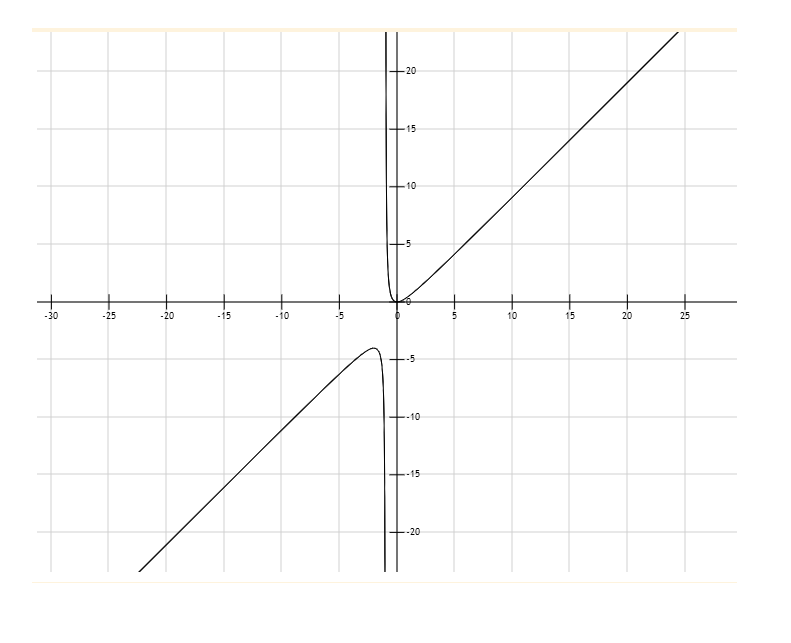
б) Рассмотрим односторонние пределы в точке *х=-1:*

Т.к. в точке *х=-1*функция терпит бесконечный разрыв, то график функции имеет вертикальную асимптоту *х=-1*

в) Для отыскания вертикальной асимптоты в виде *y=kx+b* вычислим следующие пределы:

Таким образом, прямая *y=x-1* служит наклонной асимптотой графика.

7. Используя полученные данные, строим график функции:



**Задания для практической работы:**

**ЗАДАЧА 1**

Провести полное исследование функции и построить ее график.

**1**.

**2**.

**3**.

**4**.

**5**.

**6**.

**7**.

**8.**

**9**.

**10**.

**ЗАДАЧА 2**

Провести полное исследование функции и построить ее график.

**1.****2.****3.**

**4.****5.****6.**

**7.****8.****9.**

**Практическая работа № 18**

***Интегрирования заменой переменной в неопределенном интеграле***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить неопределенный интеграл с помощью замены переменных.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

**Умения:**

1. Вычислять неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования.

2. Вычислять неопределённые интегралы методом замены переменной

**Содержание работы:**

***Таблица интегралов***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1.  2.  3.  4.  5.  6. | 7.  8.  9.  10.  11.  12. | 13.  14.  15.  16. |

**Непосредственное интегрирование** – это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов. Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

* 1. деление числителя на знаменатель почленно;
  2. применение формул сокращенного умножения;
  3. применение тригонометрических тождеств.

***Пример 1****.* Найти интеграл 

Решение*.*



***Пример 2*.** Найти интеграл 

Решение. Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель.



***Пример 3****.* Найти интеграл 

Решение**.** Возводим в куб и интегрируем каждое слагаемое.





***Пример 4****.* Найти интеграл 

Решение**.** Разлагаем подынтегральную дробь на две слагаемых дроби, деля числитель почленно на знаменатель.



***Пример 5****.*Найти интеграл 

Решение**.** Выделим в неправильной дроби целую часть и правильную дробь.





**Метод замены переменной (метод подстановки)**

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегри­рования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого ме­тода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный инте­грал сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегри­рованием.

***Пример 6*.**Вычислить

Решение**.** Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

***Пример 7.***Вычислить

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

***Пример 8.***Вычислить

Решение**.** Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Вариант 1* | *Вариант 2* | *Вариант 3* |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Практическая работа № 19**

***Интегрирования по частям в неопределенном интеграле***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться находить неопределенный интеграл с помощью формулы интегрирования по частям.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

**Умения:**

1. Вычислять неопределённые интегралы методом интегрирования по частям.

**Содержание работы:**

*Метод интегрирования по частям* сводится к вычислению интеграла по формуле



Для вычисления интеграла по этой формуле необходимо подынтегральное выражение исходного интеграла представить как *udv.* Т.е. часть выражения принять за *u*, а часть - за *dv.*

***Пример 1*.** Вычислить интеграл с помощью формулы интегрирования по частям: 

Решение:

Положим *u=lnxdv=x2dx* дифференцируя*u* и интегрируя *dv* получим:



Постоянная *С*в этом случае не ставится; она будет поставлена в окончательном результате, когда будет найден данный интеграл.

Обращаемся теперь к формуле интегрирования по частям:



***Пример 2***.





***Пример 3*.**

{второе слагаемое вычислим с помощью замены переменной)



в итоге получаем 

**Задания для практической работы:**

*Интегрирование по частям*

1. 

2. 

3. 

**Практическая работа №20**

***Вычисление определённых интегралов***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять определенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить определенный интеграл с помощью замены переменных и методом интегрирования по частям.

**Знания(актуализация)**:

1. Понятие определённого интеграла, его основных свойств.

**Умения:**

1. Вычислять определённые интегралы методом непосредственного интегрирования.

2. Вычислять неопределённые интегралы методом замены переменной и по частям.

### Теоретические сведения

Определённый интеграл вычисляется с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

***Пример 1***

Вычислите определенный интеграл .

Решение:



***Пример 2***

Вычислите определенный интеграл .

Решение:

.

***Пример 3***

Вычислите определенный интеграл .

Решение:

.

***Пример 4***

Вычислите определенный интеграл .

Решение:

.

*Метод интегрирования по частям.*

Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, произведение функций, а в ряде случаев – и частное.

Данный метод позволяет свести исходный определенный интеграл к более простому виду либо к табличному интегралу. Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Если функции u= u(x) и v = v(x) имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула интегрирования по частям:

Самое сложное, что есть в этом методе – это правильно определить, какую часть подынтегрального выражения брать за u, а какую за dv

Рассмотрим стандартные случаи.

* Для интегралов вида , или , где Pn(x) - многочлен, *a*– число. Удобно принять **u=P(x)**, а за **dv** обозначить все остальные сомножители.
* Интегралы вида , , , , . Удобно принять **P(x)**= **dv**, а за **u** все остальные сомножители.
* Интегралы вида , , где a и b числа. За **u** можно принять функцию **u = еах**.

***Пример 5*.** Вычислить

Решение.

.

***Пример 6.***Вычислить

Решение.

.

*Интегрирование заменой переменной (подстановкой).*

Пусть для интеграла от непрерывной функции сделана подстановка x = ϕ(t).

Если: 1) функция x = ϕ(t) и ее производная х/ = ϕ/(t) непрерывны при t∈[α;β];

2) множеством значений функции x = ϕ(t) при t∈[α;β] является отрезок [a;b]

3) ϕ(α) = a иϕ(β) = b, то

Отметим, что: 1) При вычислении определённого интеграла методом замены переменной возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки x = ϕ(t) применяют подстановку t = g(x);

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

*Алгоритм вычисления определенного интеграла методом подстановки:*

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4. Находят новые пределы интегрирования.

5. Производят замену под интегралом.

6. Находят полученный интеграл.

***Пример 7*.**Вычислить

Решение. Замена: t = x2 -16; dt= 2x dx; dx= .

Найдём новые пределы интегрирования. При x= 4, α= t(4) = 42 -16 =0; x= 5, β= t(5) = 52 -16 =9.

Получаем:

.

***Пример 8*.**Вычислить

Решение. Замена: t =, .

t -1 =, 2x + 1 = (t – 1)2, , dx = (t -1)dt.

Найдём новые пределы интегрирования. При x= 0, α= t(0) = 2; x= 4, β=t(4)=4.

Получаем:

.

**Задания для практической работы:**

Вариант 1.

1. б). в). 

2. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

а) ; б)

3. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) ; б)

Вариант 2.

1.а). б).  в). .

2. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

а) ; б)

3. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) ; б)

**Практическая работа № 21**

***Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов***

**Цель работы:**

1. Научиться вычислять определённые интегралы.

2. На конкретных примерах научиться находить площадь криволинейной трапеции

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие определённого интеграла.

2. Свойства определённого интеграла.

3. Основные методы вычисления определённых интегралов.

4. Понятие криволинейной трапеции

5. Методы вычисления площади криволинейной трапеции

**Умения:**

1. Вычислять определённые интегралы.

2. Вычислять площадь криволинейной трапеции

**Содержание работы:**

Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:

|  |  |
| --- | --- |
| y=y(x)  a  b  X  Y  **Рис.1** | * сверху - графиком непрерывной функции *y=y(x)* * снизу – осью OX (*y=0*) * слева – прямой *x=a* * справа – прямой*x=b* |

Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

 (1)

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

**Пример 1**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: , x=-1, x=2 и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

|  |  |
| --- | --- |
| **2**  **-1**  X    Y  Рис. 2 | Ответ: 6 кв.ед. |

Пусть y=f(x) – непрерывная функция при x[a, b], график которой расположен ниже оси OX (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 3  **y=f(x)**  X  Y  **a**  **b** | (2) |

**Пример 2**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 4  Y  X  2  3 | Ответ: 1/6 кв.ед. |

**Пример 3**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций и .

Решение: данная фигура (рис. 5)представляет собой разность криволинейных трапеций

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: x1=-2 и x2=1.

. Можно записать под один интеграл:

|  |  |
| --- | --- |
| Y  Рис. 5  X  -2  1  ***y=-x+3*** | Ответ: 4,5 кв.ед. |

**Пример 4.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций и , и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций S=S1+S2, где  и . Получим формулу:

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 6  X  0  1  ***y=-x+3***    3 | Ответ: кв.ед. |

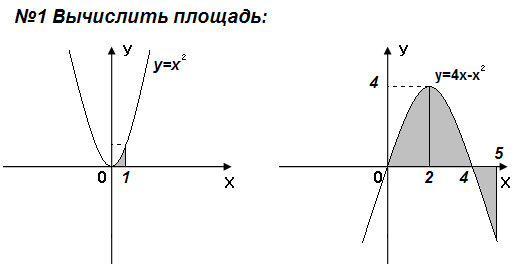
**Задания для практической работы:**

*Задание 1 Вычислить определённые интегралы:*

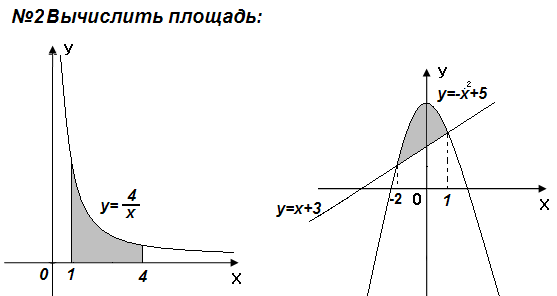
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

*Задание 2 Вычислить площади фигур*

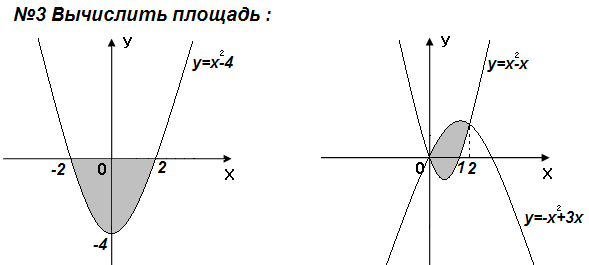
Вариант 1

****

Вариант 2

****

Вариант 3

****

**Практическая работа № 22**

***Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие дифференциального уравнения.

2. Виды дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения.

**Умения:**

1. Решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, линейных и однородных.

**Содержание работы:**

Дифференциальное уравнение называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

 или 

***Пример1***. Найти решение дифференциального уравнения

Подставим в уравнение, тогда⇒⇒

⇒⇒⇒⇒–общее решение

Решим задачу Коши: при : ⇒ 2= *С,* отсюда *частное решение:*

***Пример 2****.*Решить уравнение 

Дифференциальное уравнение вида называется **однородным**, если его правая часть

*f(x, y)*есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т.е.

***Пример 3***. Решить уравнение .

Введем вспомогательную функцию.

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее .

Подставляем в исходное уравнение: 

Разделяем переменные: 

Интегрируя, получаем: 

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции у, получаем общее решение:

Любое уравнение вида  является однородным, если функции *P(x, y)* и

*Q(x, y)*– однородные функции одинакового измерения.

Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:



при этом, если правая часть *Q(x)*равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)*неравна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию *y*заменить произведением двух вспомогательных функций *u=u(x)* и*v=v(x)*, т.е. положить *y=uv,* тогда .

***Пример 4.*** Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Будем искать решение в виде .

Тогда уравнение примет вид: . Сгруппируем второе и третье слагаемые и вынесем *u*за скобки:. Подберём функцию *v* так, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль, т.е.

Подставляя это частное решение в исходное уравнение получим:

Итак, общее решение исходного уравнения**:**

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| 1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция: | | |
|  |  |  |
| 2. Решите уравнение с разделяющими переменными | | |
|  |  |  |
| 3. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию | | |
| у(0)=2 | у(0)=1 |  |
| 4. Решите однородное дифференциальное уравнение | | |
|  |  |  |
| 5. Решите линейное дифференциальное уравнение | | |
|  |  |  |

**Практическая работа № 23**

***Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

**Умения:**

1. Решать линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка.

**Содержание работы:**

Однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение: . Для отыскания общего решения этого уравнения составляют характеристическое уравнение: , которое получается из исходного уравнения заменой производных искомой функции соответствующими степенями *k,* причем сама функция заменяется единицей.

Тогда общее решение уравнение строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *D>0*  корни действительные и различные | *D=0*  корни действительные и равные | *D<0*  корни комплексные |
| Общее решение дифференциального уравнения записывается в виде: | | |
|  |  |  |

***Пример.*** Решить уравнение 

Характеристическое уравнение: 

Общее решение: 

***Пример.*** Решить уравнение 

Характеристическое уравнение: 



Общее решение: 

***Пример.*** Решить уравнение

Характеристическое уравнение: 

Общее решение:

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| Решите уравнения ДУ 2го порядка | | |
| **а)**  **б)**  **в)**  **г)**  **д)** | **а)**  **б)**  **в)**  **г)**  **д)** | **а)**  **б)**  **в)**  **г)**  **д)** |

**Практическая работа № 24**

***Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

**Умения:**

1. Решать линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка.

**Содержание работы:**

### **Алгоритм решения неоднородного ДУ**

1) Сначала нужно **найти общее решение соответствующего однородного уравнения**http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image004_0001.gif– и найти общее решение Y.

2) Необходимо **найти какое-либо частное решение**http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image009.gif**неоднородного уравнения**. Сделать это можно так называемым способом **подбора частного решения** с применением **метода неопределенных коэффициентов**.

3) На третьем этапе надо **составить общее решение** *y***неоднородного уравнения**. Это совсем легко:http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image013.gif.

*Пример 1* Найти общее решение дифференциального уравненияhttp://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image016.gif

***Решение:*** 1)Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image019.gif

Составим и решим характеристическое уравнение:

http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image021.gif

http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image023.gif– получены различные действительные корни, поэтому общее решение:http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image025.gif

2) Теперь нужно найти какое-либо частное решениеhttp://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image009_0002.gifнеоднородного уравненияhttp://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image016_0001.gif

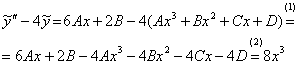
Правая часть:http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image028.gif- многочлен третьей степени. Частное решение тоже следует искать в виде многочлена третьей степени:http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image030.gif

Используем **метод неопределенных коэффициентов**.

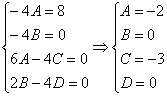
Найдём первую и вторую производную:

http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image035.gifhttp://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image037.gif

Подставимhttp://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image009_0004.gifиhttp://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image040.gifв левую часть неоднородного уравнения:



Далее необходимо **приравнять коэффициенты при соответствующих степенях и составить систему линейных уравнений.** http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image049.jpg



Подставляем найденные значенияhttp://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image032_0000.gifв наш исходный подбор частного решенияhttp://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image030_0002.gif:http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image056.gif

Таким образом, подобранное частное решение неоднородного уравнения:http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image058.gif

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:http://www.mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image060.gif

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | | Вариант 3 |
| Решите уравнения ЛНДУ 2го порядка | | | |
|  | |  |  |
|  | |  |  |

**Практическая работа № 25**

**Решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

**Умения:**

1. Решать дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

**Содержание работы:**

**Уравнения вида **

Постановка задачи. Найти общее решение дифференциального уравнения

****(1)

План решения. Решение такого вида уравнения находится 2 – кратным интегрированием:

1. Поскольку  то уравнение (1) перепишется в виде

Умножим обе части этого равенства на и проинтегрируем. Имеем



где *с1* – произвольная постоянная.

2. Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции *y(x)*. Решим его, представив как 



Интегрируем обе части равенства:



Записываем ответ: общее решение определяется уравнением () при всевозможных значениях *с1* и *с2*.

*Пример1.* Найти общее решение уравнения

*Решение.* Здесь

Проинтегрируем последовательно уравнение два раза:

1. Поскольку  то уравнение перепишется в виде



Применяя непосредственное интегрирование, придем к



дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, где *с1* – произвольная постоянная.

2. Найдем его общее решение, представив как 



Интегрируем обе части равенства:

Имеем 

**Уравнения вида **

Постановка задачи. Найти общее решение дифференциального уравнения

****(1)которое не содержит явно искомую функцию *y*.

План решения.

1. Выполним подстановку где *р* – некоторая функция от *х*. Получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции *р*:****(2)

2. Определим вид уравнения (2). Применив соответствующий способ решения, имеем  (3), где *с1* – произвольная постоянная.

3. Найдем искомую функцию *y.* Так как  то в силу (3), придем к уравнению с разделяющимися переменными. Решив его, запишем ответ в виде  где *с1*, *c2*– произвольные постоянные.

*Пример 2.*Найти общее решение дифференциального уравнения

*Решение.* Данное уравнение не содержит явно искомую функцию *y*.

1. Выполним подстановку

Получим

2. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции *р*. Решим его с помощью подстановкиимеем

*V* - ? *U* - ?

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |



3. Так как то, в силу (4), придем к 

уравнению с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение, представив как 





**Задания для практической работы:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | | Вариант 3 |
| Решите уравнения ЛНДУ 2го порядка | | | |
|  | |  | +2x+3 |
|  | |  |  |
|  | |  |  |

**Список литературы**

*Основные источники:*

1. Григорьев, В.П. Элементы высшей математики: учебник для студентов учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 400 с.

*Дополнительные источники:*

1. Григорьев, В.П. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2018. – 160 с.

*Интернет - ресурсы*

* Электронно-библиотечная система ZNANIUM.COM Режим доступа: http://www.znanium.com/
* Электронно-библиотечная система "ЮРАЙТ" Режим доступа http://www. biblio-online. ru
* Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru/
* Информационные, тренировочные и контрольные материалы. Режим доступа: http:// www. fcior. edu. ru.
* Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. Режим доступа: http:// www. school-collection. edu. ru.