Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**МАТЕМАТИКА**

**Методические рекомендации**

**по выполнению практических работ**

для студентов 2 курса специальности

для специальности

11.02.15 Инфокоммуникационные сети и системы связи

Челябинск, 2021

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методические рекомендации составлены в соответствии с программой учебной дисциплины «Математика», утвержденной г. | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  комиссией  протокол №  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_ г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_\_/ О.И. Макаренко / | УТВЕРЖДАЮ  Зам. директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_ г. |

**Автор: Тавхутдинова Э.Х.,**преподавательЮжно-Уральского государственного технического колледжа

**АКТ СОГЛАСОВАНИЯ**

на методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» для студентов специальности

11.02.15 Инфокоммуникационные сети и системы связи,

разработанные преподавателем ГБПОУ «ЮУрГТК»

Тавхутдиновой Э.Х.

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» являются частью основной образовательной программы подготовки специалистов среднего звена в соответствии с ФГОС СПО по специальности 11.02.15 Инфокоммуникационные сети и системы связи.

Методические рекомендации содержат пояснительную записку, перечень тем и объем часов на выполнение практических работ, а также список учебных изданий, Интернет-ресурсов, в которых есть разъяснения по выполнению предложенных заданий. Методические рекомендации направлены на освоение умений применять методы дифференциального и интегрального исчисления; решать дифференциальные уравнения и знать основные понятия и методы математического анализа, теории вероятности и математической статистики; основные численные методы решения математических задач. Методические рекомендации включают в себя 3 основных раздела: «Элементы математического анализа», «Элементы теории вероятностей и математической статистики», «Основные численные методы».

Методические рекомендации по выполнению практических работ соответствуют требованиям ФГОС и требованиям работодателей к уровню подготовки выпускника данной специальности и обеспечивают подготовку квалифицированных специалистов среднего звена.



# Главный инженер С. И.Машковцев

# ЗАО «Южуралэлектромонтаж-два»

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для студентов 2 курса, обучающихся по специальности 11.02.15 «Инфокоммуникационные сети и системы связи». Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Методические рекомендации предназначены для организации выполнения практических работ по учебной дисциплине «Математика».

Программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 12 практических работ, направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 3 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 4 Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 11. Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере.

В результате освоения дисциплины студент должен **уметь**:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

В результате освоения дисциплины студент должен **знать**:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;

- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;

- основы интегрального и дифференциального исчисления.

***умений*:**

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

- решать дифференциальные уравнения;

**обобщение, систематизацию, углубление и закрепление *знаний*:**

- основные понятия и методы математического синтеза и анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики;

- основные методы интегрального и дифференциального исчисления;

- основные численные методы решения математических задач.

Описание каждой практической работы содержит номер, название и цель работы, формируемые в процессе выполнения работы знания и умения, теоретическое изложение необходимого материала (при необходимости примеры выполнения заданий), варианты заданий, описание алгоритма выполнения работы и контрольные вопросы (с целью выявить и устранить недочеты в освоении материала).

Для получения дополнительной, более подробной информации по основным вопросам учебной дисциплины в конце методических рекомендаций приведен перечень информационных источников.

Отчеты студентов по практическим работам должны выполняться в отдельных тетрадях, содержать номер, название и цель работы, выполненные задания и их результаты.

**Перечень практических работ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер работы | Название | Объем |
| 1 | Выполнение операций над комплексными числами в различных формах. | 2 |
| 2 | Раскрытие различных неопределённостей | 2 |
| 3 | Вычисление производных сложных функций и высших порядков | 2 |
| 4 | Исследование функции с помощью производной. | 2 |
| 5 | Вычисление неопределённых интегралов с помощью замены переменной | 2 |
| 6 | Вычисление неопределённых интегралов с помощью метода интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций | 2 |
| 7 | Вычисление определённых интегралов | 2 |
| 8 | Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур | 2 |
| 9 | Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка | 2 |
| 10 | Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка | 2 |
| 11 | Решение вероятностных задач. | 2 |
| 12 | Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм. | 2 |

# 

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

# «Выполнение операций над комплексными числами в различных формах»

# Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической форме.

# Теоретическая часть.

# Cложно представить себе ряд наук без применения комплексных чисел. Комплексные числа успешно прижились в электронике, где благодаря их применению с восхитительной простотой описывается поведение сложных электроцепей. Они также весьма эффективны в описании механики небесных тел, в частности для решения систем уравнений, которые помогают астрономам рассчитывать орбиты планет, спутников и астероидов. А не так давно они нашли широкое применение в компьютерной графике, во многом благодаря их популяризации.

# Определение комплексного числа

# Комплексным числом называется выражение вида x+iy, где x,y— действительные числа ;i — число, квадрат которого равен минус единице (i2=-1).

# Комплексное число обозначается z=x+iy

# Множество комплексных чисел обозначается C, а z — элемент данного множества. Комплексным числом z называется пара (x, y) действительных чисел x и y. При этом равенство, сумма и произведение упорядоченных пар, а также отождествление некоторых из них с действительными числами определяются следующим образом:

# 1) два комплексных числа z1 = (x1, y1) и z2 = (x2, y2) называются равными, если x1 = x2 и y1 = y2;

# 2) суммой комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z вида

# z = (x1 + x2, y1 + y2);

# 3) произведением комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число

# z = (x1x2 - y1y2, x1y2 + x2y1);

# 4) разностью комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z такое, что

# z2 + z = z1, откуда находим z = z1 - z2 = (x1 - x2, y1 - y2).

# 5) частным комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z такое, что

# 

# Пример 1. Найти сумму чисел:(1 + i) + (2 – 3i) = 1 + i + 2 –3i = 3 – 2i.

# Пример 2. 1(1 + 2i) – (2 – 5i) = 1 + 2i – 2 + 5i = –1 + 7i;

# Пример 3. (1 + i)∙(2 – 3i) = 2 – 3i + 2i – 3i2 = 2 – 3i + 2i + 3 = 5 – i;

# Геометрический смысл комплексного числа

# Комплексное число *z* = *x* + *iy* можно изображать вектором с началом в точке 0 и концом в точке *z*. Этот вектор обозначается той же буквой *z*.Из рисунка (см. выше) или из формулы |*z*| = (*x*2 + y2)1/2 видно, что длина вектора *z* равна |*z*|.  С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сумма и разность комплексных чисел. Число *z*1 + *z*2 изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов *z*1 и *z*2, а вектор *z*1 - *z*2 можно построить как сумму векторов *z*1 и -*z*2. Видно, что расстояние между точками *z*1 и *z*2 равно длине вектора *z*1 - *z*2, т.е. равно |*z*1 - *z*2|. Это же утверждение следует из равенства |*z*1 - *z*2| = [(*x*1 - *x*2)2 + (*y*1 - *y*2)2]1/2 .

# Тригонометрическое представление

# Комплексное число *z* = *a* +*bi* однозначно определяется своим модулем (расстоянием до точки *O*) и углом между *Oz* и действительной осью — этот угол называется *аргументом комплексного числа* и обозначается так: .

# Так как a = |z|cos, b = |z|sin, то в тригонометрической форме комплексное число имеет следующий вид: . Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

# Умножение одного комплексного числа на другое происходит следующим образом:

# ,

# Z1\*Z2 = r1(cosf1 + isinf1) \* r2(cosf2+ isinf2) = r1\*r2[(cosf1\*cosf2- sinf1\*sinf2) + (cosf1\*sinf2+ sinf1\*cosf2)i] =

# = r1\*r2[cos(f1+ f2) + sin(f1+ f2)i]

# Z1/Z2 = [r1(cosf1+ isinf1)] / [r2(cosf2+ isinf2)] = (r1/r2) \* [(cosf1+ isinf1) \* (cosf2- isinf2) / (cos2f2+ isin2f2)] =

# = (r1/r2) \* [cos(f1- f2) + sin(f1- f2)i]

# Zn = rn(cosfn + isinfn)

# Ходработы:

# 1 Вариант 1.

# Найдите модуль и аргумент числа:

# Выполните действия:

# Z1\*Z2 = 2(cos200 + isin600) \* 3(cos200+ isin600) =

# Z1/Z2 = [8(cos90+ isin20)] / 2(cos90+ isin20)] =

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число:1-1i

# Вариант 2.

# Найдите модуль и аргумент числа:

# Выполните действия:

# Z1\*Z2 = 3(cos800 + isinf300) \* 2(cos800+ isin300) =

# Z1/Z2 = [4(cos900+ isin300)] / [2(cos900+ isin300)] =

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число:2-2i

# 2. Ответьте на контрольные вопросы:

# 1) Как обозначается комплексное число.

# 2) Назовите две формы комплексного числа

# 3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

**Название практической работы:** Раскрытие различных неопределённостей.

**Цель работы:** научиться раскрывать различные неопределённости.

**знания** (актуализация):

основные понятия и методы математического анализа (функция, непрерывность функции, бесконечно большая и бесконечно малая функции, свойства бесконечно малых функций, связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями)

**умения:**

применять методы дифференциального исчисления.

**Теоретическая часть.**

**1. Предел функции.**

Числа А называют *пределом функции* при , если для любого сколь угодно малого > 0 найдется такое > 0, что ⏐f(x)-A⏐<при 0<⏐x - а⏐<.



**2. Практическое вычисление** пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют пределы  и , то:

1.  ;
2. ;
3. = ( при  ).

**Пример 1**

Найти предел функции .

Решение:

При имеет место неопределенность вида , так как и числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при . Для нахождения предела разделим числитель и знаменатель дроби на х. Получим:

(при  и ).

**Пример 2**

Найти предел функции .

Решение: =

**3. Первый и второй замечательные пределы:**

Широко используются для вычисления пределов функций также два замечательных предела функции:

 (первый замечательный предел),

 (второй замечательный предел).

**Пример 3**

Найти предел функции 

Решение:

Умножим числитель и знаменатель дроби  на 8, 

**Пример 4**

Найти предел функции 

Решение:

Воспользуемся свойством степени:

.

**Ход работы:**

**1.** Вычислить предел функций:

**Вариант 1.**

1. )х

**Вариант 2**

**Вариант 3**

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) что называется пределом функции

2) какая связь существует между бесконечно малой и бесконечно большой функцией

3) назовите виды неопределенностей

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3**

**Название практической работы:** Вычисление производных сложных функций и высших порядков.

**Цель работы:** научиться находить производные сложных функцийи высших порядков..

**Знания**(актуализация):

основные понятия и методы математического анализа (функция, производная функции, непрерывность функции, правила дифференцирования, производные элементарных функций, сложная функция, производная сложной функции);

основные методы дифференциального исчисления

**умения:**

применять методы дифференциального исчисления;

**Теоретическая часть.**

**1. Производные разных порядков**

Производная обозначается *у'* («игрек штрих»), или  («эф штрих от икс»), или  («дэ игрек по дэ икс»).

*Производная функции* — это предел отношения приращения функции к соответствующему приращению независимой переменной (аргумента) , когда стремится к нулю

 .

Производная 2-го порядка — это производная от производной первого порядка: , (читается «дэ» два игрек по дэ икс дважды»).

Производная n-го порядка — это производная от производной (n - 1) порядка: .

**2. Найти производные следующих функций:**

**Пример 1**

y=х2-4х+3.

Решение:

у / = (х2-4х+3) / = (х2)/ - (4х)/ + 3/.

Для решения используем таблицу производных (см. приложение). Получим у/ = 2х-4.

**Пример 2**

 .

Решение:

Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

 .

Применяя формулы (см. приложение), получим:



 .

**Пример 3**

 . Вычислить .

Решение:

По формулам получим:





 .

**Пример 4**



Решение:

Раскрываем скобки и производим деление:

 .

Используем дробные и отрицательные показатели:

 .

Находим производную у /:

 .

**Пример 5**

Найти производную 2-го порядка от функции  .

Решение:

Используя формулы таблицы, получим:

 .

Дифференцируя производную у /, имеем:



.

**3. Производная сложной функции**

Если , где , т.е. если у зависит от х через промежуточный аргумент u, то у называется сложной функцией от х.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:.

Некоторые формулы таблицы производных теперь будут иметь вид :







и т.д.(см. приложение)

**Пример 1.**

.

Решение:

Полагая 1+5х = u и у = u3, применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

.

**Пример 2**

.

Решение:

Полагая 3х= u, найдем, используя соответствующие формулы:

.

**Пример 3**

.

Решение:

Полагая х3= u, найдем:

.

**Ход работы:**

1. Найти производные функций**:**

1)  2)  3) ; 4) .

5) у =2x5-++ 6)  7) y=

8) y = 9) y = sin4 x+cos4 x 10) y=∙

2. Найти производные функций при данном значении аргумента:

1) , при х=0

2) , при х=3

3) , при х=

4) , при z=2

5) ), при y=0.

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) запишите определение производной

2) чем отличается производная сложной функции от производной элементарной функции?

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4**

**Название практической работы:** Исследование функции с помощью производной.

**Цель работы:**произвести исследование функции с помощью производнойи построить её график.

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия о математическом синтезе и анализе (функция, свойства функции, график функции, производная функции первого и второго порядка, применение производной для исследования функции);

основные методы дифференциального исчисления;

**умения:**

применять методы дифференциального исчисления;

**Теоретическая часть**

Схема исследования функции:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность (нечетность);

3) найти точки пересечения функции с осями координат;

4) найти асимптоты функции;

5) найти интервалы монотонности (точки min и max функции);

6) найти интервалы выпуклости и вогнутости функции (точки перегиба);

7) найти дополнительные точки, уточняющие график;

8) сделать рисунок.

**Пример 1.**

Построить график функции

1) D(y)=R

2) функция общего вида

3) точки пересечения с осями:

ОУ: х=0, у=-3, т.е. (0; -3);

ОХ: в данном случае найти затруднительно;

4) асимптот нет (исходя из области определения);

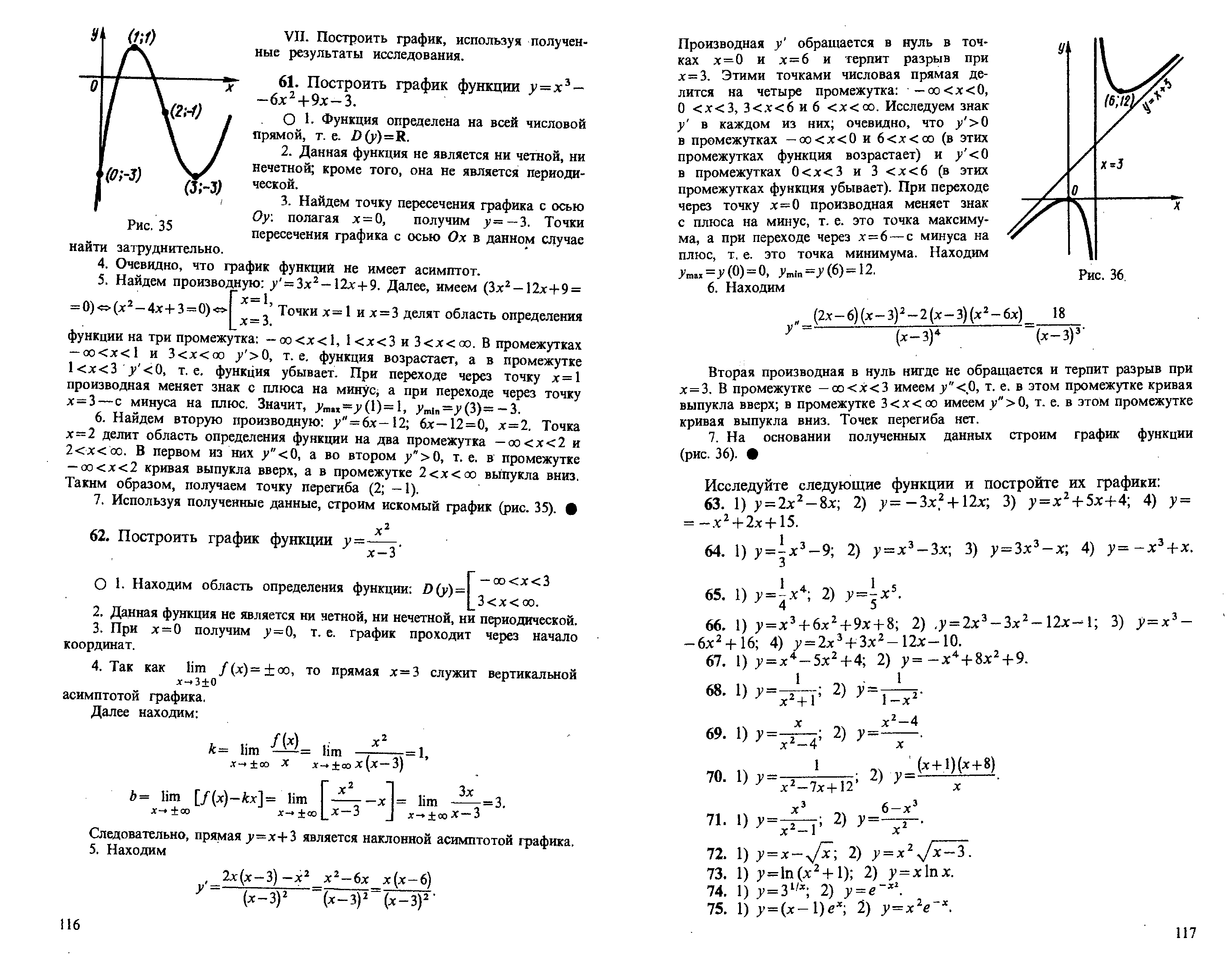
5) у**,** у=0 при х=1, х=3, проверим знаки производной и получим, что f(y) ↓ при х(1;3), f(х) ↑ при х;

по условию экстремума функции при х=1, у=y(1)=1- mах функции;

при х=3, у=y(3)=-3 - min функции.

6) у''=6x-12, у''=0 при х=2, проверим знаки второй производной и получим, что f(y) , f(y) , т.е. точка перегиба (2; -1).

7) используя полученные данные, строим искомый график.



**Пример 2.**

Исследовать функцию и построить её график у=

1) ;

2) четная функция;

3) ОХ у=0 1+х2≠0- точек пересечения с осью ОХ нет;

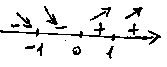
ОУ х=0 у=1 (0; 1);

4) х=1, х=-1- точки разрыва функции, , ,

х=1, х=-1- вертикальные асимптоты;

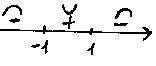
****,у=-1- горизонтальная асимптота;

**-** наклонной асимптоты нет.

5) у'=,у'=0 при х=0, х≠1, х≠-1 проверим знаки производной и получим, что f(х) ↓ при , f(х) ↑ при х;

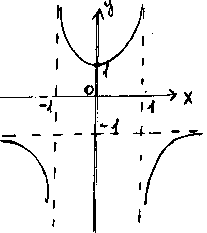
по условию экстремума функции при х=0, у=f(0)=1- min функции;

6) у''= у''=0 при х≠1, х≠-1 проверим знаки второй производной и получим, что

f(х) , f(х) , точек перегиба нет;

7) дополнительные точки не нужны; 

8) используя пункты 1-6, строим график функции.



**Ход работы:**

**Вариант 1**

Построить график функции

1)

2) 

**Вариант 2**

Построить график функции

1)

2) 

**Вариант 3**

Построить график функции

1)

2) 

2.Ответьте на контрольные вопросы:

1) как знак производной на промежутке характеризует характер функции

2) что такое точка перегиба

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5**

**Название практической работы:** Вычисление неопределённых интегралов с помощью замены переменной

**Цель работы:** научиться вычислять неопределённых интегралов с помощью замены переменной

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия и методы математического анализа (неопределенный интеграл; методы интегрирования);

основные методы интегрального исчисления;

**умения:**

применять методы интегрального исчисления;

**Теоретическая часть**

**1. Основные способы интегрирования**

1. *Метод непосредственного интегрирования,* который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличному виду (см. приложение).

**Пример 1**

Найти неопределенный интеграл

*Решение:*

Используя свойства неопределенного интеграла: интеграл от суммы равен сумме интегралов и постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, получаем

и затем используя формулы из таблицы (см. приложение):

**Пример2**

*Решение:*

*2. Метод подстановки (метод введения новой переменной).*

Найти неопределенный интеграл.

**Пример 3**

*Решение:*

Положим х+1=t, тогда x=t-1; ;

Продифференцировав х+1=t, получим dx=dt

+C

Обязательно возвращаемся к прежней переменной.

**Пример 4**

*Решение:*

Проведем замену

**Пример 5**

*Решение:*

**Правило:** Интеграл от нечетной степени синуса или косинуса находим путем отделения одного множителя, затем, используя формулу , разбиваем на 2 интеграла и далее замена переменных.

**Пример 6**

Найти неопределенный интеграл

*Решение:*

**Правило:** Интеграл от четной степени синуса или косинуса можно найти путем понижения степени вдвое по формулам половинных углов:

**Пример 7**

**Пример 8**

Найти неопределенный интеграл

*Решение:*

По формуле из таблицы:

**Пример 9**

Найти неопределенный интеграл:

*Решение:*

По формуле из таблицы:

**Ход работы:**

**Вариант 1**

1. Найти функцию по ее дифференциалу если функция принимает значение 2 при x=2

2. Найти интегралы:а)

3. Найти интегралы:



**Вариант 2**

1. Найти функцию по ее дифференциалу если функция принимает значение 6 при x=1

2. Найти интегралы: а)

3. Найти интегралы:



**Вариант 3**

1. Найти функцию по ее дифференциалу если функция принимает значение при x=

2. Найти интегралы: а) б)

3. Найти интегралы:



2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) что такое неопределенный интеграл

2) назовите основные методы интегрирования

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6**

**Название практической работы:** Вычисление неопределённых интегралов с помощью метода интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций

**Цель работы:** научиться вычислять неопределённых интегралов с помощью метода интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия и методы математического анализа (неопределенный интеграл; методы интегрирования);

основные методы интегрального исчисления;

**умения:**

применять методы интегрального исчисления;

**Теоретическая часть**

**1. Основные способы интегрирования**

**1. *Метод непосредственного интегрирования,*** который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличному виду (см. приложение).

***2. Интегрирование по частям***

Формула 

применяется для вычисления интегралов следующих видов

1) , , , где Р(х)- многочлен, к=const, к≠0 для вычисления интегралов такого вида применяют замену U=P(x);

2) ,  где Р(х)- многочлен, для вычисления интегралов такого вида применяют замену P(x)dx=dV;

3) где а, в- const, для вычисления интегралов такого вида применяют замену U=eax.

**Пример 10.**



**Пример 11.**



**Пример 12.**





**Пример 13.**





**Ход работы:**

**Вариант 1**

1. Найти интегралы: а)

б)

2. Найти интегралы: 

3. Найти интегралы:



**Вариант 2**

1. Найти интегралы: а)

б)

2. Найти интегралы: 

3. Найти интегралы:



**Вариант 3**

1. Найти интегралы:а) .

2. Найти интегралы: 

3. Найти интегралы:



2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) что такое неопределенный интеграл

2) назовите основные методы интегрирования

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

Вычисление определённых интегралов

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7**

**Название практической работы:** Вычисление определённых интегралов

**Цель работы:**Научиться вычислять определенные интегралы **знания** (актуализация)**:**

основные понятия о математическом синтезе и анализе (определенный интеграл, вычисление определенного интеграла);

основные методы интегрального исчисления

**умения:**

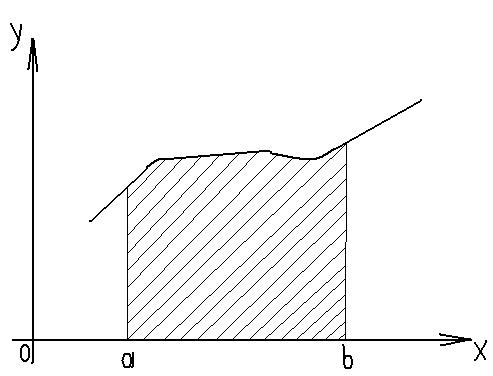
применять методы интегрального исчисления;

**Теоретическая часть**

**1. Определенный интеграл**

Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница), устанавливающая связь между определенным и неопределенным интегралом, имеет вид:

*Определенный интеграл –* это разность значений любой первообразной функции для f(x) при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

**2. Геометрический смысл**определенного интеграла: он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми х=а; х=b; y=0 и частью графика функции y=f(x), взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна.  
 **= F(b) – F(a)**

**3. Вычислениеопределенного интеграла:**

**Пример 1**

.

*Решение:*

Применяя формулу Ньютона-Лейбница и свойства определенного интеграла, получим

.

**Пример 2**

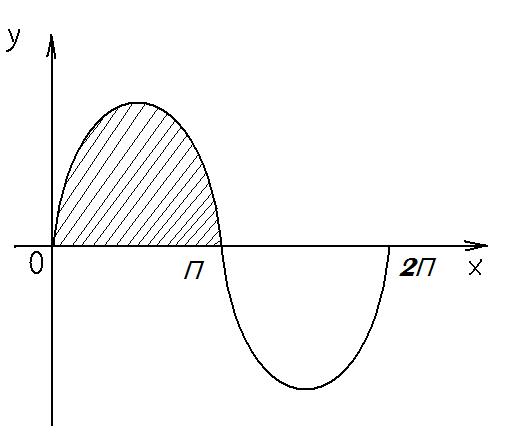
*Решение:*

Вводим новую переменную интегрирования, полагая =t.

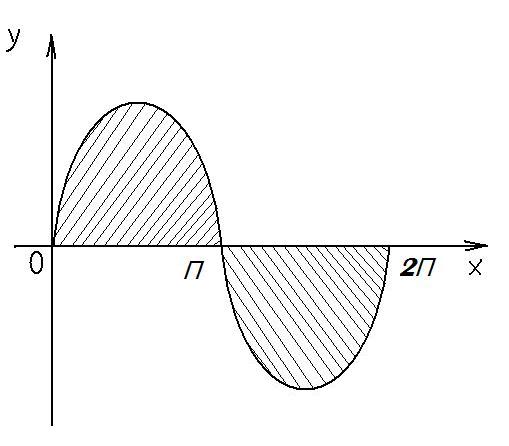
Отсюда находим новые пределы интегрирования: .

Подставляя, получим:

**4. Применение определенного интеграла для решения прикладных задач.**

**Пример 1**

Определить площадь полуволны синусоиды.

**Пример 2**

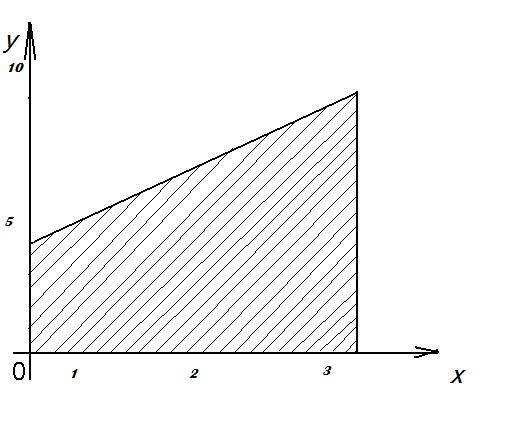
Определить площадь полной синусоиды.

*Решение:*

*Ответ: S=0.*

**Пример 3**

Определить площадь фигуры, образованной функцией и осью, при изменении *х* от 0 до 3.

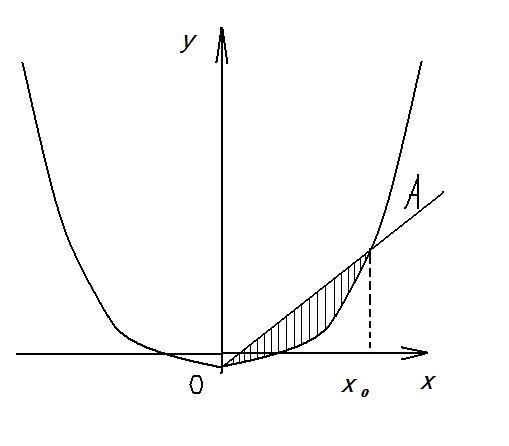


**Пример 4**

Вычислить площадь между линиями .

*Решение:*

Искомая площадь – это разность между площадью треугольника ОА и площадью криволинейного треугольника, ограниченного сверху участком параболы.



Точку - абсциссу точки пересечения графиков находим из уравнения

**Ход работы:**

**Вариант 1.**

1) Вычислить интегралы:

**Вариант 2.**

1) Вычислить интегралы:

**Вариант 3.**

1) Вычислить интегралы:

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) Запишите формулу Ньютона-Лейбница

2) в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8**

**Название практической работы:** Вычисление определённых интегралов

**Цель работы:** Научиться вычислять определенные интегралы

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия о математическом синтезе и анализе (определенный интеграл, вычисление определенного интеграла);

основные методы интегрального исчисления

**умения:**

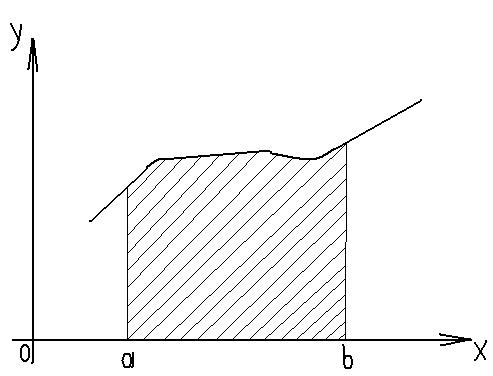
применять методы интегрального исчисления;

**Теоретическая часть**

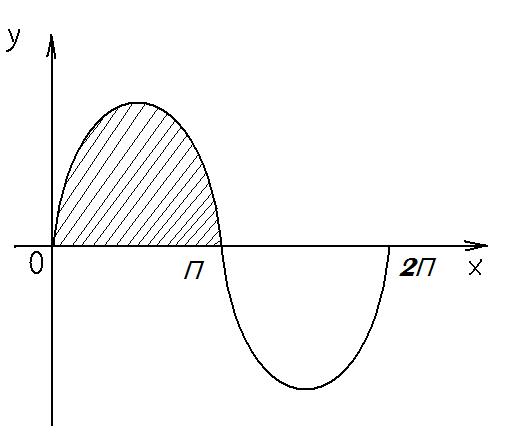
**1. Определенный интеграл**

Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница), устанавливающая связь между определенным и неопределенным интегралом, имеет вид:

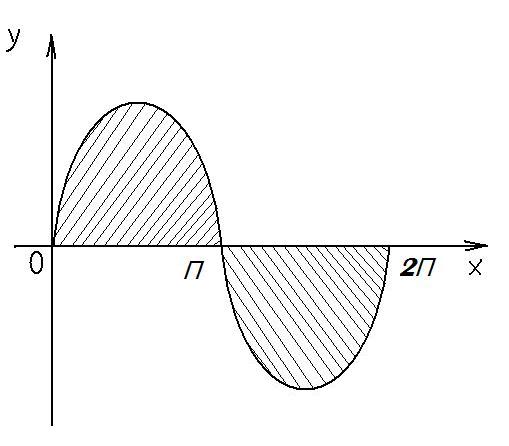
*Определенный интеграл –* это разность значений любой первообразной функции для f(x) при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

**2. Геометрический смысл** определенного интеграла: он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми х=а; х=b; y=0 и частью графика функции y=f(x), взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна.  
 **= F(b) – F(a)**

**4. Применение определенного интеграла для решения прикладных задач.**

Пример 1

Определить площадь полуволны синусоиды.

Пример 2

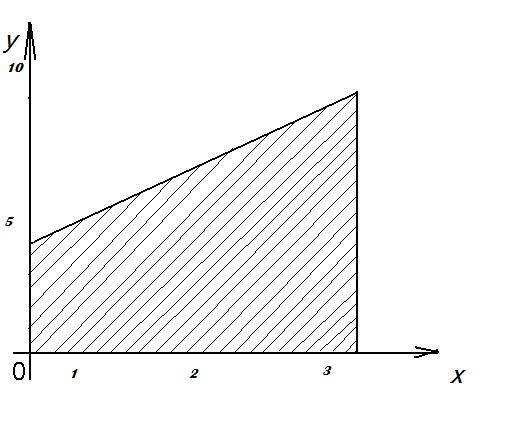
Определить площадь полной синусоиды.

*Решение:*

*Ответ: S=0.*

Пример 3

Определить площадь фигуры, образованной функцией и осью, при изменении *х* от 0 до 3.

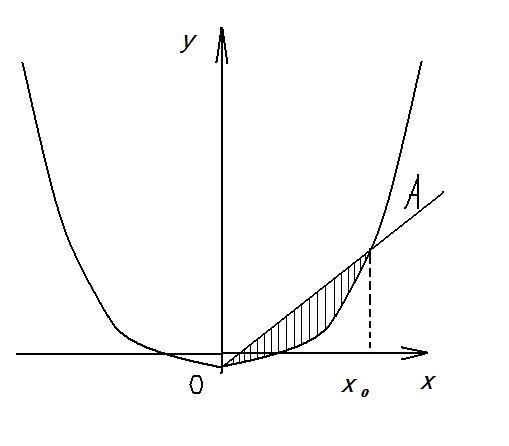


Пример 4

Вычислить площадь между линиями .

*Решение:*

Искомая площадь – это разность между площадью треугольника ОА и площадью криволинейного треугольника, ограниченного сверху участком параболы.



Точку - абсциссу точки пересечения графиков находим из уравнения

**Ход работы:**

**Вариант 1.**

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

а)  б) ,

**Вариант 2.**

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

а)  б) ,

**Вариант 3.**

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

а) б) ,

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) Запишите формулу Ньютона-Лейбница

2) в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9**

**Название практической работы:** Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка

**Цель работы:**Научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка.

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия и методы математического анализа (дифференциальное уравнение первого порядка);

основные методы дифференциального и интегрального исчисления;

**умения:**

решать дифференциальные уравнения;

**Теоретическая часть**

**1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям**

Рассмотрим задачу, приводящую к дифференциальному уравнению: установить закон изменения скорости U свободно падающего тела массой m без учёта силы сопротивления воздуха.

Согласно второму закону Ньютона,

где mg-сила тяжести.

Полученное уравнение является дифференциальным, так как в него входит производная искомой функцииU. Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию , которая торжественно удовлетворяет этому уравнению. Легко проверить , что уравнению удовлетворяет функция вида U=gt+C, где С-любое число. Указав начальные условия, можно найти одну функцию, удовлетворяющую уравнению. Так, если при t=0 и U=, то получим функцию

Существует много задач из различных областей знаний, решение которых сводится к составлению и решению дифференциальных уравнений.

**2. Дифференциальные уравнения первого порядка**

**Пример 1**

Проверить подстановкой, что дифференциальное уравнение имеет общее решение в виде

Найти частное решение, удовлетворяющее условию y=3 при х=0.

*Решение:*

Подставим дифференциальное уравнение:

- это тождество.

Частное решение:

; =>C=3

- частное решение.

**3. Уравнения с разделяющимися переменными**

Уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если функции Р и Q разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

В таком уравнении после деления членов на перемещенные разделяются:

И каждый член уравнения зависит от одной переменной.

Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

**Пример 1**

Найти общие интегралы уравнения:

*Решение:*

Разделим переменные в данном уравнении, деля обе его части на

Почленно интегрируя, получим искомое общее решение:

**Пример 2**

Найти частное решение дифференциального уравнения , при x=2, у=5.

*Решение:*

; ;

Умножим на ;

;

- это общее решение дифференциального уравнения.

*Найдем частное решение*. Для этого вычислим*С*при х=2 и у=5.

.

Частное решение

**4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка**

Уравнение первого порядка называется*однородным*, если можно представить как функцию только одного отношения переменных , т.е. уравнение вида .

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, следовательно, решается посредством замены функции у (или х) новой функцией *u*по формуле

**Пример 1**

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

*Решение:*

Из уравнение следует, что

Так как полученное уравнение является функцией только отношения , то оно однородное.

Вводим новую функцию *u*. Пологая, продифференцируем по *x:*

Прировняем (1) и (2): .

Подставим y=ux. Получим .

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

Общее решение уравнения имеет вид:

**Пример 2**

Найти частное решение однородного дифференциального уравненияхy′., удовлетворяющее условию y=-9, при х=1.

*Решение:*

Приведем уравнение к виду.

Полученное уравнение является функцией только , следовательно, оно однородное.

Для решения положим y=ux и продифференцируем по х:

Заменим и в исходном уравнении:u+x = 2 - u.

Разделяем переменные: ;

; .

Проинтегрируем: 2

21n

Общее решение уравнения:

; или

Частное решение: ; .

Ответ:

**Ход работы**

**Вариант 1**

Найти решения дифференциальных уравнений:

а)

б)

в) ()dy= 2xydx,

г) 

**Вариант 2**

Найти решения дифференциальных уравнений:

а)

б)

в) ()dy= xydx,

г)

**Вариант 3**

Найти решения дифференциальных уравнений:

а)

б)

в),

г)

2.Ответьте на контрольные вопросы:

1) запишите определение дифференциального уравнения

2) назовите виды дифференциальных уравнений первого порядка

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10**

**Название практической работы:** Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

**Цель работы:**Научиться решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия и методы математического анализа (дифференциальные уравнения);

основные методы дифференциального и интегрального исчисления;

**умения:**

решать дифференциальные уравнения;

**Теоретическая часть**

Уравнение , где  и - некоторые непрерывные функции переменой , называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

**Пример1.**Найти общее решение уравнения******

Вводим , тогда .

Следовательно, уравнение принимает вид:.

Произведём группировку

Выбираем  или 



, следовательно

Подставляя полученное выражение для, получим:.



, отсюда 

Т.о. получаем общее решение уравнения в виде.

**Пример 2.** Найти частное решение уравнения , удовлетворяющее начальному условию y(3)=1.

Вводим , тогда .

Следовательно, уравнение принимает вид: .

Произведём группировку 

Выбираем  или 



, следовательно

Подставляя полученное выражение для v, получим: ,



, отсюда 

Т.о. получаем общее решение уравнения в виде.

Найдем частное решение: , С=6, .

**Ход работы**

**Вариант 1**

1. Найти общее решение уравнения ****

2. Найти частное решение

а)если y=5 при x=0.

б) , если y(π)=π.

**Вариант 2**

1. Найти общее решение уравнения ****

2. Найти частное решение

а)если y=5 при x=0.

б) , если y(1)=1.

**Вариант 3**

1. Найти общее решение уравнения ****

2. Найти частное решение

а)если y=2 при x=0.

б) , если y(1)=1.

2.Ответьте на контрольные вопросы:

1) какое уравнение называется линейным дифференциальным

2) назовите способы решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11**

**Название практической работы:** Вычисление вероятности событий с применением правил сложения, умножения, по формулам полной вероятности и формулам Байеса.

**Цель работы:** Научиться вычислять вероятности событий.

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия и методы теории вероятности и математической статистики(случайное событие, вероятность, основные теоремы вероятностей);

**умения:**

вычислять вероятности событий;

**Теоретическая часть:**

**1. Вероятность случайного события**

Численная мера степени объективности возможности наступления события называется *вероятностью случайного события*.

*Классическое определение* вероятности события А:

P(A) =

Вероятность события А равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию А (m), к общему числу случаев (n).

**Пример 1**

При бросании игральной кости, возможно, шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Какова вероятность появления четного числа очков?

*Решение*: *P(A)* = =

Событие А – «появление четного числа очков» благоприятствуют 3 исхода (2, 4 и 6 очков).

**Пример 2**

Подбрасывают 2 монеты. Какова вероятность, что обе упадут «гербом» кверху?

*Решение:* 4 исхода бросания монет: ГГ, ГР, РГ, РР.

Пусть событие А – «выпали 2 герба» - этому событию благоприятствует один исход.

P(A) = = = 0,25

**2. Статистическое определения вероятности**

Относительная частота события – это доля тех фактически проведенных испытаний, в которых событие А появилось W = Р\*(А)= . Это опытная экспериментальная характеристика, где m – число опытов, в которых появилось событие А; n – число всех поведенных опытов.Вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний Р(А) =

**Пример 3**

Из 982 больных, поступивших в хирургическую больницу за месяц, 275 человек имели травмы. Какова относительная частота поступления больных с этим видом заболевания?

*Решение*: Р\*(А) =

**3. Закон сложения вероятностей**

Сумма вероятностей дискретный событий, образующих полную группу, равна единице

Р(А1 )+ Р(А 2)+…= Р(Аn)=1

Или

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

Р(А)+Р(Ā)=1.

**Пример 4**

Пусть вероятность того, что забег выигрывает Джим, равна , а вероятность того, что забег выиграет Том, равна . Какова вероятность того, что забег выиграет один из них?

Решение: P(A +B) = +

**Пример 5**

Вероятность попадания в опухолевую клетку «мишень» первого радионуклида равна Р=0,7, а второго –Р =0,8. Найти вероятность попадания в клетку - «мишень», если бы одновременно использовались оба препарата.

Решение:

Р(А+В)=Р(А)+Р(В) - Р(А ·В)=0,7+0,8 - 0,56=0,94.

**4. Условная вероятность**

Условная вероятность события В – это вероятность события В, найденная при условии, что событие А произошло. Обозначается Р(А/В).

**Пример 6**

В коробке содержатся 3 белых и 3 желтых таблетки. Из коробки дважды вынимают наугад по одной таблетке, не возвращая их в коробку. Найти вероятность появления белых таблеток при втором испытании (событие В), если при первом испытании была извлечена желтая таблетка (событие А).

*Решение:*

После первого испытания в коробке осталось 5 таблеток, из них 3 белых.

Искомое условие вероятности: Р(В/А)= 3/5 =0,6.

**Пример 7**

В коробке находится 8 красных и 6 белых таблеток. Из коробки последовательно без возвращения извлекают 3 таблетки. Найти вероятность того, что все 3 таблетки белые.

*Решение:*

Обозначим; А1 - первая таблетка белая, А2 - вторая таблетка белая, А3 - третья таблетка белая.

Р(А1А2 А3)=Р(А1)Р(А2 /А1)·Р(А3 /А1 А2);

Р(А1 )= ; Р(А2 /А1)= ; Р(А3 /А1 А2) = ;

P(A) = P(A1A2A3) = = 0,055.

**5.Закон умножения вероятностей**

Произведение двух событий – это событие, состоящее в совместном появлении этих событий (А и В).

**Пример 8**

Пусть имеются следующие события: А – «из колоды карт вынута дама»; В – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Что представляет собой событие АВ?

*Решение:* АВ есть событие «вынута дама пик».

Событие В называются независимыми от события А, если появление события А не изменяет вероятности появления события В.

Вероятность появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

Р(А·В)=Р(А)· Р(В).

Для зависимых событий:

Р(АВ)=Р(А) ·Р(В/А).

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло.

**Пример 9**

Вероятность того, что у взрослого пациента все зубы сохранились равна 0,67. Какова вероятность того, что у двух не имеющих отношения друг к другу больных, ожидающих приема в кабинете стоматолога, есть все зубы?

*Решение*: Р(А · В)=Р(А) · Р(В)=0,67 · 0,67=0,45.

**Пример 10**

Вероятность того, что студент в летнюю сессию сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы 1)только второй экзамен; 2)все три экзамена.

*Решение*:

1. Р(В)=Р(А1 А2 А3 )=Р(А1 ) · Р(А2 ) · Р(А3 )=0,1 0,9 0,2=0,018
2. Р(А1А2 А3)=Р(А1) · Р(А2 ) · Р(А3 )=0,9 0,9 0,8=0,648.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из событий А1 , А2 ,…, Аn , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий 1 , Ā2 , …, Ān.

**Пример 11**

Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий такова: Р1 = 0,75; Р2 = 0,8; Р3 = 0,85. Какова вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех этих орудий?

*Решение*:

g1= 1 – Р1 = 1 – 0,75= 0,25;

g2= 1 – Р2 = 1 – 0,8 = 0,2;

g3= 1 – Р3 = 1 – 0,85= 0,15;

Р(А) = 1 – g1g2g3;

Р(А)= 1 – 0,25 · 0,2 · 0,15=0,9925.

**Пример 12**

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

*Решение:*

Вероятность того, что в мишень попадет первый стрелок и не попадет второй, равна:

Р(А1 Ā2)=0,7· (1-0,8)=0,7· 0,2=0,14

Вероятность того, что попадает второй стрелок в мишень и не попадет первый, равна:

Р(Ā1 А2)=(1 – 0,7)· 0,8=0,3·0,8=0,24.

Вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок, равна сумме этих вероятностей:

Р(А1 Ā2 )+Р(А1 Ā2 )=0,14+0,24=0,38.

**6. Формула полной вероятности**

Формула полной вероятности применяется, когда событие*А* может появиться только с одной из гипотез *Н1, Н2 …Нп*ивероятностей этих гипотез известны до испытания: *Р(Н1), Р(Н2),* ..., *Р(Нп), известны также*  условные вероятности наступления события А при осуществлении каждой из гипотез, т.е. *Р(А/Н1),* Р(А/Н2),..., *Р(А/Нп).*

Тогда вероятность интересующего события А определяется:

*Р(А)= Р(Н1)∙Р(А/Н1)+ Р(Н2)∙*Р(А/Н2)+...+ *Р(Нп)∙Р(А/Нп).*

**Пример 13**

Часы одной марки изготовляются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 20% всей продукции, второй – 30%, третий – 50%. В продукции первого завода спешат 5% всех часов, второго – 3%, третьего – 2%. Каково вероятность того, что купленные в магазине часы спешат?

*Решение:*

Событие А – купленные часы спешат.

Определим предвари­тельно гипотезы.

Гипотеза *Н1 -* часы изготовлены на первом заводе, *Р(Н1*) = 0,2;

Гипотеза *Н*2: *-* часы изготовлены на втором заводе, *Р(Н2)* = 0,3;

Гипотеза *Н3:* - на третьем заводе,*Р(Н3)=0,5*.

Событие*А*может произойти только тогда, когда про­изошла либо гипотеза *Н1*, либо гипотеза *Н*2, либо *Н3:*

*Р(А/Н1)=0,05, Р(А/Н2)=0,03, Р(А/Н3)=0,02.*

Получаем по формуле: Р(А)=0,2∙0,05+0,3∙0,03+0,5∙0,02=0,029.

**7. Формула Байеса**

Формула Байеса применяется, когда событие *А,* которое может появиться только с одной из гипотез *Н1, Н2 …Нп*, произошло и необходимо произвести количественную пе­реоценку *априорных* вероятностей этих гипотез *Р(Н1), Р(Н2),* ..., *Р(Нп),* известных до испытания, т.е. найти *апостериорные* (получаемые после проведения испытания) условные вероятности гипотез Р(Н1/А), Р(Н2/А), …, *Р(Нп/А):*

*Р(Нi/А)* =

Или вместо *Р(А)* используем ее значение, вычисленное по формуле полной вероятности:

*Р(Нi/А) =*

Итак, пусть до опыта имеются гипотезы *Н1, Н2, ..., Нп*. После опыта становится известной информация о результа­тах опыта, но не полная, а именно: результаты наблюде­ний показывают, что наступило некоторое событие А.

Считается, что до опыта были известны *(априорные)* вероятности гипотез *Р(Н1),Р(Н2), ...,Р(Нп)* и *условные* вероятности *Р(А/Н1),* Р(А/Н2),..., *Р(А/Нп).* Необходимо определить *апостериорные* вероятности гипотез *Р(Н1/А), Р(Н2/А), ..., Р(Нп/А).*

Значение формулы Байеса состоит в том, что при наступ­лении события*А,* т.е. по мере получения новой информа­ции, мы можем проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы. Такой подход называется байесовским.

**Пример 14**

Два охотника одновременно стреляют одинаковыми пу­лями в медведя. В результате медведь был убит одной пу­лей (событие *А).* Как охотники должны поделить шкуру убитого медведя, если известно, что вероятность попадания у первого охотника 0,3,а у второго 0,6?

*Решение:*

Воспользуемся формулой Байеса. Определим предвари­тельно гипотезы.

Гипотеза *Н1 :*попал первый охотник, второй промахнулся.

Гипотеза *Н*2: попал второй, первый промахнулся.

Гипотеза *Н3:* попали оба охотника.

Гипотеза *Н4*: оба промахнулись.

Событие*А*может произойти только тогда, когда про­изошла либо гипотеза *Н1*, либо гипотеза *Н*2, т. е.:

*Р(А/Н1)=1, Р(А/Н3)=0*

*Р(А/Н2)=1, Р(А/Н4)=0*

Предполагаем, что попадания охотников в медведя не зависят друг от друга. И получаем:

*Р(Н1*) = 0,3·(1 – 0,6) = 0,12;

*Р(Н2*) = 0,6·(1 – 0,3) = 0,42;

*Р(Н3*) = 0,3·0,6 = 0,18;

*Р(Н4*) = (1 – 0,3)(1 – 0,6) = 0,28.

Применяем формулу Байеса:

Р(Н1/А) =

Р(Н1/А) =

Р(Н2/А) =

Р(Н2/А) = .

Таким образом, при справедливом делении первый охотник должен получить шкуры, т.е. меньше четвертой час­ти шкуры, в то время как, на первый взгляд, казалось, что ему причитается шкуры (0,3).

**Ход работы:**

1. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна карта. Выяснить, являются ли независимыми события А и Б, если А – появился король, Б – вынута карта червовой или пиковой масти.

2. На столе лежат 4 синих и 3 красных карандаша. Редактор дважды наугад берет по одному карандашу и обратно их не кладет. Найти вероятность того, что: 1) вторым был взят красный карандаш при условии, что первым был синий; 2) вторым взят синий карандаш при условии, что первым оказался синий; 3) вторым взят синий карандаш при условии, что первым был красный; 4) вторым взят красный карандаш при условии, что первым также оказался красный карандаш.

3. В изготовленной партии детских мячей вероятность появления бракованного мяча равна 0,004. Произвольным образом в красный цвет окрашены всех мячей, а остальные мячи окрашены в синий. Какова вероятность того, что наугад вынутый мяч будет небракованным и красным?

4. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени по одному разу. Вероятности попадания в мишень для них равны соответственно 0,2; 0,5 и 0,4. Найти вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень.

5. В урне 2 белых, 3 красных и 5 черных шаров. Дважды вынимают по одному шару и возвращают их обратно в урну, Какова вероятность того, что: 1) первым вынут красный шар, а вторым - черный; 2) первым вынут черный шар, а вторым - белый?

6. Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий такова: Р1=0,75; Р2=0,8; Р3=0,85. Какова вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех этих орудий?

7. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

**Вариант 1**

1. На склад поступают одинаковые электрические утюги. Первый завод поставляет 80%, второй – 20% всей продукции. Известно, что первый завод выпускает 90% продукции первого сорта, второй – 95%. Какова вероятность того, что проданный покупателю утюг из наудачу выбранной партии первого сорта?

2.Два автомата производят одинаковые хирургические за­жимы. Производительность первого автомата вдвое больше, чем второго. Первый автомат производит в среднем 60% зажимов отличного качества, а второй — 84%. Наудачу взятый зажим оказался отличного каче­ства. Найти вероятность того, что он произведен пер­вым автоматом.

**Вариант 2**

1. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0, 075, на втором – 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найдите вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь нестандартная.

2. В пяти аптечках находятся одинаковые по массе и раз­мерам таблетки. В двух — по 6 зеленых и 4 желтых таб­леток. (Это аптечка состава Н1). В двух других аптечках (состава Н2) — по 8 зеленых и 2 желтых таблеток. В од­ной аптечке (состава Н3) — 2 зеленых и 8 желтых табле­ток. Наудачу выбирается аптечка и из нее извлекается таблетка, которая оказалась зеленой. Какова вероят­ность того, что зеленая таблетка извлечена из аптечки первого состава

2. Ответьте на контрольные вопросы

1) дайте классическое определение вероятности

2) приведите примеры областей, где применяется теория вероятности при исследовании каких-либо процессов.

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12**

**Название практической работы**: Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм.

**Цель работы:** Научиться вычислять характеристики дискретной случайной величины,строить гистограммы.

**знания** (актуализация):

основные понятия и методы теории вероятности и математической статистики;

**умения:**

вычислять характеристики дискретной случайной величины;

**Теоретическая часть:**

**1. Случайные величины**

*Случайная величина —* это величина, которая в результа­те испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно — заранее неизвестно).

*Дискретная случайная величина —* это случайная величи­на, когда принимает отдельное изолированное, счетное множество значений.

Случайные величины обозначаются конечными заглавны­ми буквами латинского алфавита *X, У, Z ,* а их значения — соответствующими строчными буквами *х, у, z.*

**2. Числовые характеристики дискретной случайной величины**

1. *Математическим ожиданием* М(Х); дискретной слу­чайной величины называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности: М(Х) =

**Пример 1**

Случайная величина Х задана законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *1* | *2* | *5* |
| *pi* | *0,3* | *0,5* | *0,2* |

*Решение: М(Х) = 1·0,3 + 2·0,5 + 5·0,2 = 2,3*

*2. Дисперсия* дискретнойслучайности величины. Слово «дисперсия» означает «рассеяние»:D(X) = M(X2) – (M(X))2, где M(X2)=

*Дисперсией D(х)*случайной величины называется мате­матическое ожидание квадрата ее отклонения от математи­ческого ожидания.

*Среднее квадратическоеотклонение* σ (стандартное от­клонение или стандарт) случайной величины *X —* это ариф­метическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

σ =

**Пример 2.** На пути движения автомашины 4 светофора, каждый из которых запрещает дальнейшее движение автомашины с вероятностью 0,5. Найти ряд распределения числа светофоров, пройденных машиной до первой остановки. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

*Решение:* Пусть X – дискретная случайная величина, равная числу светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки, она может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Случайная величина X принимает значение равное 0, если автомобиль попал на запрещающий сигнал на первом же светофоре, вероятность этого P(X=0)=0,5. Случайная величина X принимает значение равное 1, если автомобиль проехал на первом светофоре и попал на запрещающий сигнал на втором светофоре, вероятность этого P(X=1)= 0,5∙ 0,5=0,25.

Случайная величина X принимает значение равное 2, если автомобиль проехал на первом и втором светофоре и попал на запрещающий сигнал на третьем светофоре, вероятность этого P(X=2)= 0,5∙ 0,5∙0,5=0,125.

Случайная величина X принимает значение равное 3, если автомобиль проехал на первом, втором и третьем светофоре и попал на запрещающий сигнал на четвертом светофоре, вероятность этого P(X=3)=0,5∙0,5∙0,5∙0,5=0,54 =0,0625.

Случайная величина X принимает значение равное 4, если автомобиль проехал на всех 4 светофорах, вероятность этого P(X=4)=0,54=0,0625. Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| хi | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| рi | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0, 0625 | 0,0625 |

Расчеты произведены правильно, так как сумма ∑pi =1.

Математическое ожидание:

M(X)=∑ xi∙pi = 0∙0,5+1∙0,25+2∙0,125+3∙0,0625+4∙0,0625=0,9375.

Дисперсия: D(X) = =02∙0,5+12∙0,25+22∙0,125+32∙0,0625+42∙0,0625 - 0,93752 =1, 434.

**Пример 3.** Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте, построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения F(x) и построить ее график. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.

Решение: 1) Дискретная случайная величина X={число отказавших элементов в одном опыте} имеет следующие возможные значения: х1=0 (ни один из элементов устройства не отказал), х2=1 (отказал один элемент), х3=2 (отказало два элемента) и х4=3 (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы друг от друга, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима [формула Бернулли](http://www.ekonomika-st.ru/drugie/metodi/t-ver-1-4.html). Учитывая, что, по условию, n=3, р=0,1, q=1-р=0,9, определим вероятности значений:

P3(0)=С30p0q3-0 =q3 =0,93 =0,729;  
P3(1)=С31p1q3-1 =3\*0,1\*0,92 =0,243;  
P3(2)=С32p2q3-2 =3\*0,12\*0,9=0,027;  
P3(3)=С33p3q3-3 =р3=0,13 =0,001;  
Проверка: ∑pi = 0,729+0,243+0,027+0,001=1.

Таким образом, искомый биномиальный закон распределения Х имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Значения xi | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Вероятности pi | 0,729 | 0,243 | 0,027 | 0,001 |

2) Для построения многоугольника распределения строим прямоугольную систему координат.

|  |
| --- |
| график |

По оси абсцисс откладываем возможные значения хi, а по оси ординат – соответствующие им вероятности рi. Построим точки М1(0;0,729), М2(1;0,243), М3(2;0,027), М4(3;0,001). Соединив эти точки отрезками прямых, получаем искомый многоугольник распределения.

3) Найдем функцию распределения F(x) = Р(Х<х):

|  |
| --- |
| формула |

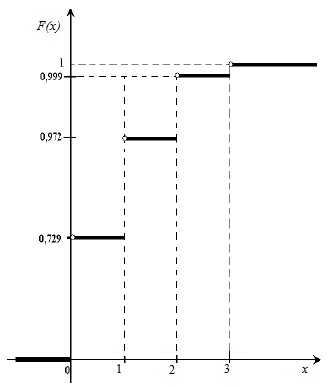
Для x≤0 имеем F(x)=Р(Х<0)=0;

для 0<x≤1 имеем F(x)=Р(Х<1)=Р(Х=0)=0,729;

для 1<x≤2 F(x)=Р(Х<2)=Р(Х=0)+Р(Х=1)=0,729+0,243=0,972;

для 2<x≤3 F(x)=Р(Х<3)=Р(Х=0)+Р(Х=1)+Р(Х=2)=0,972+0,027=0,999;

для х>3 будет F(x)=1, т.к. событие достоверно. Тогда график функции:



4) Для биномиального распределения Х: математическое ожидание М(X)=np=3\*0,1=0,3; дисперсия D(X)=npq=3\*0,1\*0,9=0,27; среднее квадратическое отклонение σ(X)=√D(X )=√0,27≈0,52.

**Ход работы:**

1. Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| хi | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Pi | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| хi | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Pi | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

A) Б)

2. В лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывался один выигрыш в 50 у.е. и десять выигрышей по 10 у.е. Найти закон распределения величины X – стоимости возможного выигрыша.

3. Вероятность того, что покупатель ознакомился заранее с рекламой товара равна 0,6 (р=0,6). Осуществляется выборочный контроль качества рекламы путем опроса покупателей до первого, изучившего рекламу заранее. Составить ряд распределения количества опрошенных покупателей.

4. Пусть задан закон распределения случайной величины X:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | 1 | 2 |
| P | 0,2 | 0,8 |

Найти её числовые характеристики.

5.Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 4 | 8 |
| *Р* | 0,3 | 0,1 | 0,6 |

Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

6. Составить закон распределения случайной величины Х - числа выпадений пятерки при трех бросаниях игральной кости. Вычислить M(X), D(X), σ(Х) этой величины.

2. Ответьте на контрольные вопросы

1) дайте определение дискретной случайной величине

2) назовите характеристики дискретной случайной величины

3) приведите примеры областей, где применяется теория математической статистики, при исследовании каких-либо процессов.

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

**Критерии оценивания практических работ**

* оценка «отлично» выставляется обучающемуся за работу, выполненную безошибочно, в полном объеме с учетом рациональности выбранных решений;
* оценка «хорошо» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в полном объеме с недочетами;
* оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (не менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы);

- оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы).

**3. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

Основная литература

- Григорьев В.П., Элементы высшей математики. ОИЦ «Академия», 2016.

Дополнительная литература

- Григорьев В.П., Сабурова Т.Н., Сборник задач по высшей математике, ОИЦ «Академия» 2014.

-Пехлецкий И.Д. Математика.- М: ОИЦ «Академия», 2015.

*Интернет - ресурсы*

* Электронно-библиотечная система ZNANIUM.COM Режим доступа: http://www.znanium.com/
* Электронно-библиотечная система "ЮРАЙТ" Режим доступа http://www. biblio-online. ru
* Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru/
* Информационные, тренировочные и контрольные материалы. Режим доступа: http:// www. fcior. edu. ru.
* Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. Режимдоступа: http:// www. school-collection. edu. ru.

**4. ПЕРЕЧЕНЬ СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ:**

* мультимедийное оборудование (мобильное) с лицензионным программным обеспечением;
* экран;
* таблицы:

№ 1 Таблица производных основных элементарных функций

№ 2 Таблица интегралов основных элементарных функций

**Приложение**

**Некоторые сведения из элементарной математики**

**Алгебра**

**Действия над многочленами**

**Действия над дробями**

**Формулы сокращённого умножения и деления**

**Действия со степенями**

**Действия с корнями**

**Комплексные числа**

Алгебраическая форма

Где *a* – действительная часть комплексного числа;

*b* – мнимая часть;

*i* – мнимая единица

Действия над комплексными числами

**Решение уравнений**

► Уравнение первой степени

*Решение:*

► Система двух уравнений первой степени

*Решение;*

► Квадратные уравнения - общего вида.

*Решение:*

Если , то корни действительные и равные, если , то действительные и неравные, если , то комплексно-сопряжённые.

– приведённое уравнение.

*Решение:*

**Теорема Виетта**

**Прогрессия**

►Арифметическая прогрессия:

где – n – й – член арифметической прогрессии;

d – разность прогрессии.

► Геометрическая прогрессия:

где – n – й – член геометрической прогрессии;

- знаменатель прогрессии.

**Логарифмы**

**Логарифм –** это показатель степени, в которую надо возвести данное основание, чтобы получить данное число.

=

**Десятичные логарифмы**

**Натуральные логарифмы**

На пример,

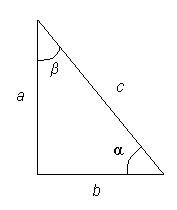
**Геометрия**

**А. Плоские фигуры**

*1. Равносторонний треугольник*

а – сторона, h – высота, S – площадь

*2. Прямоугольный треугольник*



*3. Квадрат*

a – сторона, d – диагональ, S – площадь

*4. Прямоугольник и параллелограмм*

a – основание,h – высота, S – площадь;

5. Ромб

D – большая диагональ, d – малая диагональ;

*5. Трапеция*

b – основание,h – высота;

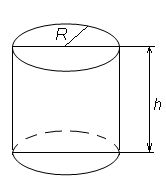
*6. Круг*

С – длина окружности, R – радиус,

d– диаметр, S – площадь.

**Б. Объёмы и поверхности**

*1. Цилиндр*



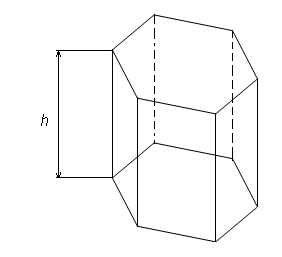
h - высота,

R- радиус основания,

V – объём,

- площадь боковой поверхности.

*2. Призма*



h - высота,

V – объём,

- площадь боковой поверхности.

p- периметр основания.

*3. Шар*

R – радиус, d – диаметр,

S – площадь поверхности, V – объем.

S=4πR2 = πd2; V = πR3 = d3.

**ТРИГОНОМЕТРИЯ.**

1. **Радианное измерение угла**

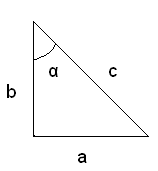
1 радиан =≈ 57º17;

1º = радиан = 0,0175 радиан;

1′=  радиан ≈ 0,00029 радиан.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Углы в  градусах  αº | 1º | 30º | 45º | 60º | 90º | 180º | 270º | 360º |
| Углы в  Радиа- нах  α1 рад | 0,0175 |  |  |  |  | π |  | 2π |

1. **Тригонометрические функции**



sinα = ;cosα = ; tgα = ; ctgα = .

**3. Значение тригонометрических функций**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | 0º | 30º | 45º | 60º | 90º | 120º | 180º | 270º | 360º |
| sinα | 0 |  |  |  | 1 |  | 0 | -1 | 0 |
| cosα | 1 |  |  |  | 0 |  | -1 | 0 | 1 |
| tgα | 0 |  | 1 |  | ∞ |  | 0 | ∞ | 0 |
| ctgα | ∞ |  | 1 |  | 0 |  | ∞ | 0 | ∞ |
| sesα | 1 |  |  | 2 | ∞ | -2 | -1 | ∞ | 1 |
| cosecα | ∞ | 2 |  |  | 1 |  | ∞ | -1 | ∞ |

**4. Основные тождества**

sin2α + cos2α =1; 1 + ctg2 α=cosec2 α;

tgα · ctgα =1; secα= ;

tgα =; 1 + tg2 α = = sec2 α.

ctgα =;

cosecα = 

**5. Формулаприведения**

sin (90º - α)= +cosα; cos (90º - α)= +sinα;

sin (90º + α)= +cosα; cos (90º + α)= -sinα;

sin (180º - α)= +sinα; cos (180º - α)= -cosα;

sin (180º -+α)= -sinα; cos (180º + α)= -cosα;

sin (270º - α)= -cosα; cos (270º - α)= -sinα;

sin (360º + α)= +sinα; cos (270º + α)= +sinα;

sin (270º + α)= -cosα; cos (360º - α)= +cosα;

sin (360º - α)= -sinα; cos (360º + α)= +cosα;

tg (90º- α)= +ctgα; сtg (90º- α)= +tgα;

tg (90º+ α)= -ctgα; сtg (90º+ α)= -tgα;

tg (180º- α)= -tgα; сtg (180º- α)= -сtgα;

tg (180º+ α)= +tgα; сtg (180º+ α)= +сtgα;

tg (270º- α)= +ctgα; сtg (270º- α)= +tgα;

tg (270º+ α)= -ctgα; сtg (270º+ α)= -tgα;

tg (360º- α)= -tgα; сtg (360º- α)= -сtgα;

tg (360º-+α)= +tgα; сtg (360º+ α)= +сtgα.

**6. Формула сложения и вычитания**

sin (α ± β)= sinα · cosβ ± cosαsinβ**;**

cos (α ± β)= cosα · cosβ ± sinαsinβ**;**

tg (α ± β)= (tgα ± tgβ) ÷ ( 1 ± tgαtgβ)**;**

ctg (α + β)= (ctgαctgβ ±1) ÷ (ctgβ ± ctgα)**;**

sinα + sinβ= 2sin · cos;

sinα - sinβ= 2cos · sin;

cosα + cosβ= 2cos · cos;

cosα - cosβ= -2cos · sin;

tgα ± tgβ = ;

ctgα ± ctgβ = ;

sin2α – sin2β = cos2β – cos2α = sin(β ± α)· sin(α – β);

cos2α – sin2β = cos2β – sin2α = cos(β + α)· cos(α – β).

**7. Формула преобразования произведения**

sinα · sinβ = ;

cosα · cosβ = ;

sinα · cosβ = ;

tgα · tgβ = (tgα + tgβ) ÷ (ctgα + ctgβ) = -(tgα – tgβ) ÷ (ctgα – ctgβ);

ctgα · tgβ = (ctgα + tgβ) ÷ (tgα + ctgβ) = -(ctgα – tgβ) ÷ (tgα – ctgβ);

ctgα · tgβ = (ctgα + ctgβ) ÷ (tgα + tgβ) = -(ctgα – ctgβ) ÷ (tgα – tgβ).

**8. Формула двойных, тройных и половинных углов**

sin2α = 2sinα · cosα;

sinα = 2sin · cos;

sin3α = 3sinβ – 4sin3α;

cos2α = cos2α – sin2α = 1-2sin2α = 2cos2α – 1;

cos3α = 4cos3α – 3cosα;

tg2α = = ;

tgα = ;

tg3α=  ;

ctg2α = = ;

ctgα = ;

ctg3α = ;

sin = ±;

cos = ±;

tg =  =  = ±;

ctg =  =  = ±;

sinα = ;

cosα = ;

cosα ± sinα = .

**9. Степени синуса и косинуса**

2sin2α = 1 – cos2α;

2cos2α = 1 + cos2α;

2sin2= 1 – cos2α;

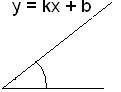
2cos2= 1 + cos2α;

4sin3α = 3sinα - sin3α;

4cos3α = 3cosα - cos3α;

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ**

1. Линейная функция



Уравнение прямойy = kx + b,

где k и b- некоторые действительные

числа.

tg α = k- угловой коэффициент

прямой.

2. Квадратная функция

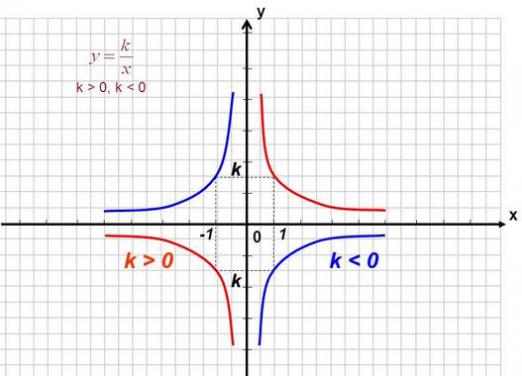
y = ax2 + bx + bc,гдеa, b, c, - некоторые действительные числа.

y = ax2.



График этой функции – парабола.

1. y= . График этой функции – гипербола

****

**Таблица производных основных элементарных функций и производных сложных функций**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | **y=*f*** |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | = |  |  |
|  | = |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | = |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Таблица основных дифференциалов функции**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | d |
|  |  |
|  |  |

**Таблица интегралов**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | ∫f(x)dx= F(x)+c | F'(x)= f(x) | ∫f(u)du= F(u) + C |
| 2 | ∫0dx= C | C'= 0 | ∫0du= C |
| 3 | ∫dx= x + C | (x + C)' = 1 | ∫du= x + C |
| 4 | ∫xdx= - С | = x | ∫udu =  + C |
| 5 | ∫xa dx=  + C |  | ∫цadu = |
| 6 | ∫a′dx = |  | ∫andu = |
| 7 | ∫a'dx= c' + C | (e')' = c' | ∫e' du = e' + C |
| 8 | ∫sin xdx = -cosx + C | (-cosx)' = sinx | ∫sin udu= -cosu + C |
| 9 | ∫cosxdx= sinx + C | (sinx)' = cosx | ∫cosudu= sinu + C |
| 10 | ∫= -ctg + C | (-ctgx)′ = | ∫ |
| 11 | ∫ = lgx + C | (lgx)′ = | ∫ = lgu + C |
| 12 | ∫ = ln‌‌│x│+ C | (ln│x│)′ = | ∫ = ln│u│+ C |
| 13 | ∫ | (arcsin x )′ =  (-arccos x)′ = | ∫ = |
| 14 | ∫= arcsin |  | ∫ |
| 15 | ∫ | (arctgx)′ =  (-arcctgx)′ = | ∫ |
| 16 | ∫ |  | ∫ |
| 17 | ∫=ln│x+│+C | (ln│x +│)′ = | = ln│u +│+ C |
| 18 | = ln││+ C |  |  |

**Площадь криволинейной трапеции**

