Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**МАТЕМАТИКА**

**Методические рекомендации**

**по выполнению практических работ**

для студентов специальности

**38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет**

(по отраслям)

Челябинск, 2018

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методические рекомендации составлены в соответствии с программой учебной дисциплины «Математика», | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  Комиссией ЕМД  протокол № 2  «04» октября 2018 г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/ Макаренко О.И / | УТВЕРЖДАЮ  Зам. директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2018 г. |

**Автор:** Макаренко О.И, преподаватель Южно-Уральского государственного технического колледжа

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (ФГОС 2018).

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Методические рекомендации предназначены для организации выполнения практических работ по учебной дисциплине «Математика».

Программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 12 практических работ, направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 3 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 4 Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 11. Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере.

***умений*:**

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

**обобщение, систематизацию, углубление и закрепление *знаний*:**

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;

- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;

- основы интегрального и дифференциального исчисления.

В методических указаниях к выполнению практических работ содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая практическая работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий.

**Ход выполнения практической работы**

Практические работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

*Ход работы:*

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. В тетрадях для практических работ выполнить самостоятельную работу или решить номера, которые указаны в работе.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

**Критерии оценивания практических работ**

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

**Перечень практических работ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № работы | Наименование практических работ | Кол-во  часов |
|  | Выполнение операций над комплексными числами в различных формах. | 2 |
|  | Вычисление ранга матрицы. |  |
|  | Решение систем линейных уравнений различными методами | 2 |
|  | Раскрытие различных неопределённостей | 2 |
|  | Вычисление производных сложных функций и высших порядков | 2 |
|  | Исследование функции с помощью производной. | 2 |
|  | Вычисление неопределённых интегралов | 2 |
|  | Вычисление определённых интегралов. Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур | 2 |
|  | Решение дифференциальных уравнений | 2 |
|  | Решение вероятностных задач. | 2 |
|  | Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм. | 2 |
|  | Решение задач линейного программирования графическим методом | 2 |
| ВСЕГО | | 24 |

**Практическая работа № 1**

***Выполнение операций над комплексными числами в различных формах.***

**Цель работы:**

Научиться выполнять операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

**Знания**:

1. Понятие комплексного числа.

**Умения:**

1. Выполнение операций над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

2. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

**Содержание работы:**

Число вида , где - действительные числа, а*i*- мнимая единица, определяемая равенством: , называется *комплексным числом*.- действительная часть комплексного числа, - мнимая часть комплексного числа.

Модулем комплексного числа :

Числа и называются *сопряженными.*

Для того, чтобы *сложить или вычесть* два комплексных числа в алгебраической форме нужно соответственно сложить или вычесть их действительные и мнимые части.

*Пример:* Найти сумму и разность чисел:

Для того, чтобы *умножить* два комплексных числа в алгебраической форме нужно перемножить их как многочлены и учесть при этом, что .

*Пример:* Найти произведение чисел:

Для нахождения частного комплексных чисел и сначала числитель и знаменатель дроби умножают на сопряженное знаменателю число, а затем производят остальные действия.

*Пример:* Найти частное чисел:

=

Запись комплексного числа в виде называется алгебраической формой записи комплексного числа. Часто бывает удобна другая форма записи комплексного числа. Пусть и. Тогда по определению аргумента имеем:

|  |
| --- |
|  |

Отсюда получается

Такая форма называется тригонометрической формой записи комплексного числа. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

*Пример:*Записать число в тригонометрической форме.

Найдём модуль этого числа: Аргумент данного числа находится из системы

Значит, один из аргументов числа равен .

Получаем: .

Умножение, деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме определяются следующим образом:

если , , то

1) ;

2) ;

если , , то

3) ;

4) .

В ответ записываются главные значения аргумента полученного результата, заключенные в промежутке .

*Пример:*Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:

а) б) ; в) , если

а)

б)

в)

*Пример:* Найти

Представим в тригонометрической форме – 16:

Найдём модуль этого числа: Аргумент данного числа находится из системы

Значит, один из аргументов числа равен .

Получаем: .

Найдем корень: *=*

Найдем различные корни:

**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| 1. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел | | |
|  |  |  |
| 2. Вычислить | | |
|  |  |  |
| 3. Определить, при каких действительных значениях*x*и*y*комплексные числа и будут равны | | |
|  |  |  |
| 4. Решить уравнение | | |
|  |  |  |
| 5. Решить уравнение | | |
|  |  |  |
| 6. Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:  а) б) ; в) | | |
| *n=3* | *n=3* | *n=6* |
| 7. Выполнить действия в тригонометрической форме и представить результат в тригонометрической и алгебраической формах | | |
|  |  |  |
| 8. Найти значения корней | | |
|  |  |  |

**Практическая работа № 2**

***Вычисление ранга матрицы***

**Цель работы:**

1. Научиться вычислять ранг матрицы.

**Знания**

1. Понятие ранга матрицы.
2. Методы вычисления ранга матрицы.

**Умения:**

1. Вычисление ранга матрицы.

**Содержание работы:**

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Пусть в матрице A размера m×nвыбраны произвольно k строк и k столбцов (k≤min(m,n)). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, [определитель](http://mathportal.net/index.php/linejnaya-algebra/vychislenie-opredelitelej-minori-algebraicheskie-dopolneniya-rang-matritsy) которой называется минором k−го порядка матрицы A.

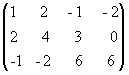
Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A **называется ее рангом**, а любой минор порядка r, отличный от нуля - базисным минором.

**Основные методы вычисления ранга матрицы:**

**Метод окаймляющих миноров.** Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры (k+1)− го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор (k+1)−го порядка, и вся процедура повторяется.

**Метод элементарных преобразований** основан на том, что элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга. Используя эти преобразования матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы кроме a11,a22,...,arr (r≤min(m,n)), равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r.

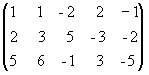
*Пример 1.* Найти методом окаймления миноров ранг матрицы

.

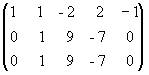
*Решение.* Начинаем с миноров 1-го порядка, т.е. с элементов матрицы А. Выберем, например, минор (элемент) М1 = 1, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор , отличный от нуля. Переходим теперь к минорам 3-го порядка, окаймляющим М2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый). Вычисляем их:. Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы А равен двум.

*Пример 2* Найти ранг матрицы.

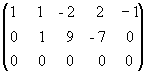
*Решение.* Из второй строки вычтем первую и переставим эти строки:

.

Теперь из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5:

;

из третьей строки вычтем первую; получим матрицуB:

,

которая эквивалентна матрице А, так как получена из нее с помощью конечного множества элементарных преобразований. Очевидно, что ранг матрицы В равен 2, а следовательно, и r(A)=2.

**Задания для самостоятельной работы**

*Вычислить ранг матрицы:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант № 1 | Вариант № 2 | Вариант № 3 |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Практическая работа № 3**

***Решение систем линейных уравнений различными методами***

**Цель работы:**

1. Научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.
2. Научиться решать системы линейных уравнений матричным методом.
3. Научиться решать системы уравнения методом Гаусса.

**Знания**:

1. Понятие системы линейных уравнений.
2. Матричный метод и метод Крамера.
3. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.

**Умения:**

1. Решение систем линейных уравнений матричным методом и методом Крамера.

2. Решение систем линейных уравнений матричным методом Гаусса.

**Содержание работы:**

Системой из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными называется система вида: (1)

1. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений:



где , 

*Пример*: Решить систему методом Крамера

Вычисляем определители системы:

,

,

,

.

Чтобы получить определитель , мы заменили в определителе первый столбец на столбец из свободных членов; заменяя в определителе  2-ой столбец на столбец из свободных членов, получаем ; аналогичным образом, заменяя в определителе  3-ий столбец на столбец из свободных членов, получаем . Решение системы:

.

*Ответ: (1; 0; -1)*

2. Запишем систему (I) в матричном виде , тогда решение ищем в виде:  (при условии, что матрица А- невырожденная, т.е. ).*Пример:*Решить систему с помощью обратной матрицы.

Обозначим 



Найдем матрицу 

, , ,

,  , ,

, , ,

, тогда 

*Ответ:(1; 0; -1)*

3. Процесс решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Гаусса состоит из двух этапов.

*Первый этап* (прямой ход метода) – система приводится к треугольному виду.

*Второй этап* (обратный ход) – неизвестные определяются последовательно, начиная с последнего неизвестного и заканчивая первым.

*Пример:* Решить систему: 

Решение:

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

~~~

полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем, ранг матрицы системы также равен трем, r(A)=3 и число неизвестных n=3, следовательно, система определенная, т.е. имеет единственное решение.

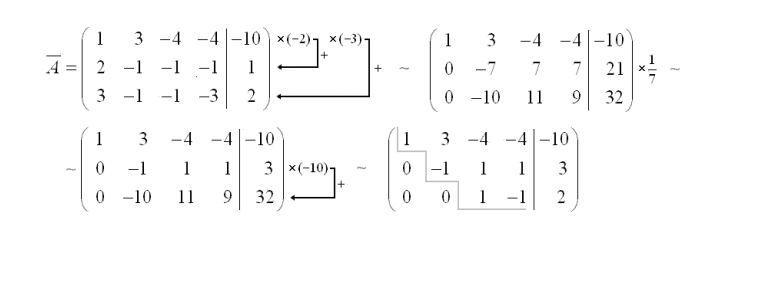
2. Записываем уравнение, используя последнюю строку приведённой матрицы: *z=1.*

Из второй строки: *5y-7z = -7,* т.к*. z=1, то y= 0.*Из третьей строки: *x- 2y +4z=3,* т.к*.z =1 y = 0,* то*x = 1.*

*Ответ: (-1,0,1)*

*Пример:*Решить систему: 

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:



полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем, ранг матрицы системы также равен трем, r(A)=3. Поскольку ранг рассмотренных матриц равен 3, а число неизвестных переменных 4, т. е. r=3< n= 4, то делаем вывод о неопределенности данной системы линейных уравнений (т.е. система имеет бесконечное множество решений).

Базисными переменными будут (соответствующие этим переменным коэффициенты находятся в уголках ступенек треугольной матрицы), а переменная будет свободной. Пусть , тогда

из третьей строки приведённой матрицы: 

из второй строки:

из первойстроки:



Ответ: *(2С+1; 2С-1; С+2; С), СR*

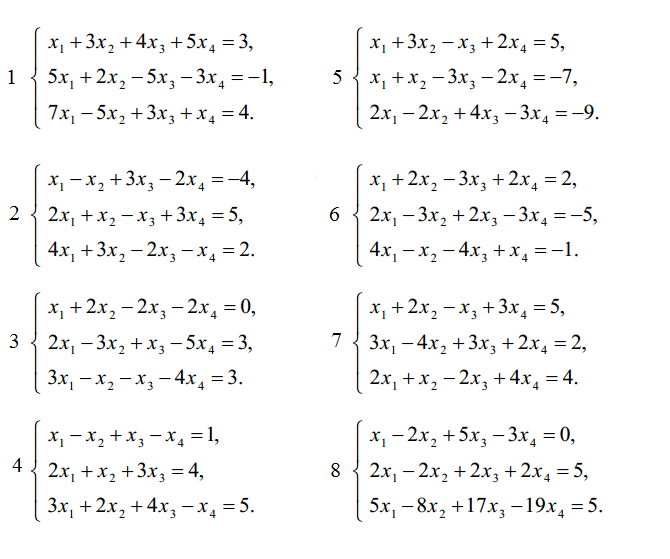
**Задания для самостоятельной работы:**

Решить систему: а) методом Крамера; б) методом обратной матрицы;

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 

10) 

Рнешить систему методом Гаусса:

****

**Практическая работа № 4**

***Раскрытие различных неопределённостей***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять пределы с различными видами неопределённостей.

**Знания**(актуализация):

1. Определения предела функции.

**Умения:**

1. Вычисление пределов функций: раскрытие неопределённостей вида .

**Содержание работы:**

***Типы неопределённостей и их виды***

*1 тип Неопределённость вида в пределе*

*Примеры:*

*1)*(т.к. старшие степени числителя и знаменателя равны, то делим коэффициенты при старших степенях *х*).

*2)*(т.к. старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя)

*2 тип Неопределённость вида в пределе*

Для раскрытия неопределённости необходимо либо разложить числитель и знаменатель на множители, либо умножить выражение содержащее корни на сопряжённое.

*Примеры:*

1)

2)==

*3 тип I-ый замечательный предел и основные эквивалентности:*

При ***х→0*** имеют место следующие неопределённости:

*Примеры:*

*4 тип II -ой замечательный предел*

*Примеры:*

**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Вариант 1* | *Вариант 2* | *Вариант 3* |
| **«3»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| д) | д) | д) |
| **«4»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| д) |  |  |
| **«5»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| д) | д) |  |

**Практическая работа № 5**

***Вычисление производных сложных функций и высших порядков***

**Цель работы:**

Проверить умения нахождения производной сложной функции.

**Знания**:

1. Определение производной и её свойства.

2. Понятие сложной функции.

3. Формула вычисления производной сложной функции.

**Умения:**

1.Вычисление производной заданной сложной функции.

**Содержание работы:**

***Таблица производных основных элементарных функций:***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

***Основные правила нахождения производной:***

; ; ; ; ; .

***Производная сложной функции***

Если  и , то- сложная функции, тогда её производная вычисляется по формуле, то есть . Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: *производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.*

*Примеры:*

1.Найти производную сложной функции:*.*

Положим , где получим:

2. .Найти производную сложной функции:*.*

Положим , получим:

**Задания для самостоятельной работы:**

Вычислите производные сложных функций:

Вариант 1

1) 2) 3) 4) 5)

Вариант 2

1) 2) 3) 4) 5)

Вариант 3

1) 2) 3) 4) 5)

Вариант 4

1) 2) 3) 4) 5)

Вариант 5

1) 2) 3) 4) 5)

**Практическая работа № 6**

***Вычисление неопределённых интегралов***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить неопределенный интеграл с помощью замены переменных.

**Знания**:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

**Умения:**

1. Вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования.

2. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменной

**Содержание работы:**

***Таблица интегралов***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1.  2.  3.  4.  5.  6. | 7.  8.  9.  10.  11.  12. | 13.  14.  15.  16. |

**Непосредственное интегрирование** – это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов. Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

* 1. деление числителя на знаменатель почленно;
  2. применение формул сокращенного умножения;
  3. применение тригонометрических тождеств.

*Пример 1.* Найти интеграл 

*Решение.*



*Пример 2.* Найти интеграл 

*Решение*. Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель.



*Пример 3.* Найти интеграл 

*Решение*. Возводим в куб и интегрируем каждое слагаемое.





*Пример 4.* Найти интеграл 

*Решение*. Разлагаем подынтегральную дробь на две слагаемых дроби, деля числитель почленно на знаменатель.



*Пример 5.*Найти интеграл 

*Решение*. Выделим в неправильной дроби целую часть и правильную дробь.





**Метод замены переменной (метод подстановки)**

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегри­рования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого ме­тода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный инте­грал сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегри­рованием.

*Пример 6.*Вычислить

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

*Пример 7.* Вычислить

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

*Пример 8.* Вычислить

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Вариант 1* | *Вариант 2* | *Вариант 3* |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Практическая работа № 7**

***Вычисление определённых интегралов. Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур***

**Цель работы:**

1. Научиться вычислять определённые интегралы.

2. Познакомиться с понятием криволинейной трапеции

3. На конкретных примерах научиться находить площадь криволинейной трапеции

**Знания**:

1. Понятие определённого интеграла.

2. Свойства определённого интеграла.

3. Основные методы вычисления определённых интегралов.

4. Понятие криволинейной трапеции

5. Методы вычисления площади криволинейной трапеции

**Умения:**

1. Вычисление определённых интегралов.

2. Вычисление площади криволинейной трапеции

**Содержание работы:**

Для вычисления определённого интеграла от функции *f(x)*в том случае, когда можно найти соответствующий неопределённый интеграл *F(x)*, служит формула Ньютона-Лейбница: **.**

*Пример:*

*Интегрирование по частям в определённом интеграле:*

*Пример:*

*Замена переменной в определённом интеграле:*

*Пример:*

Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:

|  |  |
| --- | --- |
| y=y(x)  a  b  X  Y  **Рис.1** | * сверху - графиком непрерывной функции *y=y(x)* * снизу – осью OX (*y=0*) * слева – прямой *x=a* * справа – прямой*x=b* |

Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

 (1)

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

*Пример 1*. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: , x=-1, x=2 и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

|  |  |
| --- | --- |
| **2**  **-1**  X    Y  Рис. 2 | Ответ: 6 кв.ед. |

Пусть y=f(x) – непрерывная функция при x[a, b], график которой расположен ниже оси OX (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 3  **y=f(x)**  X  Y  **a**  **b** | (2) |

*Пример 2*. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 4  Y  X  2  3 | Ответ: 1/6 кв.ед. |

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций и .

Решение: данная фигура (рис. 5)представляет собой разность криволинейных трапеций

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: x1=-2 и x2=1.

. Можно записать под один интеграл:

|  |  |
| --- | --- |
| Y  Рис. 5  X  -2  1  ***y=-x+3*** | Ответ: 4,5 кв.ед. |

*Пример 4*. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций и , и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций S=S1+S2, где  и . Получим формулу:

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 6  X  0  1  ***y=-x+3***    3 | Ответ: кв.ед. |

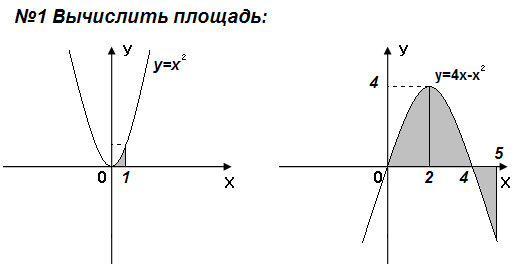
**Задания для практической работы:**

*Задание 1 Вычислить определённые интегралы:*

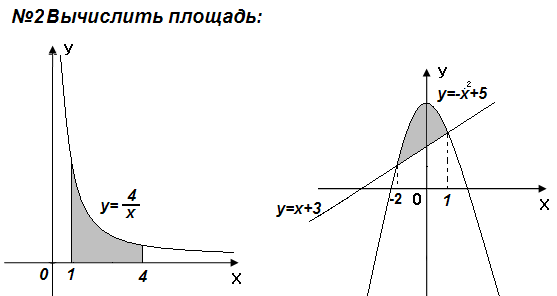
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

*Задание 2 Вычислить площади фигур*

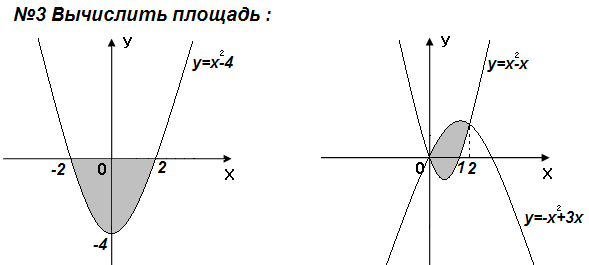
Вариант 1

****

Вариант 2

****

Вариант 3

****

**Практическая работа № 8**

***Решение дифференциальных уравнений***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения

**Знания**:

1. Понятие дифференциального уравнения.

2. Виды дифференциальных уравнений первого и второго порядков и методы их решения.

**Умения:**

1. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, линейных и однородных.

2. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка

**Содержание работы:**

Дифференциальное уравнение называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

 или 

*Пример1*.Найти решение дифференциального уравнения

Подставим в уравнение, тогда⇒⇒

⇒⇒⇒⇒–общее решение

Решим задачу Коши: при : ⇒ 2= *С,* отсюда *частное решение:*

*Пример 2.*Решить уравнение 

Дифференциальное уравнение вида называется **однородным**, если его правая часть

*f(x, y)*есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т.е.

*Пример 3*.Решить уравнение .

Введем вспомогательную функцию.

Отметим, что введенная нами функция *u*всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее .

Подставляем в исходное уравнение: 

Разделяем переменные: 

Интегрируя, получаем: 

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции у, получаем общее решение:

Любое уравнение вида  является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)*– однородные функции одинакового измерения.

Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:



при этом, если правая часть *Q(x)*равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)*неравна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию *y*заменить произведением двух вспомогательных функций *u=u(x)* и*v=v(x)*, т.е. положить *y=uv,* тогда .

*Пример 4*Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Будем искать решение в виде .

Тогда уравнение примет вид: . Сгруппируем второе и третье слагаемые и вынесем *u*за скобки:. Подберём функцию *v* так, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль, т.е.

Подставляя это частное решение в исходное уравнение получим:

Итак, общее решение исходного уравнения**:**

**Однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами** называется уравнение: . Для отыскания общего решения этого уравнения составляют характеристическое уравнение: , которое получается из исходного уравнения заменой производных искомой функции соответствующими степенями *k,* причем сама функция заменяется единицей.

Тогда общее решение уравнение строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *D>0*  корни действительные и различные | *D=0*  корни действительные и равные | *D<0*  корни комплексные |
| Общее решение дифференциального уравнения записывается в виде: | | |
|  |  |  |

*Пример 5.* Решить уравнение 

Характеристическое уравнение: 

Общее решение: 

*Пример 6* Решить уравнение 

Характеристическое уравнение: 



Общее решение: 

*Пример 7.* Решить уравнение

Характеристическое уравнение: 

Общее решение:

**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| 1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция: | | |
|  |  |  |
| 2. Решите уравнение с разделяющими переменными | | |
|  |  |  |
| 3. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию | | |
| у(0)=2 | у(0)=1 |  |
| 4. Решите однородное дифференциальное уравнение | | |
|  |  |  |
| 5. Решите линейное дифференциальное уравнение | | |
|  |  |  |
| 6. Решите уравнения 2го порядка | | |
| а)  б)  в)  г)  д) | а)  б)  в)  г)  д) | а)  б)  в)  г)  д) |

**Практическая работа № 9**

***Решение вероятностных задач***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять вероятности случайных событий.

**Знания**:

1. Понятие случайного события.

2. Классическое определение вероятности.

**Умения:**

1. Вычисление вероятности случайного события с применением комбинаторных формул.

**Содержание работы:**

**1. Размещения**

Рассмотрим простейшие понятия, связанные с выбором и расположением некоторого множества объектов.

Подсчет числа способов, которыми можно совершить эти действия, часто производится при решении вероятностных задач.

*Определение.* Размещением из *n* элементов по *k*(*k*≤*n*) называется любое упорядоченное подмножество из *k*элементов множества, состоящего из *n*различных элементов.

*Пример*. Следующие последовательности цифр являются размещениями по 2 элемента из 3 элементов множества {1;2;3}: 12, 13, 23, 21, 31, 32.

Заметим, что размещения отличаются порядком входящих в них элементов и их составом. Размещения 12 и 21 содержат одинаковые цифры, но порядок их расположения различен. Поэтому эти размещения считаются разными.

Число различных размещений из *n* элементов по *k* обозначается и вычисляется по формуле: , гдеn! = 1∙2∙...∙(n- 1)∙n(читается «n– факториал»).

**2. Перестановки**

*Определение.* Перестановками из*n*элементов называются такие размещения из*n*элементов, которые различаются только расположением элементов.

Число перестановок из*n*элементов*Pn*вычисляется  по формуле:*Pn*=*n*!

*Пример.*Сколькими способами могут встать в очередь 5 человек? Количество способов равно числу перестановок из 5 элементов, т.е. *P*5=5!=1∙2∙3∙4∙5=120.

**3. Сочетания**

*Определение.* Сочетаниями из*n*элементов по*k*называются такие размещения из*n*элементов по*k*, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число различных сочетаний из*n*элементов по*k*обозначается вычисляется по формуле:.

По определению 0!=1.

Для сочетаний справедливы следующие свойства:

1. C:\Users\Пользователь\Pictures\MP Navigator\636.gif
2. C:\Users\Пользователь\Pictures\MP Navigator\637.gif
3. C:\Users\Пользователь\Pictures\MP Navigator\638.gif
4. C:\Users\Пользователь\Pictures\MP Navigator\639.gif

*Пример.*Имеются 5 цветков разного цвета. Для букета выбирается 3 цветка. Число различных букетов по 3 цветка из 5 равно: .

**4. События**

Познание действительности в естественных науках происходит в результате испытаний (эксперимента, наблюдений, опыта).

*Испытанием*или опытом называется осуществление какого-нибудь определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

*Случайным*называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).

Таким образом, событие рассматривается как результат испытания.

*Пример.*Бросание монеты – это испытание. Появление орла при бросании – событие.

Наблюдаемые нами события различаются по степени возможности их появления и по характеру их взаимосвязи.

Событие называется*достоверным*, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.

*Пример.*Получение студентом положительной или отрицательной оценки на экзамене есть событие достоверное, если экзамен протекает согласно обычным правилам.

Событие называется*невозможным*, если оно не может произойти в результате данного испытания.

*Пример.*Извлечение из урны белого шара, в которой находятся лишь цветные (небелые) шары, есть событие невозможное. Отметим, что при других условиях опыта появления белого шара не исключается; таким образом, это событие невозможно лишь в условиях нашего опыта.

Далее случайные события будем обозначать большими латинскими буквами A,B,C... Достоверное событие обозначим буквой Ω, невозможное – Ø.

Два или несколько событий называются*равновозможными*в данном испытании, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным или менее возможным, чем другие.

*Пример.*При одном бросании игральной кости появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков - все это события равновозможные. Предполагается, конечно, что игральная кость изготовлена из однородного материала и имеет правильную форму.

Два события называются*несовместными*в данном испытании, если появление одного из них исключает появление другого, и*совместными*в противном случае.

*Пример.*В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Беремна удачу одну деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. Эти события несовместные.

Несколько событий образуют*полную группу событий*в данном испытании, если в результате этого испытания обязательно наступит хотя бы одно из них.

*Пример.*События из примера образуют полную группу равновозможных и попарно несовместных событий.

Два несовместных события, образующих полную группу событий в данном испытании, называются противоположными событиями.

Если одно из них обозначено через*A*, то другое принято обозначать через(читается «не*A*»).

*Пример.*Попадание и промах при одном выстреле по цели - события противоположные.

**5. Классическое определение вероятности**

*Вероятность события*– численная мера возможности его наступления.

Событие*А*называется*благоприятствующим*событию*В*, если всякий раз, когда наступает событие*А*, наступает и событие*В*.

События*А*1,*А*2, ...,*Аn*образуют*схему случаев*, если они:

1) равновозможны;

2) попарно несовместны;

3) образуют полную группу.

В схеме случаев (и только в этой схеме) имеет место классическое определение вероятности*P*(*A*) события*А*. Здесь случаем называют каждое из событий, принадлежащих выделенной полной группе равновозможных и попарно несовместных событий.

Если*n*– число всех случаев в схеме, а*m*– число случаев, благоприятствующих событию*А*, то*вероятность событияА*определяется равенством:

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице.

2. Вероятность невозможного события равна нулю.

3. Вероятность случайного события есть положительное число,заключенное между нулем и единицей0 ≤*P(A)*≤ 1.

**6. Операции над событиями. Теорема сложения вероятностей**

Суммой, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий (в одном и том же испытании).

*Пример*. Бросаются две игральные кости. Пусть событие*А*состоит в выпадении 4 очков на 1 кости, а событие*В*– в выпадении 5 очков на другой кости. События*А*и*В*совместны. Поэтому событие*А*+*В*состоит в выпадении 4 очков на первой кости, или 5 очков на второй кости, или 4 очков на первой кости и 5 очков на второй одновременно.

*Пример*.Событие*А*– выигрыш по 1 займу, событие*В*– выигрыш по 2 займу. Тогда событие*А+В*– выигрыш хотя бы по одному займу (возможно по двум сразу).

Произведениемили пересечением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий (в одном и том же испытании).

Пример.События*А*и*В*состоят в успешном прохождении I и II туров соответственно при поступлении в институт. Тогда событие*А×В*состоит в успешном прохождении обоих туров.

Теорема. Если события*Ai*(*i*= 1, 2, …,*n*) попарно несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий:

*Р*(*А*1+*А*2) =*Р*(*А*1) +*Р*(*А*2)

Если события*А*1и*А*2 совместны, то вероятность суммы двух совместных событий равна:*Р*(*А*1+*А*2) =*Р*(*А*1) +*Р*(*А*2) – Р(*А*1×*А*2).

**8. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей**

Условной вероятностью*Р(В*/*А*) называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже наступило.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

*Р(А*∙*В) = Р(А*)∙Р(*В*/*А*).

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого, т.е.*Р(А) = Р(А/В*)

Если события*А*и*В*независимы, то*Р(А*∙*В) = Р(А*)∙*Р(В*).

**Задания для самостоятельной работы:**

*1.* В коробке находятся *m+2* синих, *n+3* красных и *2n+1* зеленых карандашей. Одновременно вынимают *m+3n+2* карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет *m+1* синих и *n+1* красных.

2. В первой урне находятся *m+2* шаров белого и *n* шаров черного цвета, во второй — *m+n* белого и *m* синего, в третьей — *n+3* белого и *m+1* красного цвета. Из первой и второй урны наудачу извлекают по одному шару и кладут в третью. После этого из третьей вынимают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень при одном выстреле равна . Производится *n+4* выстрела. Найти вероятность того, что он промахнется не более двух раз.

4. Каждый избиратель независимо от остальных избирателей, отдаёт свой голос за кандидата А с вероятностью 0,1(m+n) и за кандидата В – с вероятностью 1-0,1(m+n). Оценить вероятность того, что в результате голосования на избирательном участке (5000 избирателей) один из

кандидатов опередит другого:

а) ровно на 1900 голосов; б) не менее, чем на 1900 голосов

Таблица 1 (выбор параметра *т*)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *т* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Таблица 2 (выбор параметра *п* )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| В | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | **7** | 8 | 9 |
| *п* | 3 | 5 | 4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 1 | 3 | 2 |

**Практическая работа № 10**

***Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм***

**Цель работы:**

Научиться строить статистический ряд выборки и гистограммы.

**Знания**:

1. Понятие о выборочном исследовании.

2. Понятие о представлении статистических данных.

**Умения:**

1. Построение статистического ряда и гистограммы.

**Содержание работы:**

**Предмет** математической статистики составляют разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данный, получаемых в результате наблюдения случайных явлений.

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных, т.е. результатов наблюдения.

В математической статистике рассматривают две основных задачи:

1. Первая задача состоит в том, чтобы указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате поставленных экспериментов
2. Состоит в разработке методов анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка параметров распределения, вид которого неизвестен; оценка зависимой случайной величины от одной или нескольких случайных величин

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого неизвестен.

Изучение тех или иных явлений методами математической статистики служат решение многих вопросов, выдвигаемых наукой и практикой правильная организация технологического процесса наибольше целесообразное планирование и прочее.

И так, основная задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

**Генеральная и выборочная совокупность**.

Совокупность всех объектов, подчинённых данному признаку, называется **генеральной совокупностью**. Число таких объектов называется **объёмом генеральной совокупности.**

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторых качественных или количественных признаков, характеризующие эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественными признаками может служить стандартность деталей, а количественным - контролируемый размер детали.

Обычно из всей совокупности отбирают ограниченное число объектов, которое изучают такую случайно отобранную совокупность, называют **выборочной совокупностью** или **выборкой.**

Выборка, достаточно хорошо описывающая всю генеральную совокупность, называется **репрезентативной.** Для того, чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке, необходимо, чтобы

объекты выборки правильно его представляли, т. е. выборка должна быть репрезентативной ( представительной).

Для получение репрезентативной выборки необходимо ,чтобы все отображённые элементы имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. В случае большого объёма генеральной совокупности используют таблицу случайных чисел. Например, чтобы выразить 20объектов из пронумерованной генеральной совокупности можно записать 20 случайных чисел.

Элементы х1, х2,.. хnслучайно попавшие в выборку называются вариантами, а их кол-во n – объем выборки. Отобранные элементы располагают в порядке возрастания. Такая последовательность называется вариационным рядом.

Разность между максимальным и минимальными элементами называется **размахом выборки.**

Среди n-элементов выборки могут быть встречаться повторяющиеся.

Например х1 – n1 раз, х2 – n2 раз; хn – nn раз. Числа n1, n2, nn называются частотами вариант.

Расположенное в порядке возрастания вариант последовательность пар чисел, составленная из вариант и их частот (х1;n1), (x2;n2) называется статистическим рядом или статистическим распределением. При этом пользуются табличной записью:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| xi | x1 | x2 | …. |
| ni | n1 | n2 | …. |

**Пример**: записать вариационный ряд и статистическое распределение выборки из числа учебных дней в году, пропущенных по болезни студентами. Определить размах выборки:

5,0,3,7,0,1,0,5,0,5,2,10,2,0,7,2,4,7,7,4

1. Найдем объем выборки: n=20
2. Запишем вариационный ряд:

0,0,0,0,0,2,2,2,3,4,4,5,5,5,7,7,7,7,10,10

1. Запишем статистическое распределение:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 10 |
| ni | 5 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 |

1. Определим размах выборки: Z=10-0=10

При большом объеме выборки для упрощения ее вычисления ее элементы объединяют в разряды, представляя в выборку в виде группированного статистического ряда. Для этого все содержащиеся элементы разбивают на k интервалов равной длины.

**Графические представления статистической совокупности**

**Полигон и гистограмма.**

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения. Они позволяют лучше представить характер распределения элементов выборки, а иногда и сделать предположения о законе распределения генеральной совокупности.

**Основные понятия.**

**Ряд распределения** – это ряд чисел, в котором значение изучаемого признака (варианта) расположены в определенном порядке. Либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Наряду с вариантами ряд распределений включают в частоты (величины, показывающие сколько раз каждая из вариантов встречаются в данной совокупности). Сумма частот равна объему совокупности. Таким образом, ряд распределения состоит из вариант и частот.

В зависимости от прерывности и непрерывности варьирующего признака ряды распределения удобно представлять в виде двух разновидностей: **дискретного и вариационного (интервальных)**

Дискретный ряд представляет собой ряд прерывных чисел.

Например: распределение семей по числу членов.

При непрерывной вариации распределением признака называется интервальным.

Например: распределение совхозов области по % выполнению плана.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка. Наблюдаемые значения - называют вариантами, - числа наблюдения частотами, - объем выборки, отношения частот к объему выборки называется **относительными частотами**

**Пример.**  Составить распределения относительных частот, если задано распределение частот выборки объема n=20

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 6 | 12 |
|  | 3 | 10 | 7 |

Решение. Найдём относительные частоты.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 6 | 12 |
|  | 0,15 | 0,5 | 0,35 |

0,15+0,5+0,35=1 .

Сумма относительных частот равна единице.

В целях наглядности строят различные графики *полигон* и *гистограмма*.

**Полигоном** частот называется ломаная линия вершиной, которой являются точки ( определяемые элементами статистического ряда. Для его построения по оси абсцисс откладывают варианты , а по оси ординат соответствующая им частота .

Построенные точки соединяют отрезками прямых.

**Гистограммой** частот называется ступенчатая фигура составленная из прямоугольников построенных на интервалах так что площадь каждого прямоугольника численно равна частоте варианты расположенной в середине интервала. То есть площадь гистограммы частот равна объему выборки

*Пример***.**Построить полигон и гистограмму частот.

Дано время недельной загрузки электрических духовых шкафов 50-ти обследованных предприятий общественного питания в часах.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 38 | 60 | 41 | 51 | 33 | 42 | 45 | 21 | 53 | 60 |
| 60 | 52 | 47 | 46 | 49 | 49 | 14 | 57 | 54 | 59 |
| 77 | 47 | 28 | 48 | 58 | 32 | 42 | 58 | 61 | 30 |
| 61 | 35 | 47 | 72 | 41 | 45 | 44 | 56 | 30 | 40 |
| 67 | 65 | 39 | 48 | 43 | 60 | 54 | 42 | 59 | 50 |

Разобьем ряд распределения на 7 интервалов, определим размах выборки.

77-14=63

Найдем длину интервала.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Границы интервалов | Середина интервалов |  |
| 1 | 14-23 | 18,5 | 2 |
| 2 | 23-32 | 27,5 | 3 |
| 3 | 32-41 | 36,5 | 6 |
| 4 | 41-50 | 45,5 | 17 |
| 5 | 50-59 | 54,5 | 10 |
| 6 | 59-68 | 63,5 | 10 |
| 7 | 68-77 | 72,5 | 2 |

Чтобы построить гистограмму найдём относительные частоты.

**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 20,3 | 18,1 | 20,4 | 20,1 | 15,3 | 22,8 | 18,3 | 13,9 | 16,7 | 17,8 | 13,5 |
| 15,4 | 21,9 | 16,5 | 16,8 | 19,3 | 21,9 | 14,7 | 19,8 | 20,4 | 21,3 | 11,8 |
| 17,2 | 15,3 | 19,7 | 14,7 | 17,8 | 12,5 | 14,5 | 18,5 | 19,5 | 17,5 | 18,6 |
| 19,2 | 16,8 | 20,5 | 20,8 | 16,2 | 10,1 | 18,1 | 20,2 | 17,2 | 19,4 | 19,1 |
| 23,3 | 13,2 | 14,3 | 19,5 | 15,7 | 21,1 | 18,4 | 23,8 | 19,6 | 17,8 | 19,3 |

При изменении диаметра валика после шлифовки была получена следующая выборка:

Построить гистограмму частот, предварительно построив ряд статистического распределения, состоящий из семи интервалов.

**Список литературы**

***Основные источники:***

Пехлецкий И.Д. Математика 2014 ОИЦ «Академия».

***Дополнительные источники:***

Григорьев В.П., Сабурова Т.Н., Сборник задач по высшей математике, ОИЦ «Академия» 2014.

***Интернет - ресурсы***

* Электронно-библиотечная система ZNANIUM.COM Режим доступа: http://www.znanium.com/
* Электронно-библиотечная система "ЮРАЙТ" Режим доступа http://www. biblio-online. ru
* Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru/
* Информационные, тренировочные и контрольные материалы. Режим доступа: http:// www. fcior. edu. ru.
* Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. Режимдоступа: http:// www. school-collection. edu. ru.