Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**Методические рекомендации**

**по организации внеаудиторной самостоятельной работы**

по учебной дисциплине:

**МАТЕМАТИКА**

для студентов специальности

**08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (ФГОС 2018)**

Челябинск, 2019

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методические рекомендации составлены в соответствии с программой учебной дисциплины «Математика» для специальности **08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (ФГОС 2018)** | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  комиссией  протокол № \_\_\_  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2019 г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_\_/ О.И. Макаренко / | УТВЕРЖДАЮ  Зам. директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2019 г. |

**Автор:** Макаренко О.И., преподаватель Южно-Уральского государственного технического колледжа

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по организации внеаудиторной самостоятельной работы по учебной дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по специальности **08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (ФГОС 2018)**.

Самостоятельная внеаудиторная работа по математике организуется с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний студентов;

- углубления и расширения теоретических знаний;

- развития познавательных способностей и активности студентов, самостоятельности, ответственности;

- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Общий объём времени, отведённого на внеаудиторную самостоятельную работу по учебной дисциплине «Математика», предназначены для обучающихся по специальности **08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (ФГОС 2018)** составляет 18 часов.

В результате выполнения заданий внеаудиторной самостоятельной работы обучающийся должен:

*знать:*

− основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики;

− основные формулы для вычисления площадей фигур и объемов тел, используемых в строительстве;

*уметь:*

− выполнять необходимые измерения и связанные с ними расчеты;

- применять векторы для решения для решения реальных производственных задач;

− вычислять площади и объемы деталей строительных конструкций, объемы земляных работ;

− применять математические методы для решения профессиональных задач;

В методических рекомендациях по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы по каждой теме содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая самостоятельная работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий.

**Порядок выполнения заданий**

**внеаудиторной самостоятельной работы**

Задания внеаудиторной самостоятельной работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

*Ход работы:*

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. В тетрадях выполнить самостоятельную работу.
4. Задачи сдаются студентом на проверку частями – по мере изучения курса.

**Критерии оценивания**

**внеаудиторной самостоятельной работы**

**Оценка «5»** ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

**Оценка «4»** ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

**Оценка «3»** ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

**Оценка «2»** - решено мене 70% предлагаемых заданий.

**Перечень самостоятельных работ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ темы** | **Название темы по программе** | **Содержание внеаудиторной самостоятельной работы** | **Кол-во часов** |
| Тема 1.1 | Векторы на плоскости и в пространстве | Решение прикладных задач с использованием векторов. | 1 |
| Тема 1.2 | Уравнения прямой на плоскости | Решение прикладных задач с использованием уравнений прямой. | 1 |
| Тема 2.1 | Площади плоских фигур и поверхностей тел | Решение практических задач на вычисление площадей при строительстве зданий и сооружений. | 2 |
| Тема 2.2 | Объёмы тел | Решение практических задач на вычисление объёмов тел. | 2 |
| Тема 3.1 | Элементы теории пределов.  Непрерывность функции | Решение практических задач с применением пределов. | 2 |
| Тема 3.2 | Дифференциальное исчисление функции одной переменной | Решение практических задач с применением производной. | 3 |
| Тема 3.3 | Интегральное исчисление функции одной переменной | Решение практических задач с применением интегралов. | 3 |
| Тема 4.1 | Вероятность случайного события | Решение вероятностных задач. | 2 |
| Тема 4.2 | Случайные величины | Решение практических задач с применением статистических методов | 2 |
| Итого: | | | 18 |

**Тема 1.1 Решение прикладных задач с использованием векторов.**

**Цель:** научиться применять векторы для решения практических задач.

**Самостоятельная работа:** ответы на контрольные вопросы и подготовка презетации.

**Форма контроля:** проверка ответов на вопросы и оценка презентации.

*Порядок выполнения работы*

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач.
2. Ответьте письменно на контрольные вопросы.
3. Подготовьте презентацию по теме: «Использование векторов в различных областях науки и техники» в соответствии с требованиями указанными ниже.

*Контрольные вопросы:*

1.Что называют вектором?

2.Какие вектора являются коллинеарными?

3.Нулевой вектор-это какой?

4.Можно ли умножить вектор на число? Как?

5.Что такое скалярное произведение векторов?

6.Что называют модулем вектора?

7.Какие вектора являются ортогональными?

8.Как найти координаты середины отрезка по координатам его концов?

9.Имеет ли физический смысл скалярное произведение векторов? Какой?

**Требования к созданию презентации**

***Создание материалов-презентаций***– это вид самостоятельной работы студентов по созданию наглядных информационных пособий, выполненных с помощью мультимедийной компьютерной программы PowerPoint (см. Приложение).

Материалы-презентации готовятся студентом в виде слайдов с использованием программы Microsoft PowerPoint. В качестве материалов-презентаций могут быть представлены результаты любого вида внеаудиторной самостоятельной работы, по формату соответствующие режиму презентаций.

***Структура презентации:***

**титульный слайд** (дисциплина, тема, ФИО студента, специальность, номер группы)

**содержание**, где представлены основные этапы (моменты) презентации. Желательно, чтобы из содержания по гиперссылке можно перейти на необходимую страницу и вернуться вновь на содержание.

**основная часть** - от 15 слайдов (текстовый материал по теме + графическое сопровождение)

**заключение** - 1 слайд (выводы по теме)

**список литературы** - содержит не менее 2 – 5 источников

Приветствуются**:** музыкальное сопровождение, мультипликация, видео, анимация.

***При создании презентации рекомендуется:***

соблюдать единый стиль оформления;

* для фона выбирайте холодные тона (синий, зеленый);
* на одном слайде использовать не более 3 цветов;
* анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде;
* при представлении информации используйте короткие слова и предложения;
* надписи располагайте под картинками;
* шрифты: для заголовков не менее 24,для информации не менее 18;
* для выделения информации используйте рамки, заливку;
* не перегружайте слайд большим объемом информации;
* ключевые факты отображайте по одному на каждом слайде;
* для обеспечения разнообразия используйте различные виды слайдов.

**Тема 1.2 Решение прикладных задач с использованием уравнений прямой.**

**Цель:** научиться использовать уравнения прямой для решения прикладных задач.

**Самостоятельная работа:** выполнение расчетной работы.

**Форма контроля:** проверка расчетной работы.

*Порядок выполнения работы*

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач.
2. Ответьте письменно на контрольные вопросы.
3. Выполните задания расчётной работы. Оформите решение письменно в тетради.

*Контрольные вопросы:*

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой.
2. Общее уравнение прямой и его исследование.
3. Построение прямой по ее уравнению.
4. Уравнение прямой, проходящей: а) через данную точку в данном направлении; б) через две данные точки.
5. Координаты точки пересечения двух прямых.
6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

**Задания для расчетной работы**

**Задание 1.** Даны декартовы координаты трех точек A, B, C . Найти:

а) уравнение сторон треугольника и их угловые коэффициенты

б) уравнение высоты АН в треугольнике АВС;

в) уравнение медианы ВМ в треугольнике АВС;

г) уравнение прямой, проходящей через точку В параллельно прямой АС.

***ВАРИАНТ* 1.**

**1.** А(2; 4), В(-2; 7), С(8; -6). **2.** А(1; 2; 4), В(0; -2; 7), С(-5; 8; -6) , Р(-2; 4; -17).

***ВАРИАНТ* 2.**

**1.** А(-2; 7), В(-6; 3), С(8; -6). **2.** А(1; -2; 7), В(-6; 3; 0), С(1; 8; -6) , Р(-2; 4; -17).

***ВАРИАНТ* 3.**

**1.** А(9; 4), В(-2; -7), С(18; -6). **2.** А(0; 9; 4), В(1; -2; -7), С(1; 8; -6) , Р(-12; 4; -17).

***ВАРИАНТ* 4.**

**1.** А(2; 14), В(-12; 7), С(8; 0). **2.** А(2; 1; 14), В(-1; 2; 7), С(8; 0; 1) , Р(-2; 14; -17).

***ВАРИАНТ* 5.**

**1.** А(-12; 4), В(-2; 17), С(0; -6). **2.** А(-1; 2; 4), В(-2; 1; 7), С(1; 0; -6) , Р(32; 4; -17).

**Задание 2.** Издержки перевозки *y* двумя видами транспорта выражаются уравнениями: и , где *х –* расстояния в сотнях киллометров, *у –* транспортные расходы. Начиная с какого расстояния более экономичен второй вид транспорта?

**Задание 3.** Зная, что изменение объёма производства *у* с изменением производительности труда *х* происходит по прямой линии, составить её иуравнение, если при *х*=3 *у*=185, а при *х*=5 *у*=305. Определить объём производства при *х*=20.

**Тема 2.1 Решение практических задач на вычисление площадей при строительстве зданий и сооружений.**

**Цель:** Отработать навыки вычисления площадей при решении строительстве зданий и сооружений.

**Самостоятельная работа:** решение расчетной работы.

**Форма контроля:** проверка расчетной работы.

*Порядок выполнения работы*

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Выполните задания расчётной работы. Оформите решение письменно в тетради.

**Задания для расчетной работы**

**Задание 1.** *Определение площади поверхности стен, периметра и объема здания»***.**

**Теоретические сведения к практической работе**

1. *LН = L0 +2t, где L0=LВ*;

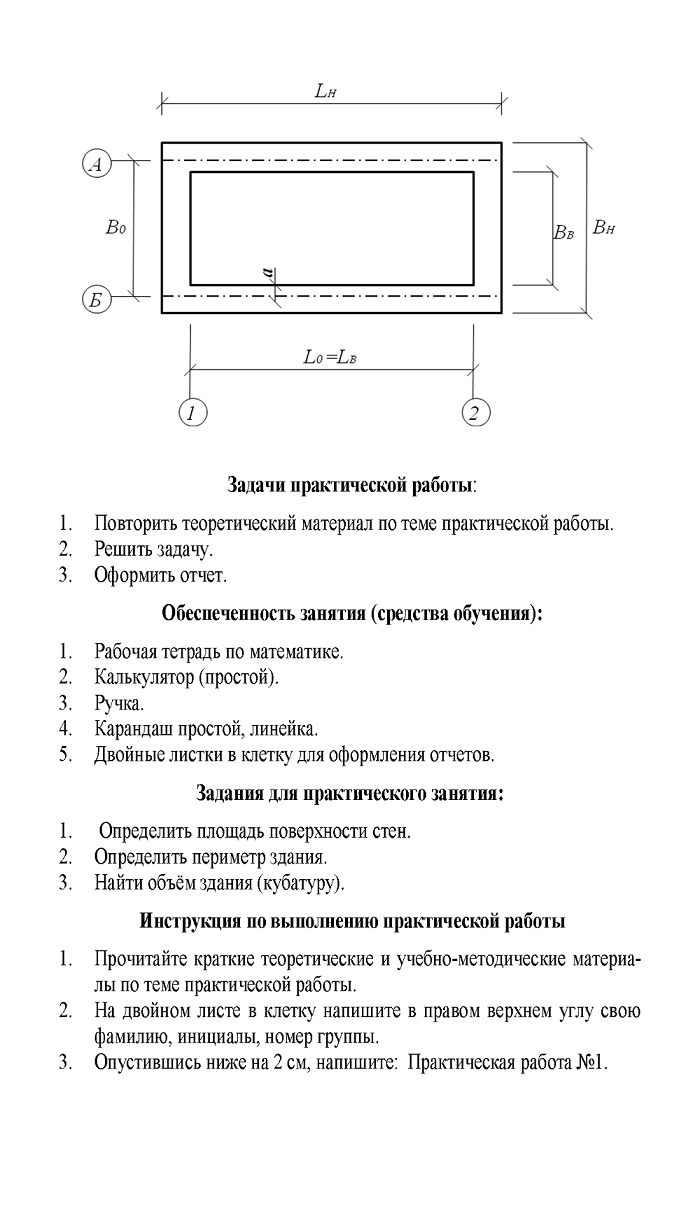
*ВВ = В0 -2а;*

*ВН = В0 +2(t – a) = ВВ +2t*.

1. Периметр наружных стен (здания) *РНС = 2·(LH + ВН).*
2. Площадь поверхности стен *Астен = РНС·Н*.
3. *Vздания = LH·BH·H; VПОМ = LB·BB·H*;

*Vстен = LСРНС·t·H*; где *LСРНС= BB +BH +L0 +LH.*

1. Общая площадь здания *Аобщ = А1эт·nэт*; *Аобщ = (BB·LB)·* *nэт*

**

1. Перечертите план здания с пометками. Размеры здания возьмите из таблицы (согласно своему варианту).
2. Запишите условие задачи, решение, ответ
3. Вычислите: 1) площадь поверхности стен. 2) периметр здания. 3) объем здания (кубатуру).

(Не забывайте записывать единицы измерения величин и переводить миллиметры в метры.)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | ***В0 (мм)*** | ***L0 (мм)*** | ***H*** | ***nэт*** | ***а (мм)*** | ***t(мм)*** |
| **1** | 12000 | 25600 | 11,20 | 3 | 90 | 270 |
| **2** | 9000 | 20800 | 14,00 | 5 | 90 | 300 |
| **3** | 7200 | 23200 | 16,80 | 6 | 90 | 320 |
| **4** | 15000 | 38400 | 33,60 | 12 | 90 | 350 |
| **5** | 13500 | 28800 | 14,00 | 5 | 90 | 400 |

**Задание 2.** Замерьте одну из комнат вашей квартиры и кухню квартиры. Найдите необходимое количество материала для ремонта и общую сумму затрат. ( *Для кухни сделать «фартук» из плитки по длине одной стены +0,5м. высотой – 1,5 м.)*

***ВАРИАНТ 1***

*Для комнаты:*

Обои: 0,53\*10м. – 452р.

Клей для обоев: 0,25кг – 145р (расход: 25г/кв.м)

Линолеум: кв.м. – 325р

Краска для потолка: 3 кг. – 127р. (расход 1 кг.- 6 кв.м.)

Плинтуса: 2,7м – 93р.

*Для кухни:*

Обои: 1,06\*10м. – 739р.

Клей для обоев: 0,25кг – 145р (расход: 25г/кв.м)

Плитка на стены: кв.м.- 312р.

Клей для плитки: 25кг. – 275р. (расход 1,4 кг на кв.м.)

Плитка на потолок: 0,5\*0,5м.-8шт. в упаковке – 300р. За упаковку.

Клей для плитки на потолок :1л – 160р, (расход 1л – 5кв.м.)

Плитка напольная: 30,2\*30,2см. – 1,37 кв.м. в упаковке, 1уп. – 437р.

Плинтуса: 2,7м – 93р.

***ВАРИАНТ 2***

*Для комнаты:*

Обои: 1,06\*10м. – 754р.

Клей для обоев: 0,25кг – 107р (расход: 15г/кв.м.)

Линолеум: кв.м. – 437р

Краска для потолка:3 кг. – 142р. (расход 1 кг.- 7 кв.м.)

Плинтуса: 2,7м – 99р.

*Для кухни:*

Обои: 0,53\*10м. – 645р.

Клей для обоев: 0,25кг – 107р (расход: 15г/кв.м.)

Плитка на стены: кв.м.- 342р.

Клей для плитки: 5кг. – 75р. (расход 1,3 кг на кв.м.)

Плитка на потолок: 0,5\*0,5м.-8шт. в упаковке – 300р. За упаковку.

Клей для плитки на потолок: 1л – 160р, (расход 1л – 5кв.м.)

Плитка напольная: 32,7\*32,7см. – 1,39 кв.м. в упаковке, 1уп. – 447р.

Плинтуса: 2,7м – 99р.

***ВАРИАНТ 3***

*Для комнаты:*

Обои: 1,06\*10м. – 846р.

Клей для обоев: 0,25кг – 132р (расход: 18г/кв.м)

Линолеум: кв.м. – 421р

Краска для потолка: 3 кг. – 132р. (расход 1 кг.- 7 кв.м.)

Плинтуса: 2,7м – 75р.

*Для кухни:*

Обои: 0,7\*15м. – 1125р.

Клей для обоев: 0,25кг – 132р (расход: 18г/кв.м)

Плитка на стены: кв.м.- 375р.

Клей для плитки: 25кг. – 275р. (расход 1,4 кг на кв.м.)

Плитка на потолок: 0,5\*0,5м.-8шт. в упаковке – 300р. за упаковку.

Клей для плитки на потолок: 1л – 160р, (расход 1л – 5кв.м.)

Плитка напольная: 33\*33см. – 1,33 кв.м. в упаковке, 1уп. – 441р.

Плинтуса: 2,7м – 93р.

***ВАРИАНТ 4***

*Для комнаты:*

Обои: 1,06\*25м. -799р.

Клей для обоев: 0,5кг – 199р (расход: 20г/кв.м)

Линолеум: кв.м. – 475р

Краска для потолка: 3 кг. – 137р. (расход 1 кг.- 6 кв.м.)

Плинтуса: 2,5м – 75р.

*Для кухни:*

Обои: 0,53\*10м. – 1010р.

Клей для обоев: 0,5кг – 199р (расход: 20г/кв.м)

Плитка на стены: кв.м.- 364р.

Клей для плитки: 5кг. – 75р. (расход 1,3 кг на кв.м.)

Плитка на потолок: 0,5\*0,5м.-8шт. в упаковке – 300р. за упаковку.

Клей для плитки на потолок: 1л – 160р, (расход 1л – 5кв.м.)

Плитка напольная: 40\*40см. – 1,12 кв.м. в упаковке, 1уп. – 547р.

Плинтуса: 2,5м – 75р.

***ВАРИАНТ 5***

*Для комнаты:*

Обои: 0,53\*15м. -539р.

Клей для обоев: 0,5кг – 150р (расход: 16г/кв.м)

Линолеум: кв.м. – 1250р

Краска для потолка: 3 кг. – 186р. (расход 1 кг.- 6 кв.м.)

Плинтуса: 2,5м – 95р.

*Для кухни:*

Обои: 1,06\*10м. – 910р.

Клей для обоев: 0,5кг – 175р (расход: 20г/кв.м)

Плитка на стены: кв.м.- 665р.

Клей для плитки: 10кг. – 125р. (расход 1,3 кг на кв.м.)

Плитка на потолок: 0,5\*0,5м.-8шт. в упаковке – 300р. за упаковку.

Клей для плитки на потолок: 1л – 160р, (расход 1л – 5кв.м.)

Плитка напольная: 50\*50см. – 1,12 кв.м. в упаковке, 1уп. – 647р.

Плинтуса: 2,5м – 89р.

**Тема 2.2 Решение практических задач на вычисление объёмов тел.**

**Цель:** Отработать навыки вычисления объёмов тел при решении строительстве зданий и сооружений.

**Самостоятельная работа:** решение расчетной работы.

**Форма контроля:** проверка расчетной работы.

*Порядок выполнения работы*

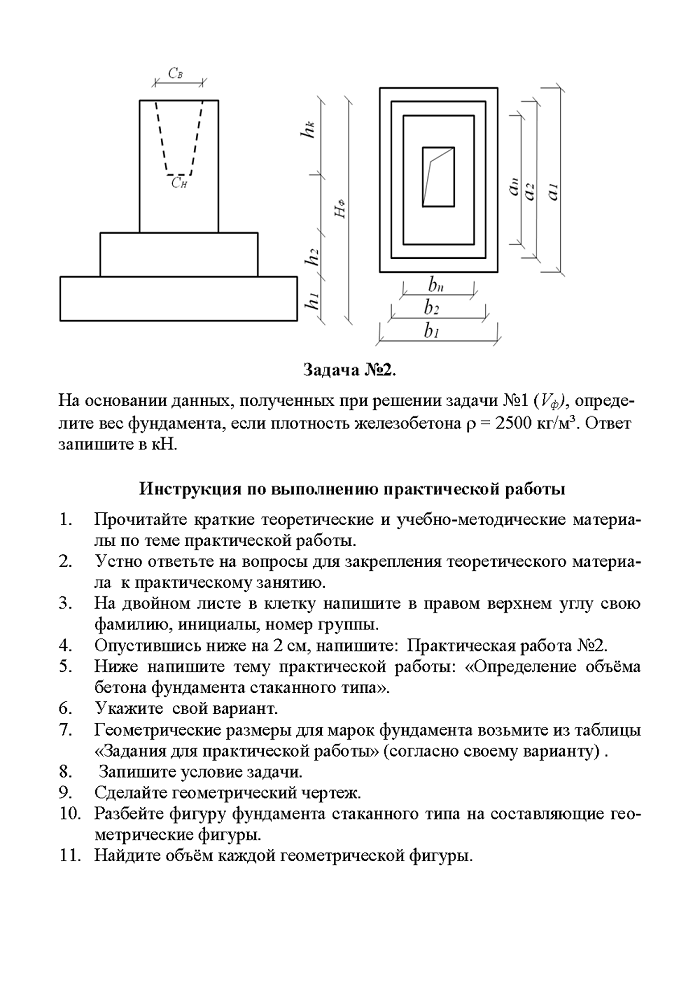
1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Выполните задания расчётной работы. Оформите решение письменно в тетради.

**Задания для расчетной работы**

**Задание 1.** Определение объема бетона фундамента стаканного типа**.**

**Теоретические сведения к практической работе**

1. *V= abc-* объем прямоугольного параллелепипеда;
2. – объем усеченной пирамиды
3. *Р=mρ= Vф·ρ·g -* вес тела

**

**Порядок выполнения задания**

1. Геометрические размеры для марок фундамента возьмите из таблицы (согласно своему варианту).
2. Запишите условие задачи.
3. Сделайте геометрический чертеж.
4. Разберите фигуру фундамента стаканного типа на составляющие геометрические фигуры. Найдите объем каждой фигуры.
5. Вычислите объем бетона, необходимого для изготовления фундамента стаканного типа. Определите вес фундамента.
6. Кратко ответьте на вопросы:

- Что такое фундамент? Из каких материалов его изготавливают.

- Что понимают под столбчатым фундаментом.

- Что понимают под фундаментом стаканного типа

(Не забывайте записывать единицы измерения величин и переводить миллиметры в метры.)

**Задания расчетной работы**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | ***Размер фундамента, м*** | | | | | | ***hk***  ***мм*** | ***Сн***  ***мм*** | ***Св***  ***мм*** | ***Нф***  ***м*** |
| ***а1*** | ***а2*** | ***ап*** | ***b1*** | ***b2*** | ***bn*** |
| **1** | 2,4 | 1,5 | 0,9 | 2,1 | 1,5 | 0,9 | 700 | 400×400 | 450×450 | 1,5 |
| **2** | 2,7 | 1,8 | 0,9 | 2,1 | 1,5 | 0,9 | 700 | 500×400 | 550×450 | 1,8 |
| **3** | 3,0 | 2,1 | 0,9 | 2,4 | 1,5 | 0,9 | 800 | 500×500 | 550×550 | 2,1 |
| **4** | 3,3 | 2,4 | 0,9 | 2,4 | 1,5 | 0,9 | 700 | 400×400 | 450×450 | 1,5 |
| **5** | 2,7 | 1,8 | 0,9 | 2,1 | 1,5 | 0,9 | 800 | 500×500 | 550×550 | 2,4 |

**Тема 3.1 Решение практических задач с применением пределов.**

**Цель***:* Отработать навыки вычисления пределов функций и исследования функции на непрерывность

**Самостоятельная работа:** решение расчетной работы

**Форма контроля:** проверка расчетной работы

*Порядок выполнения работы*

1. Перед выполнением работы, прочитайте еще раз конспект, ознакомьтесь с решением типовых примеров.
2. Ответьте письменно на контрольные вопросы.
3. Выполните задания расчётной работы. Оформите решение письменно в тетради.

*Контрольные вопросы:*

1. Дайте определение предела последовательности и предела функции;

2. Перечислите основные свойства пределов;

3. Дайте определение бесконечно большой и бесконечно малой функции;

4. Запишите формулы первого и второго замечательных пределов;

5. Приведите определение непрерывной функции;

6. Классифицируйте точки разрыва.

# *Решение типовых примеров*

Найти указанные пределы.

*Пример 1* 

Функция определена, а значит и непрерывна в точке х =2, поэтому данный предел равен значению функции в этой точке ==

*Пример2* 

При подстановке в выражение под знаком предела вместо его предельного значения получаем неопределенность вида .

Функция  не определена в точке х =3, т.е. х =3 −точка разрыва, но т.к переменная *х* стремится к точке 3, х→3, а не равна 3, то под знаком предела можно производить тождественные преобразования выражения, не принимая во внимание его поведения в предельной точке.

Разложим квадратные трехчлены, входящие числитель и знаменатель, на линейные множители по формуле: aх2 +bх + с = a(х−х1) (х−х2) − корни квадратного уравнения

aх2 +bх + с =0

2х2−3х − 9 =0

D = b2−4ac =9 − 4 ⋅2 ⋅(−9) = 81

х1,2 = 

2*х*2 − 3*х*−9 = 2(*х*− 3)(*х* +)

Аналогично:

*х*2− х − 6 = (*х*−3)(*х*−2)

Преобразуем данный предел:



Функция  в точке *х* = 3 не существует, а предел от этой функции при х→ 3 существует и равен 

*Пример 3* 

Здесь сталкиваемся с неопределенностью вида , избавится от которой можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной (или делением числителя и знаменателя на старшую степень переменной):



т.к.  = 0;  = 0  = 0;  = 0

как пределы от бесконечно малых величин

*Пример 4* 

Для раскрытия неопределенности , умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю: 

= 

Заменим «в числителе по формуле разность квадратов» (a−b)(a + b) = a2 -b2

= (*x +* 2) − (4 −*x*) = 2*x*−2 = 2(*x*− 1)

в знаменателе *х*2 −1 =(*x*−1)( *x*+1)



*Пример 5* 

Для раскрытия неопределенности вида в данном примере воспользуемся первым замечательным пределом и одним из его следствий:

 = 1  = 1

заменим предел произведения произведением пределов и вынесем постоянный множитель =

по первому замечательному пределу (u =2x или u = 4x)

= 1;  = 

Из первого замечательного предела вытекают и другие следствия

; α

*Пример 6*

Имеем неопределенность вида [1∞];

; 

Для раскрытия неопределенности вида [1∞] лучше всего воспользоваться следующей формулой: 

Имеем *f* (х) −1= −1 = 

Тогда 

Следовательно, 

**Задания для расчетной работы**

Для заданий 1-3 – вычислить пределы, задание 4 – исследовать функцию на непрерывность и построить схематичный график.

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | 4. |
| 2 | 4. |
| 3 | 4. |
| 4 | 4 |
| 5 | 4. |
| 6 | 4. |
| 7 | 4. |
| 8 | 4. |
| 9 | 4. |
| 10 | 4. |

## 

## Тема 3.2 Решение практических задач с применением производной.

**Цель***:* Закрепить навыки вычисления производных и уметь применять производную для решения прикладных экономических задач.

**Самостоятельная работа:** выполнение расчетной работы.

**Форма контроля:** проверка расчетной работы и оценка презентации.

*Порядок выполнения работы*

**1**. Изучите теоретический материал по теме: «Использование производной в экономике».

**2**. Выполните расчетную работу, предварительно изучив, рассмотренные ниже задачи. Оформите решение письменно в тетради.

*Теоретические сведения:*

**Основные понятия**

## Применение производной в экономикепозволяет получать так называемые *предельные характеристики* экономических объектов или процессов. Предельные величины (предельные выручка, полезность, производительность, предельный доход идр.) характеризуют *не состояние, а скорость изменения* экономического объекта или процесса по времени или относительно другого исследуемого фактора.

***1. Издержки производства.*** Если издержки производства *у* рассматривать как функцию выпускаемой продукции *х,* т.е. , то будут выражать *предельные издержки* производства и приближенно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. Средние издержки являются издержками на единицу выпуска продукции: .

**2. Производительность труда.** Пусть функция выражает объем произведенной продукции *у* за время *t*. Тогда производная объема произведенной продукции по времени есть *производительность труда* в момент времени .

**3. Функция потребления и сбережения.** Если *х* – национальный доход, – функция потребления (часть дохода, которая тратится), а функция сбережения, то . Дифференцируя получим, что

где – предельная склонность к потреблению;

где – предельная склонность к сбережению.

**4. Эластичность.** Эта мера реагированияодной переменной величины на изменение другой. Эластичность показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1 %.

Эластичность функции определяется с помощью соотношения:

или

где – *относительная скорость изменения* *(темп)* функции.

Эластичность функции применяется при анализе спроса и предложения от цены (*ценовая эластичность*). Она показывает реакцию спроса или предложения на изменение цены и определяет, на сколько процентов приближенно изменится спрос или предложение при изменении цены на 1%.

Если эластичность спроса , то спрос считается *эластичным*, если , *нейтральным* (с единичной эластичностью), – *неэластичным* относительно цены.

Примеры:

1. Зависимость между издержками производства у и объемом выпускаемой продукции х выражается функцией (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

*Решение*. Функция средних издержек (на единицу проу дукции) выражается отношением ; при средние издержки (на единицу продукции) равны (ден. ед.). Функция предельных издержек выражается производной ; при предельные издержки составят (ден. ед.). Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства (объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составляют 35 ден. ед.

1. Зависимость между себестоимостью единицы продукции у (тыс. руб.) и выпуском продукции х (млрд. руб.) выражается функцией у. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

*Решение*. По формуле эластичность себестоимости . При , т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0 ,6 %.

1. Объем продукции и, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением (ед.), , где t — рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

*Решение*. Производительность труда выражается производной , а скорость и темп изменения производительности — соответственно производной и логарифмической производной :

,

В заданные моменты времени и соответственно имеем: (7)=-20.

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака и с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы.

**Задания для расчетной работы**

**1**. Объем продукции *u* (уел. ед.) цеха в течение рабочего дня представляет функцию , где *t* — время (ч). Найти производительность труда через 2 ч после начала работы.

**2**. Зависимость между издержками производства у (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции *х* (ед.) выражается функцией . Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 5 ед.

**3**. Функции спроса *q* и предложения *s* от цены *р* выражаются соответственно уравнениями и . Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 5% от равновесной.

## Тема 3.3 Решение практических задач с применением интегралов

**Цель***:* Закрепить навыки вычисления неопределенных и определенных интегралов, научиться применять их при решении прикладных задач.

**Самостоятельная работа:** выполнение расчетной работы.

**Форма контроля:** проверка работы

Порядок выполнения работы

**1**. Изучите теоретический материал по теме: «Использование интеграла в экономике».

**2**. Выполните расчетную работу, предварительно изучив, рассмотренные ниже задачи. Оформите решение письменно в тетради.

*Теоретические сведения*

***Экономический смысл определенного интеграла***. Пусть функция *z = f(t)* описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Тогда объем продукции и, произведенной за промежуток времени [0,Т] может быть вычислен по формле:

т.е. если – производительность труда в момент t, то есть объем выпускаемой продукции за промежуток [0, Т ].

Если в функции Кобба—Дугласа считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид . Тогда объем выпускаемой продукции за Т лет составит:

.

**Пример:** Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба-Дугласа имеет вид

Решение: По формуле : .

Используем метод интегрирования по частям. Пусть Тогда

Следовательно,

Пусть известна функция *t=t(x)*, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где х — порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время tcp, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от х1 до х2 изделий, вычисляется по теореме о среднем:

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий t = t(x), то часто она имеет вид , где а — затраты времени на первое изделие, b — показатель производственного процесса.

**Пример**. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от до изделий, полагая в формуле изменения затрат а = 600 (мин), b = 0,5.

Решение. Используя формулу

Получаем

**Задания для расчетной работы**

**1**. Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией (ден. ед./ч), где t — время в часах от начала работы, . Найти функцию *u = u(t),* выражающую объем продукции (в стоимостном выражении) и его величину за рабочий день.

**2**. Стоимость перевозки одной тонны груза на один километр (тариф перевозки) задается функцией (цен. ед./км). Определите затраты на перевозку одной тонны груза на расстояние 20 км

**Тема 4.1 Решение вероятностных задач**

**Цель:** получить навыки по нахождению условных вероятностей; вычислению вероятностей сложных событий с помощью теорем умножения и сложения вероятностей, получить навыки по вычислению вероятностей сложных событий с помощью формулы полной вероятности

**Самостоятельная работа:** выполнение расчетной работы;

**Форма контроля:** проверка работы.

*Теоретические сведения:*

Пусть А и В – зависимые события. ***Условной вероятностью Р(В|А) (или PA(B))*** называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

#### Теорема умножения вероятностей

**Теорема**: Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

P(A.B) = P(A).P(B).

**Пример**  Какова вероятность того, что при десятикратном бросании монеты герб выпадет 10 раз ?

**Решение:** Пусть событие *Ai* — появление герба при *i*-м бросании. Искомая вероятность есть вероятность совмещения всех событий *Ai (i=1,2,3,...,10)*, а так как они, очевидно, независимы в совокупности, то применяя формулу (10), имеем

eqn1

Но *P(Ai)=1/2* для любого *i*; поэтому

eqn2

**Теорема**: Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предложении, что первое уже наступило.

P(A .B) = P(A).P(B⏐A).

Для трех зависимых событий:

P(A .B) = P(A).P(B⏐A).P(C⏐A .B).

**Пример.** Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми ?

**Решение:** Эта задача уже была решена в п. 3 с помощью классического определения вероятности. Решим ее, применяя формулу (5). Извлечение двух шаров равносильно последовательному их извлечению. Обозначим через *А* появление белого шара при первом извлечении, а через *В* — при втором. Событие, состоящее в появлении двух белых шаров, является совмещением событий *А* и *В*. По формуле (5) имеем

eqn1

Но *Р(А)=3/10; РA(В)=2/9*, поскольку после того, как был вынут первый белый шар, в урне осталось 9 шаров, из которых 2 белых. Следовательно,

eqn2

#### Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

**Теорема**: Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

P(A+B) = P(A)+P(B).

**Пример.** В урне 2 зеленых, 7 красных, 5 коричневых и 10 белых шаров. Какова вероятность появления цветного шара?

**Решение:** Находим соответственно вероятности появления зеленого, красного и коричневого шаров: *Р(зел.)=2/24*; *Р(кр.)=7/24*; *Р(кор.)=5/24*. Так как рассматриваемые события, очевидно, несовместны, то, применяя аксиому сложения, найдем вероятность появления цветного шара:

eqn1

#### Теорема:

Если A и B – совместные события, то

P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A .B).

Для трех и более совместных событий эта формула значительно усложняется.

Например:

P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A .B)-P(A .C)-P(B .C)+P(A .B .C).

**Пример**: Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, а из второго – 0,91. Найти вероятность поражения цели.

**Решение**: Пусть событие А – хотя бы одно попадание в мишень, событие А1 – попадание в мишень из первого орудия, событие А2 – попадание в мишень из второго орудия.

Тогда А = А1+А2.

Поскольку события А1 и А2 совместны, то

P(A) = P(А1)+P(А2)-P(А1 ,А2).

Т.к. события А1 и А2 независимы, то P(A1 ,A2)=P(A1) ,P(A2),

где P(A1)=0,85, а P(A2)=0,91 по условию задачи.

Итак, P(A) =0,85+0,91-0,85, 0,91=0,9865.

*Вероятность противоположного события*

Несколько событий в данном опыте образуют полную группу, если в результате опыта обязательно должно появиться хотя бы одно из этих событий, Отсюда следует, что сумма событий полной группы есть достоверное событие, вероятность которого равна единице.

Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате опыта появится одно и только одно из этих событий.

Для суммы таких событий справедлива формула

P(A1+A2+….+An) = P(A1)+P(A2)+….+P(An) = 1.

**Теорема**: Два противоположных друг другу события образуют полную группу: 

**Пример**: В партии содержится 20 деталей, среди которых 4 нестандартных. Для контроля взяли наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей нестандартна.

**Решение**: Пусть событие А – хотя бы одна из взятых деталей окажется нестандартной. Рассмотрим событие, противоположное событию А:

 - среди взятых деталей нет нестандартных. Вычислим вероятность события : 

Теперь вычислим вероятность искомого события:

P(A) = 1-.

**Пример**: Перегорела одна из пяти электроламп, включенных в сеть последовательно. С целью устранения повреждения наудачу выбранную лампочку заменяют годной, после чего сразу проверяется исправность линии. Если повреждение не устранено, то заменяется другая лампочка. Найти вероятность того, что повреждение будет устранено только после замены третьей лампочки.

**Решение**: Пусть событие А – повреждение будет исправлено после замены третьей лампы.

Рассмотрим следующие три события:

А1 – первая замененная лампа оказалась перегоревшей;

А2 – вторая замененная лампа оказалась перегоревшей;

А3 – третья замененная лампа оказалась перегоревшей.

Тогда: А = 

Поскольку события зависимы, то 

Вероятность события  есть вероятность того, что первая замененная лампа оказалась исправной.

Условная вероятность  - вероятность того, что вторая замененная лампа оказалась исправной, если известно, что первая замененная лампа также исправна.

Поэтому =.

Наконец, условная вероятность  есть вероятность того, что третья замененная лампа оказалась перегоревшей, если известно, что первая и вторая замененные лампы были исправными.

Откуда .

Теперь подсчитаем искомую вероятность: P(A)=

**Пример**: Вероятности того, что деталь нужного вида находится в первом, втором, третьем ящике соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится не менее, чем в двух ящиках.

**Решение**: Пусть событие А – деталь нужного вида находится не менее, чем в двух ящиках. Рассмотрим следующие три события:

А1 – деталь нужного вида имеется в 1-ом ящике;

А2 – деталь нужного вида имеется во 2-ом ящике;

А3 ­­- деталь нужного вида имеется в 3-ем ящике.

Событие B1= заключается в том, что нужного вида деталь имеется во 2-ом и 3-ем ящиках, но ее нет в 1-ом ящике. События имеется во 2-ом и 3-ем независимы, поэтому



Событие  заключается в том, что нужного вида деталь имеется в 1-ом и в 3-ем ящиках, но ее нет во 2-ом ящике.

Событие B3=A1 ,A2 ,заключается в том, что нужного вида деталь имеется в 1-ом и 2-ом ящиках, но ее нет в 3-ем ящике.

)=P(A1) ,P(A2) ,P(

Наконец, событие B4=A1 ,A2 ,A3 заключается в том, что нужного вида деталь имеется и в 1-ом, и во 2-ом, и в 3-ем ящиках.



Событие А произойдет тогда, когда произойдет одно из событий:

или В1, или В2, или В3, или В4. Поэтому А=В1+В2+В3+В4.

Поскольку события В1, В2, В3, В4 несовместны, то

P(A)=P(В1)+P(В2)+P(B3)+P(B4).

Вычисляем:

P(A)=0,216+0,126+0,056+0,504=0,902.

### *Формула полной вероятности*

Пусть событие А происходит совместно с одним из событий (гипотез) Н1, Н2,… Нn, которые образуют полную группу событий. Тогда справедлива *формула полной вероятности события А :*

***,***

где Р(Нк) – вероятность гипотезы Нк, Р(А⏐Нк) – условная вероятность А, т.е. вероятность появления события А при условии, что произошла гипотеза Нк .

**Пример.**Три автомата изготовляют одинаковые детали.

Известно, что первый автомат производит 30% всей продукции, второй – 25% и третий – 45%. Вероятность изготовления детали, соответствующей стандарту, на первом автомате равна 0,99, на втором – 0,988 и на третьем – 0,988. все изготовленные за смену детали складываются вместе. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь не соответствует стандарту.

**Решение**: Пусть событие А – взятая наудачу деталь не соответствует стандарту.

Гипотезы:

Н1- взятая деталь изготовлена первым автоматом;

Н2- взятая деталь изготовлена вторым автоматом;

Н3- взятая деталь изготовлена третьим автоматом.

Вычислим вероятность гипотез.

******

Вычислим условные вероятности:

Р(А⏐Н1) – вероятность того, что взятая наудачу деталь не соответствует стандарту, если она изготовлена первым автоматом.

******

Вероятность события А подсчитываем по формуле полной вероятности :

Р(А)=0,3 .0,01+0,25 .0,012+0,45 .0,012=0,009.

**Пример**. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 2 черных. При перевозке из первой урны во вторую урну перекатились два шара. После того, как шары во второй урне перемешались, из неё выкатился шар. Найти вероятность того, что выкатившийся из второй урны шар белый.

**Решение**: Пусть событие *Н*1 состоит в том, что из первой урны во вторую перекатились два белых шара, событие *Н*2 состоит в том, что перекатились два чёрных шара, а событие *Н*3 состоит в том, что перекатились шары разного цвета. Можно вычислить вероятности *Р*(*Н*1)==7/15, *Р*(*Н*2)==1/15, *Р*(*Н*3)==7/15 (при решении задачи полезно проверить выполнение необходимого условия ).

Если реализовалась гипотеза *Н*1, то во второй урне оказалось 10 белых и 2 черных шара. Обозначим через *А* событие, заключающееся в том, что из второй урны выкатился белый шар. Тогда *Р*(*А/Н*1)==5/33. Если реализовалась гипотеза *Н*2, то во второй урне оказалось 8 белых и 4 чёрных шара, и *Р*(*А/Н*2)==4/33. Легко показать, что *Р*(*А/Н*3)==3/22. Теперь можно воспользоваться формулой полной вероятности:

*Р*(*А*)=(5/33)⋅(7/15)+(4/33) (1/15)+(3/22) (7/15)= 47/330

**Пример**. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры выбираются 2 мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются ещё два мяча. Найти вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.

**Решение** Обозначим через *А* событие, заключающееся в том, что вторая игра будет проводиться новыми мячами. Пусть гипотеза *Н*1  состоит в том, что для первой игры были выбраны два новых мяча, гипотеза *Н*2  состоит в том, что для первой игры были выбраны новый и играный мячи, гипотеза *Н*3  состоит в том, что для первой игры были выбраны два играных мяча. Определим вероятности гипотез:

*Р*(*Н*1)=; *Р*(*Н*2)=; *Р*(*Н*3)=.

Теперь вычислим условные вероятности события *А.*

*Р*(*А/Н*1)=; *Р*(*А/Н*2)=; *Р*(*А/Н*3)=.

Осталось подставить результаты вычислений в формулу полной вероятности

*Р*(*А*)=.

**Пример.**На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока?

**Решение** Событие *A–* установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока – может произойти, если произойдет одно из несовместных событий: – установленный на машине двигатель изготовлен на первом, втором или третьем заводе соответственно. Эти события образуют полную группу, их вероятности:

, , ,

(Контроль:).

По условию , , .

По формуле полной вероятности

.

*Формула Байеса*

Пусть вероятности гипотез до опыта были Р(Н1), Р(Н2),… Р(Нn). В результате опыта появилось событие А . Тогда условная вероятность Р(Нк⏐А) гипотезы Нк с учетом появления события А вычисляется по *формуле Байеса:*

***.***

**Пример.** На двух станках производят одинаковые детали, которые поступают на конвейер. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго. Первый станок дает в среднем 80% деталей отличного качества, а второй –90%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того , что она изготовлена на втором станке.

**Решение** Пусть событие А - взятая наудачу с конвейера деталь отличного качества.

Гипотезы:

Н1- деталь изготовлена на первом станке;

Н2- деталь изготовлена на втором станке.

Вероятность гипотез до появления события А:

Р(Н1)=3/4; Р(Н2)=1/4.

Условные вероятности

******

Вероятности того, что взятая наудачу с конвейера деталь окажется отличного качества, т.е. вероятность события А, вычисляется по формуле полной вероятности:

******

Искомая вероятность того, что взятая деталь отличного качества изготовлена на втором станке, вычисляется по формуле Байеса: ******

**Пример**. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 2 черных. При перевозке из первой урны во вторую урну перекатились два шара и шары во второй урне перемешались, из неё выкатился белый шар. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую перекатились разноцветные шары.

**Решение**

Пусть событие *Н*1 состоит в том, что из первой урны во вторую перекатились два белых шара, событие *Н*2 состоит в том, что перекатились два чёрных шара, а событие *Н*3 состоит в том, что перекатились шары разного цвета. Можно вычислить вероятности *Р*(*Н*1)==7/15, *Р*(*Н*2)==1/15, *Р*(*Н*3)==7/15 (при решении задачи полезно проверить выполнение необходимого условия ).

Если реализовалась гипотеза *Н*1, то во второй урне оказалось 10 белых и 2 черных шара. Обозначим через *А* событие, заключающееся в том, что из второй урны выкатился белый шар. Тогда *Р*(*А/Н*1)==5/33. Если реализовалась гипотеза *Н*2, то во второй урне оказалось 8 белых и 4 чёрных шара, и *Р*(*А/Н*2)==4/33. Легко показать, что *Р*(*А/Н*3)==3/22. Теперь можно воспользоваться формулой полной вероятности:

*Р*(*А*)=(5/33)⋅(7/15)+(4/33) (1/15)+(3/22) (7/15)=47/330

Вычисления подставим в формулу Байеса

*Р*(*Н*3/*А*)=*Р*(*А*/*Н*3)*Р*(*Н*3)/ *Р*(*А*)=(3/22)(7/15)/( 47/33)=7/47.

**Пример**  Сообщение со спутника на землю передаётся в виде бинарного кода, то есть как упорядоченного набора нулей и единиц. Предположим, что послание на 70% состоит из нулей. Помехи приводят к тому, что только 80% нулей и единиц правильно распознаются приёмником. Если принят сигнал “1”, то какова вероятность того, что отправлен сигнал “0”?

**Решение** Пусть событие *В*0 состоит в том, что отправлен сигнал “0”, а событие *В*1 –в том, что отправлен сигнал “1”. Пусть событие *А*0 состоит в том, что принят сигнал “0”, с событие *А*1 – в том, что принят сигнал “1”. Нас интересует *Р*(*В*0/*А*1). По условию

*Р*(*В*0)=0,7 *Р*(*В*1)=0,3

*Р*(*А*0/ *В*0)=0,8 *Р*(*А*1/ *В*0)=0,2

*Р*(*А*1/*В*0)=0,8 *Р*(*А*0/ *В* 1)=0,2

По формуле Байеса получаем

*Р*(*В*0/*А*1)=0,2⋅0,7/(0,2⋅0,7+0,8⋅03)=0,37.

**Пример** По цели независимо сбросили две бомбы**.** Вероятность попадания для каждой бомбы равна *1/2.* При попадании одной бомбы цель поражается с вероятность *1/2*, а при попадании двух бомб она поражается с вероятностью *2/3*. Найти вероятность поражения цели.

**Решение*.*** Пусть события *H1, H2 и H3* состоят в попадании 0, 1 и 2 бомб соответственно. Событие *A* состоит в поражении цели. По формуле полной вероятности

*P(A)=P(A|H1)P(H1)+ P(A|H2)P(H2)+ P(A|H3)P(H3).*

*P(A|H1)=0, P(A|H2)=1/2, P(A|H3)=2/3, P(H2)= ½, P(H3)=1/4.*

Поэтому, P(A)= (1/2)(1/2)+(2/3)(1/4)=5/12.

**Задания для расчетной работы**

*Теорема умножения вероятностей*

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна р = 0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание. *Отв.* 0,729.

2. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: "появился "герб", "появилось 6 очков". *Отв.* 1 / 12.

3. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартных), во втором — 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными. *Отв.* 0,12.

4. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна *р* = 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие A). *Отв.* 0,936.

5. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие А)? *Отв.* 91 / 216.

*Теорема сложения вероятностей*

1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета? *Отв.* р = 0,02.

2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков. *Отв.* р = 0,4.

3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная. *Отв.* р = 44 / 45.

4. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали. *Отв.* p = 2 / 3.

Указание. Если А — нет ни одной нестандартной детали, В — есть одна нестандартная деталь, то

P (A + B) = P (A) + P (B) = C68 / C610 + C12 \* C58 / C610.

*Формула полной вероятности*

1. На фирме работают сотрудники разного возраста. Молодых сотрудников – 24, среднего возраста – 82 и пожилых – 16. Вероятность того, что молодого сотрудника отправят на повышение квалификации, равна 0,52; сотрудника среднего возраста – 0,54; пожилого – 0,36. Найдите вероятность того, что выбранного наудачу сотрудника отправят повышать квалификацию.
2. В библиотеке имеется 21 книга по истории, 34 книги –по математике, 25 книг – по юриспруденции. Вероятность того, что книга по истории занесена в электронный каталог, равна 0,33; по математике – 0,15; по юриспруденции – 0,61. Найдите вероятность того, что выбранная наудачу книга занесена в электронный каталог.
3. Пассажир за получение билета может обратиться в одну из трех касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, во вторую – 0,35, в третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3, для второй – 0,4, для третьей – 0,6. Найти вероятность того, что пассажир купит билет.

*Формула Байеса*

1. В магазин поступают одинаковые электрические утюги: 80% с одного завода и 20% с другого. Известно, что первый завод выпускает 90% продукции, способной прослужить гарантийный срок, а второй завод – 95%. Какова вероятность, что купленный в магазине утюг прослужит гарантийный срок?
2. На сборку поступают изделия трех цехов: 50 изделий из первого цеха, 40 из второго и 30 из третьего. Вероятность того, что изделие первого цеха отличного качества, равна 0,8, для вто­рого цеха эта вероятность равна 0,9, для третьего - 0,8. Науда­чу взятое сборщиком изделие оказалось отличного качества. Какова вероятность, что это изделие поступило из второго цеха?
3. Известно, что в партии из 600 лампочек 200 лам­почек изготовлено первым заводом, 250 - вторым и 150 - третьим. Известно также, что вероятности изготовления стандартной лампоч­ки 1-м, 2-м и 3-м заводом соответственно равны 0,97 ; 0,91 ; 0,93. Какова вероятность того, что наудачу взятая из партии лам­почка окажется стандартной?
4. Трое охотников одновременно выстрелили по медведям, кото­рый был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым охотником, если вероятности попадания для них рав­ны соответственно: 0,2 ; 0,4 ; 0,6.
5. Была проведена одна и та же контрольная работа в трех параллельных группах. В 1-ой группе, где 30 учащихся, оказалось 8 работ, выполненных на «отлично»; во 20ой, где 28 учащихся – 6 работ, в 3-ей, где 27 учащихся – 9 работ. Найти вероятность того, что первая взятая наудачу при повторной проверке работа из работ, принадлежащих группе, которая также выбрана наудачу, окажется выполненной на «отлично».
6. В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
7. В вычислительной лаборатории имеется шесть клавишных автомата и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95. для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.
8. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95. Для винтовки без оптического прицела 0,8. Стрелок поразил мишень их наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

**Тема 4.2. Решение практических задач с применением статистических методов**

**Цель**:получить навыки по вычислению характеристик ДСВ, заданной своим распределением, вычисление (с помощью свойств) характеристик для функций от одной или нескольких ДСВ

**Самостоятельная работа:** выполнение расчетной работы.

**Форма контроля:** проверка расчетной работы.

*Теоретические сведения:*

***Случайной величиной*** называется величина, которая в результате опыта примет одно и только одно возможное значение, при этом зара­нее неизвестно, какое именно.

***Дискретной*** называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные значения.

Случайную величину в дальнейшем мы будем обозначать большой буквой Х, а ее возможные значения маленькой буквой х.

*Например*, Х- число попаданий при трех выстрелах. Возможные значения этой случайной величины: х1=0, х2=1, х3=2, х4=3. Рассмотрим случайную величину Х с возможными зна­чениями х1, х2,…хn . Каждое из этих значений случайная величина может принять с некоторой вероятностью:

Р(Х=х1)=р1, Р(Х=х2)=р2, … Р(Х=хn)=рn.

В результате опыта случайная величина Х примет только одно из этих значений, т.е. произойдет только одно из полной группы событий: Х=х1 ,Х=х2, … Х=хn.

Поскольку сумма вероятностей полной группы попарно несовмест­ных событий равна 1, то 

**Законом распределения** ДСВ называется соотношение между ее возможными значениями и их вероятностями (т. е. вероятностями, с которыми случайная величина принимает эти возможные значения).

Закон распределения может быть задан формулой (формулы Бернулли, Пуассона и др.), таблицей или графиком, а также функцией распределения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| хi | х1 | х2 | . . . | хn |
| Pi | р1 | р2 | . . . | рn |

называется **законом или рядом распределения дискретной случайной величины**.

***Числовые характеристики ДСВ***

*Математическое ожидание ДСВ*

***Математическое ожидание***ДСВ находится по формуле:



*Вероятностный смысл* этого выражения таков: при большом числе измерений среднее значение наблюдаемых значений величины Х приближается к ее математическому ожиданию.

*Механический смысл* этого равенства заключается в следующем: математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести системы материальных точек, абсцис­сы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы - их вероятностям.

*Дисперсия ДСВ*

***Дисперсия*** случайной величины Х есть



Дисперсию случайной величины Х иногда удобнее вычислять по формуле

.

*Вероятностный смысл* Дисперсия случайной величины Х есть характеристика рассеива­ния разбросанности значений случайной величины около ее математи­ческого ожидания. Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины.

*Среднее квадратическое отклонение*

Для более наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, имеющей размерность самой случайной величины. Поэтому вводится понятие *среднего квадратического отклонения*: .

**Пример**: Случайная величина X задана функцией распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| p(x) | 0,2 | 0,3 | р3 | 0,1 |

Найти вероятность р3. Найти числовые характеристики с.в.

**Решение:** Проверим тождество 

0,2+0,3+р3+0,1=1.

р3=0,4.

Найдем числовые характеристики случайной величины Х:



М(Х)=1.0,2+2.0,3+3.0,4+4.0,1=0,2+0,6+1,2+0,4=2,4.

Для вычисления дисперсии применим формулу: .

М(Х2 )=12. 0,2+22.0,3+32.0,4+42.0,1=0,2+1,2+3,6+1,6=6,6.

.



**Задания для расчетной работы**

1. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности по­падания в цель при одном выстреле из 1-го, 2-го, 3-го орудия рав­ны соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое из орудий стреляет по не­которой цели один раз. Построить ряд распределения случайной величины числа попаданий в цель. Вычислить числовые характеристики.
2. В ящике семь изделий, одно из которых бракованное. Из ящика извлекают одно изделие за другим, пока не обнаружат брак. Составить ряд распределения случайной величины - числа вынутых изделий. Найти ее числовые характеристики.
3. Дискретная случайная величина *X* задана рядом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | -2 | 1 | 2 | 3 |
| *pi* | 0,08 | 0,40 | 0,32 | 0,2 |

Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию; в) среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

**Список литературы**

*Основные источники:*

Пехлецкий И.Д. Математика 2014 ОИЦ «Академия».

*Дополнительные источники:*

Григорьев В.П., Сабурова Т.Н., Сборник задач по высшей математике, ОИЦ «Академия» 2014.

*Интернет - ресурсы*

* Электронно-библиотечная система ZNANIUM.COM Режим доступа: http://www.znanium.com/
* Электронно-библиотечная система "ЮРАЙТ" Режим доступа http://www. biblio-online. ru
* Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru/
* Информационные, тренировочные и контрольные материалы. Режим доступа: http:// www. fcior. edu. ru.
* Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. Режим доступа: http:// www. school-collection. edu. ru.

***Приложение 1***

**Образец оформления презентации**

1. Первый слайд:

|  |
| --- |
| Тема информационного сообщения (или иного вида задания):  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Подготовил: Ф.И.О. студента, курс, группа, специальность  Руководитель: Ф.И.О. преподавателя |

1. Второй слайд

|  |
| --- |
| План:  1. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.  2. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.  3. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_. |

1. Третий слайд

|  |
| --- |
| Литература: |

1. Четвертый слайд

|  |
| --- |
| Лаконично раскрывает содержание информации, можно  включать рисунки, автофигуры, графики, диаграммы  и другие способы наглядного отображения информации |