Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**МАТЕМАТИКА**

**Методические рекомендации**

**по выполнению практических работ**

для студентов 2 курса специальности

35.02.12 Садово-парковое и ландшафтное строительство

(базовая подготовка)

Челябинск, 2017

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методические рекомендации составлены в соответствии с программой учебной дисциплины «Математика», | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  комиссией  протокол №  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_201\_\_ г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_\_/ О.И. Макаренко / | УТВЕРЖДАЮ  Зам. директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_201\_\_ г. |

**Автор:** Панова Е.Н., преподаватель Южно-Уральского государственного технического колледжа

.

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для студентов 2 курса, обучающихся по специальности 35.02.12 Садово-парковое и ландшафтное строительство базовой подготовки.

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Методические рекомендации предназначены для организации выполнения практических работ по учебной дисциплине «Математика».

Программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 12 практических работ, направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач,

профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно

планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ОК 10. Исполнять воинскую обязанность, в том числе с применением полученных профессиональных знаний (для юношей).

ПК 1.1. Проводить ландшафтный анализ и предпроектную оценку объекта озеленения.

ПК 1.2. Выполнять проектные чертежи объектов озеленения с использованием компьютерных программ.

ПК 1.3. Разрабатывать проектно-сметную документацию.

***умений*:**

* использовать математические методы при решении прикладных задач;
* проводить элементарные расчеты, необходимые в садово-парковом и ландшафтном строительстве;

***актуализацию знаний:***

* Основные численные методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности

Описание каждой практической работы содержит номер, название и цель работы, формируемые в процессе выполнения работы знания, умения и элементы компетенций, теоретическое изложение необходимого материала (при необходимости примеры выполнения заданий), варианты заданий, описание алгоритма выполнения работы и контрольные вопросы (с целью выявить и устранить недочеты в освоении материала).

Для получения дополнительной, более подробной информации по основным вопросам учебной дисциплины в конце методических рекомендаций приведен перечень информационных источников.

Отчеты студентов по практическим работам должны выполняться в отдельных тетрадях, содержать номер, название и цель работы, выполненные задания и их результаты.

**ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Тема | часы |
| 1 | Вычисление пределов. | 2 |
| 2 | Дифференцирование функций. | 2 |
| 3 | Вычисление производной сложной функции. | 2 |
| 4 | Приложение дифференциального исчисления к решению задач. | 2 |
| 5 | Применение основных методов интегрирования. | 2 |
| 6 | Применение определенного интеграла к решению задач. | 2 |
| 7 | Решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка. | 2 |
| 8 | Решение задач с использованием дифференциальных уравнений. | 2 |
| 9 | Вычисление вероятностей событий. | 2 |
| 10 | Вычисление случайных величин. Вычисление математического ожидания и дисперсии случайной величины. | 2 |
| 11 | Вычисление среднеквадратического отклонения дискретной случайной величины. | 2 |
| 12 | Решение задач с помощью численных методов. | 2 |
| 13 | Решение профессиональных задач с помощью численных методов. | 2 |

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1**

**Название практической работы:** Вычисление пределов.

**Цель работы:** научиться вычислять пределы.

**знания** (актуализация): основные понятия и методы математического анализа (функция, непрерывность функции, бесконечно большая и бесконечно малая функции, свойства бесконечно малых функций, связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями)

**умения:** применять математические методы для решения профессиональных задач;

**Теоретическая часть.**

**1. Предел функции.**

Числа А называют *пределом функции* при , если для любого сколь угодно малого > 0 найдется такое > 0, что ⏐f(x)-A⏐< при 0<⏐x - а⏐<.

= *A*

**2. Практическое вычисление** пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют пределы и , то:

1. = ;

2. =  ;

3. = (при ).

**3.Типы неопределённостей и их виды**

*1 тип Неопределённость вида в пределе*

*Примеры:*

*1)*(т.к. старшие степени числителя и знаменателя равны, то делим коэффициенты при старших степенях *х*).

*2)*(т.к. старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя)

*2 тип Неопределённость вида в пределе*

Для раскрытия неопределённости необходимо либо разложить числитель и знаменатель на множители, либо умножить выражение содержащее корни на сопряжённое.

*Примеры:*

1)

2)==

Широко используются для вычисления пределов функций также два замечательных предела функции:

*3 тип I-ый замечательный предел и основные эквивалентности:*

**= 1**

*Примеры:*

1. Найти предел функции

Решение:

Умножим числитель и знаменатель дроби на 8,

==

*3 тип II -ой замечательный предел*

1. Найти предел функции

Решение:

Воспользуемся свойством степени: (1∞) =

**Ход работы:**

**1.** Вычислить предел функций:

**Вариант 1.**

2. )х

**Вариант 2**

**Вариант 3**

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) что называется пределом функции

2) какая связь существует между бесконечно малой и бесконечно большой функцией

3) назовите виды неопределенностей.

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2**

**Название практической работы:** Дифференцирование функций.

**Цель работы:** научиться находить производные функций по формулам дифференцирования.

**знания** (актуализация): основные понятия о математическом синтезе и анализе (функция, производная функции, непрерывность функции, правила дифференцирования, производные элементарных функций);

**умения:** применять математические методы для решения профессиональных задач.

**Теоретическая часть.**

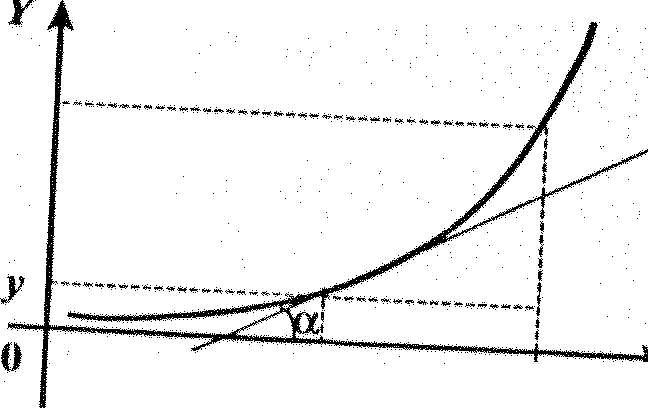
**1. Производные разных порядков**

Производная обозначается *у'* («игрек штрих»), или  («эф штрих от икс»), или («дэ игрек по дэ икс»).

*Производная функции* ***y = f* (*x*)** — это предел отношения приращения функции **Δ *y*** к соответствующему приращению независимой переменной (аргумента) **Δ *x***, когда **Δ *x*** стремится к нулю

 .

*Геометрически* производная у' функции ***y = f* (*x*)** представляет угловой коэффициент касательной к графику этой фун­кции (рис.1) в соответствующей точке tg а = у/.

**

*Физический смысл производной: у/—* это скорость изменения функции ***y = f* (*x*)** относительно ее аргумента *х.* Производная *у'* характеризирует быстроту изменения функции, т.е. скорость роста. Отрицательная скорость роста означает падение-уменьшение у при увеличении *х,* т. е. скорость убывания функции. Производная *у'* указывает на *тенденции,* характерные для изменения *у,* и позволяет судить о том, что можно ожидать при дальнейшем изменении аргумента.

Производная 2-го порядка — это производная от производной первого порядка:

***y′′ = (y′(x)) ′, y =*** (читается «дэ» два игрек по дэ икс дважды»). Производная n-го порядка — это производная от производной (n - 1) порядка: .

*Ускорение *- это первая производная от скорости по времени или вторая от перемещения по времени .

*Линейная скорость* – это первая производная от перемещения.

*Угловая скорость* , где - угловое перемещение (угол поворота).

1. **Правила дифференцирования. Производные элементарных функций**
2. Таблица 2.1

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | 11. |
| 2. | 12. |
| 3. | 13. |
| 4. | 14. |
| 5. | 15. |
| 6. | 16. |
| 7. | 17. |
| 8. | 18. |
| 9. | 19. |
| 10. |

**Найти производные следующих функций:**

**Пример 1**

y=х2-4х+3.

Решение:

у / = (х2-4х+3) / = (х2)/ - (4х)/ + 3/.

По формулам 1,2, 3, 6 и 7 таблицы 2.1, получим у/ = 2х-4.

**Пример 2**

 .

Решение:

Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

 .

Применяя формулы (6 и 7), получим:



 .

**Пример 3**

 . Вычислить .

Решение:

По формулам (5 и 7) получим:







.**Пример 4**



Решение:

Раскрываем скобки и производим деление:

 .

Используем дробные и отрицательные показатели, приводя данное выражение к виду (7) таблицы 2.1:

 .

Находим производную у /:

 .

**Пример 5**

Найти производную 2-го порядка от функции  .

Решение:

Используя формулы 4, 2 и 12 таблицы 2.1, получим:

 .

Дифференцируя производную у /, имеем:

.

**Пример 6**

Движение летчика при катапультировании из реактивного самолета можно приблизительно описать формулой  (м). Определить скорость и ускорение летчика через 2 с после катапультирования.

Решение:

По формулам 3, 6,7 и 8 таблицы 2.1:

 ,

Тогда v=3,7•3t2 +м/с; 

 .

**Ход работы:**

1. Найти производные функций при данном значении аргумента**:**

**Вариант 1**

1. (2)
2. ()

**Вариант 2**

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) запишите определение производной

2) чем отличается производная сложной функции от производной элементарной функции?

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3**

**Название практической работы:** Вычисление производной сложной функции.

**Цель работы:** научиться находить производные сложных функций.

**знания** (актуализация):

основные понятия о математическом синтезе и анализе (функция, производная функции, правила дифференцирования, производные элементарных функций, сложная функция, производная сложной функции);

**умения:**

применять математические методы для решения профессиональных задач

**Производная сложной функции**

Если , где , т.е. если у зависит от х через промежуточный аргумент u, то у называется сложной функцией от х.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной: .

Некоторые формулы таблицы производных теперь будут иметь вид :







и т.д.

**5. Найти производные следующих функций:**

**Пример 1.**

.

Решение:

Полагая 1+5х = u и у = u3, применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

.

**Пример 2**

.

Решение:

Полагая 3х= u, найдем, используя соответствующие формулы:



.

**Пример 3**

.

Решение:

Полагая х3= u, найдем:

.

**Пример 4**

В какой момент времени скорость тела, движущегося по закону , равна 0? Найти ускорение тела.

Решение:

Скорость тела v - это первая производная от перемещения  по времени: ; закону



Если v=0, то 0=16t-15 

Ускорение – это первая производная от скорости  по времени:  ; 

**Пример 5**

Точка совершает колебательные движения по оси абсцисс по закону . Найти момент времени, когда скорость равна нулю. Чему в это время равно x?

Решение:

 ; ;

 ; 

**Ход работы:**

1. Найти производные функций при данном значении аргумента**:**

**Вариант 1**

1. (2)
2. ()

**Вариант 2**

1. )

**Вариант 3**

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) запишите определение производной

2) чем отличается производная сложной функции от производной элементарной функции?

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

**Название практической работы:** Приложение дифференциального исчисления к решению задач.

**Цель работы:** Научиться решать прикладные задачи с помощью дифференциального исчисления

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия о математическом синтезе и анализе (функция, приращение аргумента, приращение функции, производная и дифференциал функции, правила дифференцирования, производные элементарных функций, приближенные вычисления);

**умения:**

применять математические методы для решения профессиональных задач.

**Теоретическая часть**

1. **Примеры применения дифференциального исчисления для решения задач**

Пусть дана функция *y=f (x)*; приращение этой функции

*f (x)*, ее дифференциал *d y=f ′(x)*. При достаточно малых (близких к нулю) приращение аргумента будем считать, что *dy*, т.е. что приращение функции приблизительно равно ее дифференциалу.

Заменив приращение функции ее дифференциалом, получим

*f ′(x)dx f (x),* откуда  *f (x)+ f ′(x).* (1)

Применение этой формулы дает значительное упрощение вычисления числового значения функции; геометрически это соответствует замене участка кривой отрезком касательной.

**Пример 1**

Найти приближенное значение приращения функции *y=*2*x*3*+*5 при

*x*=2 и = 0,001.

Имеем *dy* = 6*x*2*dx* = 622= 0,024. Точное значение приращения равно 3 + 5 - 2*x*3 – 5 = 6*x*2 + 6*x* 2 + 23 =

64+ 60,24012002.

**Пример 2**

Найти приближенное значение функции *y=*5*x*3 -2*x +*3 при

*x* = 2,01.

1. Полагая 0,01, получим

*f (x)* = *f* (2)=523 - 22 +3 = 39;

*f ′(x)* = *f* ′(2) (5*x*3 -2*x +*3)*′* = (15 *x*2 - 2)= (152 – 2)0,01 = 0,58.

По формуле (1) находим *f* (2,01) = 39 + 0,58 = 39,58.

Найдем точное значение функции: *f* (2,01) = 5(2,01)3 - 22,01 + 3 = 39,583005.

Применяя формулу (1) легко получить различные формулы для нахождения приближенных числовых значений. Рассмотрим формулы, имеющие практическое значение в приближённых вычислениях.

Формулы для приближенного вычисления степеней:

n  n + n*x*n-1. (2)

Частные случаи формулы (2):

1. n=2, 2  2 + 2*x*;
2. n=3, 3  3 + 3*x2*;
3. *x*=1, n  + n.

Формула для приближенного вычисления корней:

n n (3)

Частные случаи формулы (3):

1. n=2, +;
2. n=3, +;
3. *x*=1, n+.

Формула для приближенного вычисления обратных величин:

+2 (4)

Частные случаи формулы:

1. +2;
2. *x*=1, 1-
3. *x*=1 и 1+

**Пример 3**

Найти приближенные значения: 1) (4,012)2; 2) ; 3) 1/1,004

1. Полагая в соотношении (2) 0,012, получим

(4,012)2 = (4+0,012)2 42 +240,012 = 16,096 16,1 (точный ответ16,096144).

1. Полагая в соотношении (3) 0,006, получим = 1+ 0,006/2 =1,003.
2. Полагая в соотношении (4) 0,004, получим 1/(1+0,004)=1- 0,004= 0,996.

**Ход работы:**

**Вариант 1.**

Найти приближенное значение приращения функции *y=*3*x*2*+*5*x* + 1 при *x* = 3 и = 0,001.

Найти приближенное значение функции *f (x) =*2*x*2 *- x* + 1 при

*x* = 2,01.

Найти приближенные значения степеней: (9,06)2; (1,0005)10;

Найти приближенные значения корней: ;

Найти приближенные значения величин: 1/ 0,99.

**Вариант 2.**

Найти приближенное значение приращения функции *y=x*3*+ x* - 1при *x* = 2 и = 0,01.

Найти приближенное значение функции: *f (x)* = *x*2*+*3*x* + 1 при *x* =3,02.

Найти приближенные значения степеней: (1,012)3; (0,975)4

Найти приближенные значения корней:

Найти приближенные значения величин: 1/9,93; 1/(1,004)2.

**Вариант 3.**

Найти приближенное значение приращения функции: 1) *y=*3*x*2*-*2*x* +1 при *x* = 2 и = 0,01.

Найти приближенное значение функции: *f (x)* = *x*2*-* 3*x* + 2 при *x* = 2,01; .

Найти приближенные значения степеней: (1,012)3; (0,975)4

Найти приближенные значения корней: ;

Найти приближенные значения величин: 1/ 0,93; 1/(1,004)2.

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) Запишите формулы для нахождения приближенных числовых значений.

2) в чем заключается геометрический смысл замены приращения функции ее дифференциалом?

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

**Название практической работы:** Применение основных методов интегрирования.

**Цель работы:** научиться интегрировать неопределенные интегралы заменой переменной и по частям.

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия о математическом синтезе и анализе (первообразная функции, неопределенный интеграл);

**умения:**

применять математические методы для решения профессиональных задач.

**Теоретическая часть**

**1 Неопределенный интеграл**

Общее выражение совокупности для всех первообразных данной непрерывной функции называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается: , где – подынтегральное выражение; *С* – постоянная интегрирования, способная принимать любое значение.

с2.jpgх.jpgо.jpgГеометрический смысл неопределенного интеграла: это семейство кривых, зависящих от одного параметра *С*, которые получаются путем параллельного сдвига вдоль оси *OY*.

Рис. 3.1 Кубическая парабола

**2. Некоторые свойства неопределенного интеграла:**

1. Интеграл от суммы равен сумме интегралов.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Таблица 3.1

**Таблица основных формул интегрирования**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 7. |
| 1a. | 8. |
|  | 9. |
|  | 10. |
|  | 11. |
|  | 12. |
|  | 13. |
|  | 14. |

**3. Основные способы интегрирования**

1. *Метод непосредственного интегрирования,* который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличному виду.

**Пример 1**

Найти неопределенный интеграл

*Решение:*

Используя свойства неопределенного интеграла: интеграл от суммы равен сумме интегралов и постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, получаем

и затем используя формулы 2 и 5 из табл.3.1:

**Пример 2**

*Решение:*

*2. Метод подстановки (метод введения новой переменной).*

Найти неопределенный интеграл.

**Пример 3**

*Решение:*

Положим х+1=t, тогда x=t-1; ;

Продифференцировав х+1=t, получим dx=dt

+C

Обязательно возвращаемся к прежней переменной.

**Пример 4**

*Решение:*

Проведем замену

**Пример 5**

*Решение:*

**Правило:** Интеграл от нечетной степени синуса или косинуса находим путем отделения одного множителя, затем, используя формулу , разбиваем на 2 интеграла и далее замена переменных.

**Пример 6**

Найти неопределенный интеграл

*Решение:*

**Правило:** Интеграл от четной степени синуса или косинуса можно найти путем понижения степени вдвое по формулам половинных углов:

**Пример 7**

**Пример 8**

Найти неопределенный интеграл

*Решение:*

По формуле 13 табл.

**Пример 9**

Найти неопределенный интеграл:

*Решение:*

По формуле 14 табл.3.1:

*3. Интегрирование по частям*

Формула 

применяется для вычисления интегралов следующих видов

1) , , , где Р(х)- многочлен, к=const, к≠0 для вычисления интегралов такого вида применяют замену U=P(x);

2) ,  где Р(х)- многочлен, для вычисления интегралов такого вида применяют замену P(x)dx=dV;

3) где а, в- const, для вычисления интегралов такого вида применяют замену U=eax.

**Пример 10.**



**Пример 11.**



**Пример 12.**





**Пример 13.**





**Ход работы:**

**Вариант 1**

1. Найти функцию по ее дифференциалу если функция принимает значение 2 при x=2
2. Найти интегралы: а) б)

в)

1. Найти интегралы: 

**Вариант 2**

1. Найти функцию по ее дифференциалу если функция принимает значение 6 при x=1
2. Найти интегралы: а) б)

в)

3. Найти интегралы: 

**Вариант 3**

1. Найти функцию по ее дифференциалу если функция принимает значение при x=
2. Найти интегралы: а) б)

в) .

3. Найти интегралы: 

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) что такое неопределенный интеграл

2) назовите основные методы интегрирования

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

**Название практической работы:** Применение определенного интеграла к решению задач.

**Цель работы:** Научиться решать прикладные задачи с помощью интегрального исчисления

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия о математическом синтезе и анализе (неопределенный интеграл, методы вычисления неопределенного интеграла, определенный интеграл, вычисление определенного интеграла);

**умения:**

применять математические методы для решения профессиональных задач;

**Теоретическая часть**

**1. Определенный интеграл**

*Определенный интеграл* – это общий предел всех интегральных сумм функции f(x) на отрезке . Интегральная сумма , где - произвольная точка произвольного отрезка.

Обозначается , где f(x)-подынтегральная функция, х-переменная интегрирования, a и b – пределы интегрирования.

Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница), устанавливающая связь между определенным и неопределенным интегралом, имеет вид:

*Определенный интеграл –* это разность значений любой первообразной функции для f(x) при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

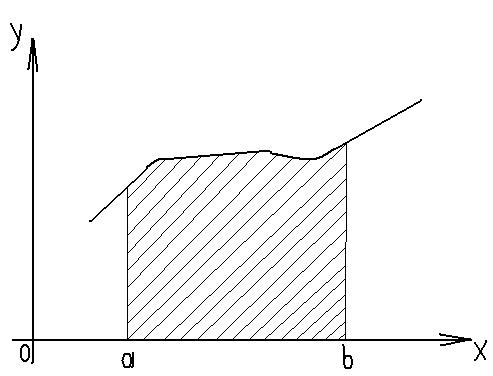
**2. Свойства определенного интеграла**

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла.

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

4.Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых.

5.Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

**3. Геометрический смысл**определенного интеграла: он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми х=а; х=b; y=0 и частью графика функции y=f(x), взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна.   
 **= F(b) – F(a)**

**4. Вычисление определенного интеграла:**

**Пример 1**

.

*Решение:*

Применяя формулу Ньютона-Лейбница и свойства определенного интеграла, получим

.

**Пример 2**

*Решение:*

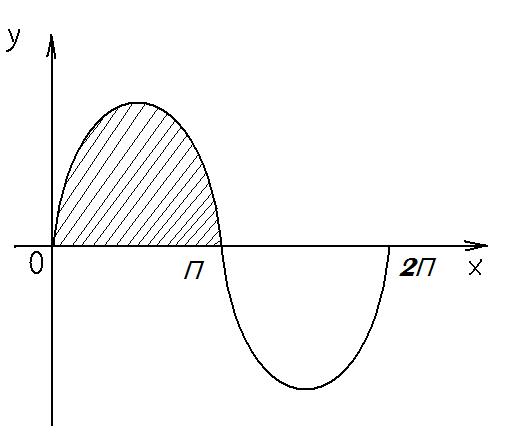
Вводим новую переменную интегрирования, полагая =t.

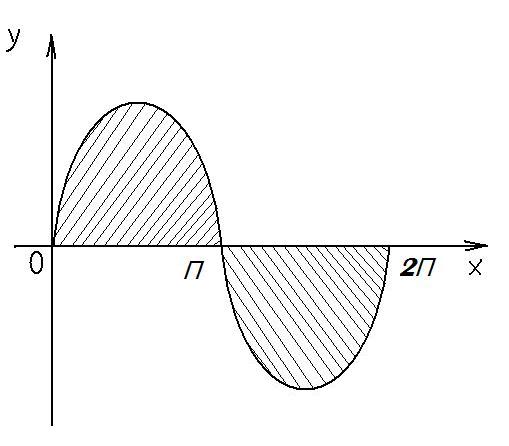
Отсюда находим новые пределы интегрирования: .

Подставляя, получим:

**6. Применение определенного интеграла для решения прикладных задач.**

**Пример 1**

Определить площадь полуволны синусоиды. 

**Пример 2**

Определить площадь полной синусоиды.

*Решение:*

*Ответ: S=0.*

**Пример 3**

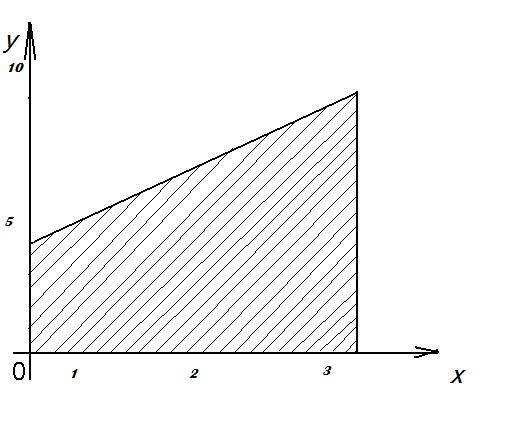
Сколько краски нужно, чтобы закрасить области, заштрихованные на рисунке задачи 3.15?

*Решение:*

Для ответа на этот вопрос надо брать площади по модулю

**Пример 4**

Определить площадь фигуры, образованной функцией и осью, при изменении *х* от 0 до 3.

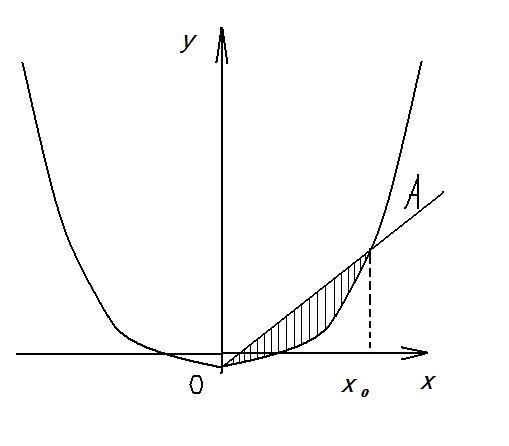


**Пример 5**

Вычислить площадь между линиями .

*Решение:*

Искомая площадь – это разность между площадью треугольника ОА и площадью криволинейного треугольника, ограниченного сверху участком параболы.



Точку - абсциссу точки пересечения графиков находим из уравнения

**Пример 6**

Определить силу давления воды на стенку аквариума с основанием 1,8 м и высотой 0,6 м.

*Дано: Решение:*

I=1,8м

H=0,6м Величина p давления жидкости на горизонтальную

площадку зависит от глубины ее погружения х, т.е. от

F-? расстояния площадки до поверхности жидкости

P=

G=9,8 Площадь этой полоски .

**Ход работы:**

**Вариант 1.**

Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями: 

**Вариант 2.**

Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями: 

**Вариант 3.**

Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями: у=1-х2, у=х2+2, х=0, х=1.

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

2) в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7**

**Название практической работы:** Решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

**Цель работы:** Научиться решать дифференциальные уравнения первого и второго порядка.

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия о математическом синтезе и анализе (дифференциальное уравнение первого и второго порядка);

**умения:**

применять математические методы для решения профессиональных задач.

**Теоретическая часть**

**1. Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях**

*Дифференциальное уравнение* - это равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции. Общий вид дифференциального уравнения: F(x, y, , …)=0, здесь F- некоторая известная функция, зависящая от нескольких переменных.

Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных знаков, в Фописаниях конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решении соответствующих дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения называются *обыкновенными*, если неизвестная функция зависит только от одного аргумента.

*Порядок* дифференциального уравнения – это порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении.

Например: уравнение - это дифференциальное уравнение второго порядка.

*Интеграл* (или решение) уравнение – это функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению.

Например, функция у=2х является интегралом уравнения , так как, найдя производные этого уравнения и подставляя их в данное уравнение, мы получим тождество -4х+4х=0.

*Общее решение* дифференциального уравнения содержит столько независимых постоянных, каков порядок уравнения.

*Частное решение-*это функция, получаемая при различных числовых значениях произвольных постоянных.

**2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям**

Рассмотрим задачу, приводящую к дифференциальному уравнению: установить закон изменения скорости U свободно падающего тела массой m без учёта силы сопротивления воздуха.

Согласно второму закону Ньютона,

где mg-сила тяжести.

Полученное уравнение является дифференциальным, так как в него входит производная искомой функции U. Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию , которая торжественно удовлетворяет этому уравнению. Легко проверить, что уравнению удовлетворяет функция вида U=gt+C, где С-любое число. Указав начальные условия, можно найти одну функцию, удовлетворяющую уравнению. Так, если при t=0 и U=, то получим функцию

Существует много задач из различных областей знаний, решение которых сводится к составлению и решению дифференциальных уравнений.

**3. Дифференциальные уравнения первого порядка**

**Пример 1**

Проверить подстановкой, что дифференциальное уравнение имеет общее решение в виде

Найти частное решение, удовлетворяющее условию y=3 при х=0.

*Решение:*

Подставим дифференциальное уравнение:

- это тождество.

Частное решение:

; =>C=3

- частное решение.

**4. Уравнения с разделяющимися переменными**

Уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если функции Р и Q разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

В таком уравнении после деления членов на перемещенные разделяются:

И каждый член уравнения зависит от одной переменной.

Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

**Пример 1**

Найти общие интегралы уравнения:

*Решение:*

Разделим переменные в данном уравнении, деля обе его части на

Почленно интегрируя, получим искомое общее решение:

**Пример 2**

Найти частное решение дифференциального уравнения , при x=2, у=5.

*Решение:*

; ;

Умножим на ;

;

- это общее решение дифференциального уравнения.

*Найдем частное решение*. Для этого вычислим *С* при х=2 и у=5.

. Частное решение

**5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка**

Уравнение первого порядка называется *однородным*, если можно представить как функцию только одного отношения переменных , т.е. уравнение вида .

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, следовательно, решается посредством замены функции у (или х) новой функцией *u* по формуле

**Пример 1**

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

*Решение:*

Из уравнение следует, что

Так как полученное уравнение является функцией только отношения , то оно однородное.

Вводим новую функцию *u*. Пологая , продифференцируем по *x:*

Прировняем (1) и (2): .

Подставим y=ux. Получим .

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

Общее решение уравнения имеет вид:

**Пример 2**

Найти частное решение однородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию y=-9, при х=1.

*Решение:*

Приведем уравнение к виду.

Полученное уравнение является функцией только , следовательно, оно однородное.

Для решения положим y=ux и продифференцируем по х:

Заменим и в исходном уравнении:

u+x = 2 - u.

Разделяем переменные: ;

; .

Проинтегрируем: 2

21n

Общее решение уравнения:

; или

Частное решение: ; . Ответ:

**6. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами**

Уравнение вида называются *линейными однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Общий интеграл находится с помощью характеристического уравнения:

которое получается из этого уравнения, если, сохраняя в нем все коэффициенты , заменить функцию *y* единицей , а все ее производные заменить соответствующими степенями *k.* При этом:

1. Если все корни характеристического уравнения *действительные* и *различные*, то общий интеграл имеет вид:
2. Если характеристическое уравнение имеет корни *действительные* и *равные ,* то
3. Если корни *мнимые .*
4. Если корни *комплексные*  *.*

Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений:

**Пример 1**

*Решение.* Составим характеристическое уравнение:

Общее решение:

**Пример 2**

*.*

*Решение.* Составим характеристическое уравнение:

Общее решение:

**Пример 3**

*Решение:*

**Пример 4**

*Решение:*

**Пример 5**

*Решение:*

**Ход работы**

**Вариант 1**

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

а)

б)

2.

**Вариант 2**

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

а)

б)

2.

**Вариант 3**

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

а)

б)

2.

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) запишите определение дифференциального уравнения

2) назовите виды дифференциальных уравнений

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

**Название практической работы:** Решение задач с использованием дифференциальных уравнений.

**Цель работы:** Научиться решать профессиональные задачи с использованием дифференциальных уравнений

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия о математическом синтезе и анализе (дифференциальные уравнения, интегрирование);

**умения:**

применять математические методы для решения профессиональных задач.

**Теоретическая часть**

Дифференциальные уравнения являются основой огромного количества расчетных задач из самых различных областей науки и техники.

**Примеры применения дифференциального уравнения**

**Пример 1.**

*Для некоторой фирмы функция маржинальной выручки от продажи своей продукции имеет вид MR*=10−0,2*q. Здесь MR – маржинальная выручка фирмы, а q– объем продукции. Нужно найти общую выручку.*

Как видно из задачи, это прикладной пример из микроэкономики. Множество фирм и предприятий постоянно сталкивается с подобными расчетами в ходе своей деятельности.

Приступаем к решению. Как известно из микроэкономики, маржинальная выручка представляет собой производную от общей выручки, причем выручка равна нулю при нулевом уровне продаж.

С математической точки задача свелась к решению дифференциального уравнения *R*′=10−0,2*q* при условии *R*(0)=0.

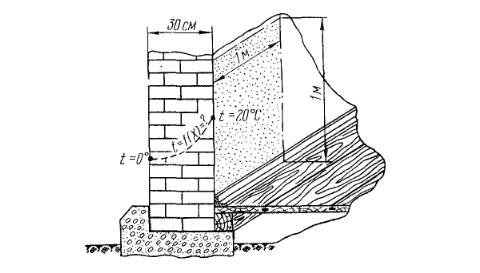
Проинтегрируем уравнение, взяв первообразную функцию от обеих частей, получим общее решение: *R*(*q*)=∫(10−0,2*q*)*dq*=10*q*−0,1*q*2+*C*.

Чтобы найти константу *C*, вспомним условие *R*(0)=0. Подставим: *R*(0)=0−0+*C*=0.

Значит C=0 и наша функция общей выручки принимает вид *R*(*q*)=10*q*−0,1*q*2. Задача решена.

**Пример 2.**

Распределение температуры внутри ограждающих поверхностей.

Кирпичная стена толщиной 30 см имеет температуру на внутренней поверхности 20 градусов, а на наружной 0 градусов. 

Найти зависимость температуры внутри стены от расстояния до ее наружного края и количество теплоты, которое отдает наружу 1квадратный метр стены в течение суток.

Решение:

Количество теплоты, проходящее через единицу поверхности в единицу времени, равно:

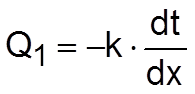


где: t- температура; х- расстояние до наружной стены; к- коэффициент теплопроводности (для кирпича- 0,2 ккал/м\*ч\*град); dt/dx- характеризует интенсивность падения температуры по направлению теплового потока перпендикулярно к поверхности стены.

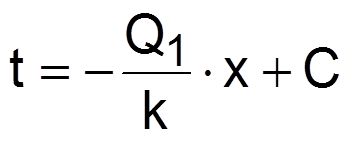
Пусть температура внутри стены есть функция расстояния до наружной поверхности х, т.е. T=t(x).

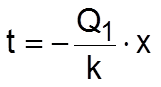
Интенсивность падения температуры по нормали к поверхности стены определяется производной dt/dx.

Возьмем на расстоянии х от наружной стены слой толщиной dx с постоянной (внутри этого элементарного слоя) температурой t. Количество теплоты Q1, проходящее через этот слой, будет постоянным и по условию: 

Так как поверхность S=1 квадратному м, то:**

Решим полученное уравнение: Q1 = - K ∙, dt = ∙ , = ∙ , t = ∙ + C

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: 

Начальное условие: при х=0 t=0, откуда согласно уравнению, С=0. Тогда искомый закон температуры внутри стены:

Если наружная температура -200, то x = 0 t = -200 -20= - ∙0 = C, C = - 20

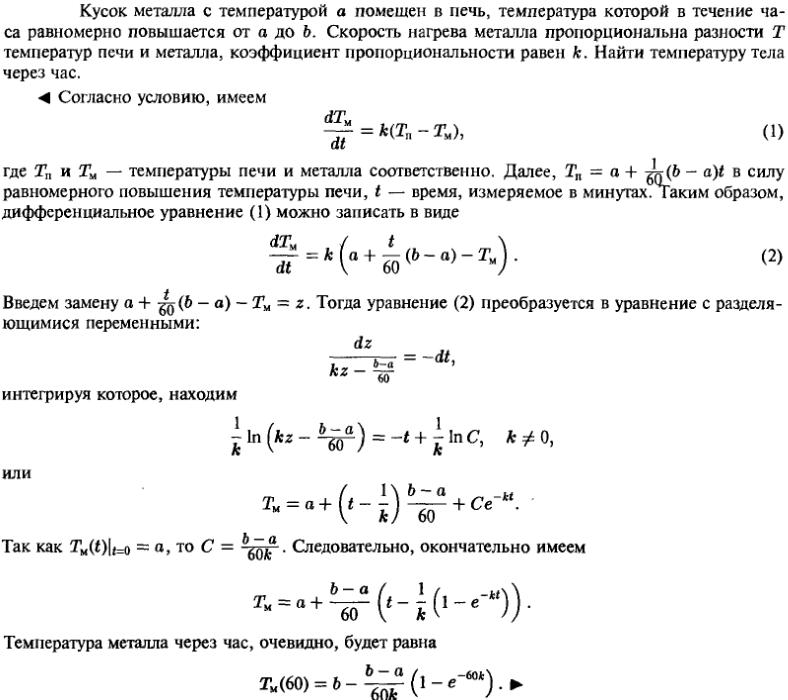
t = - ∙x – 20, Q = - = - = - , Q = 640 ккал.

Надо искать материалы с более низким коэффициентом теплопроводности.

**Пример 3**.

Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a градусов до b градусов. При разности температур печи и металла в Т градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

Решение:



**Пример 4.**

В прямоугольный бак размером 60 см x 75 см и высотой 80 см поступает 1,8 л воды в cекунду. В дне имеется отверстие площадью 2,5 см2. За какое время наполнится бак? Сравнить результат с временем наполнения такого бака без отверстия в дне.

Решение:

Пусть жидкость вытекает из некоторого сосуда через отверстие в нем со коростью, равной 0,6 , где = 10 , h – высота уровня жидкости над отверстием.

В прямоугольный бак размером 60 см × 75см и высотой 80 см поступает 1,8 л воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью S =2,5 см2. За какое время наполнится бак?

Пусть h (t)– высота уровня воды в баке. Тогда ΔV1 = (h (t+Δt))60∙70 – приращение ее объёма за время от t до t+Δt. Это увеличение (или уменьшение) объёма происходит за счет поступления ΔV2 воды и ее утечки в количестве ΔV3 через отверстие. Таким образом, имеем уравнение ΔV1 = ΔV2 – ΔV3. Поскольку ΔV2 = 1800 Δt, ΔV3 =2,5∙0,6 Δt,

t1 (t, t+Δt), то последнее уравнение можно представить в виде

4500 (h (t+Δt) - h (t)) = 1800Δt – 2,5∙0,6 Δt, ≈ 10. (1)

Разделив в (1) обе части на Δt и совершив предельный переход при Δt → 0, получим дифференциальное уравнение

30 = (12 – 0.01,

Проинтегрировав которое, найдем:

t + C = - ( + ln(12-0.01) ). (2)

Пусть h(0) = 0, тогда из (2) следует, что *С* = -3600 ln12. Подставив в (2) h = 80? Найдем время t1, за которое наполнится бак:

t1 = 1200 (3ln - 1) ≈ 260c/

**Ход работы:**

**Задача 1.**

Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными http://www.matburo.ru/Examples/ma_diff/img6-0.gif. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию http://www.matburo.ru/Examples/ma_diff/img6-1.gif.

**Задача 2.** Скорость остывания нагретого тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. За 10 минут тело охладилось от 100 до 60 градусов. Температура среды постоянна и равна 20 градусам. Когда тело остынет до 25 градусов?

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) каким методом решаются дифференциальные уравнения?

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

**Название практической работы**: Вычисление вероятностей событий.

**Цель работы:** Научиться вычислять вероятности событий.

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия теории вероятности и математической статистики (случайное событие, вероятность, основные теоремы вероятностей);

основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

**умения:**

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

**Теоретическая часть:**

1. **Случайное событие**

Случайное событие – это любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти. Случайное событие – это результат испытания.

Испытание (опыт, эксперимент) – в этом определении понимается определение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат. Испытание может проводиться человеком, но может осуществляться и независимо от человека. Человек в этом случае выступает в роли наблюдателя.

Событие обозначаются начальными прописными (заглавными) буквами латинского алфавита **А, В, С**.

Достоверное событие – это событие, которое в результате испытания обязательно должно произойти.

1. Невозможное событие – это событие, которое в результате испытания вообще не может произойти.

События называются несовместимыми, если наступление одного из них исключает появление другого. В противном случае события – совместные.

Противоположные события: два события А и Ā называются противоположными, если не появление одного из них в результате данного испытания влечет появление другого. (Ā читается «не A»).

**2. Вероятность случайного события**

Численная мера степени объективности возможности наступления события называется *вероятностью случайного события*.

*Классическое определение* вероятности события А:

P(A) =

Вероятность события А равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию А (m), к общему числу случаев (n).

**Пример 1**

Лабораторная крыса, помещенная в лабиринт, должна избрать один из пяти возможных путей. Лишь один из них ведет к поощрению в виде пище. В предположении, что крыса с одинаковой вероятностью изберет любой путь, какова вероятность выбранного пути, ведущего к пище?

*Решение:*

**Пример 2**

При бросании игральной кости, возможно, шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6

очков. Какова вероятность появления четного числа очков?

*Решение*: *P(A)* = =

Событие А – «появление четного числа очков» благоприятствуют 3 исхода (2, 4 и 6 очков).

**Пример 3**

Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

*Решение:* Обозначим через А событие, состоящее в том, что число на взятой карточке кратно 5. В данном испытании имеется 30 равновозможных исходов, из которых событию А благоприятствуют 6 исходов 5, 10, 15, 20, 25, 30).

Следовательно, P(A) = = 0,2

**Пример 4**

Подбрасывают 2 монеты. Какова вероятность, что обе упадут «гербом» кверху?

*Решение:*  4 исхода бросания монет: ГГ, ГР, РГ, РР.

Пусть событие А – «выпали 2 герба» - этому событию благоприятствует один исход. P(A) = = = 0,25

**Пример 5**

Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 7 или 8?

*Решение:*

Обозначим события: А – «выпало 7 очков», В –«выпало 8 очков».

Событию А благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1).

События В благоприятствует 5 исходов: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2).

Всех равновозможных исходов n=62 =36.

P(A) = = = 0,167, P(B) = = 0,139

Итак, Р(А) > Р(В) получить в сумме 7 очков более вероятное событие, чем в сумме 8 очков.

**3. Статистическое определения вероятности**

Относительная частота события – это доля тех фактически проведенных испытаний, в которых событие А появилось W = Р\*(А)= . Это опытная экспериментальная характеристика, где m – число опытов, в которых появилось событие А; n – число всех поведенных опытов.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний Р(А) =

**Пример 6**

Из 982 больных, поступивших в хирургическую больницу за месяц, 275 человек имели травмы. Какова относительная частота поступления больных с этим видом заболевания?

*Решение*: Р\*(А) =

**Пример 7**

При стрельбе по мишени частота w=0,75. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

*Решение*: W = ⇒m = Wn; m = 0,75·40 = 30.

*Ответ*: было получено 30 попаданий.

**4. Закон сложения вероятностей**

Сумма двух событий – это такое событие, при котором появляется хотя бы одно из этих событий (А или В).

Если А и В совместные события, то их сумма А+В обозначает наступление события А или события В, или обоих событий вместе.

Если А и В несовместимые события, то сумма А+В означает наступление или события А или события В.

**Пример 8**

Победитель соревнования награждается призом (событие А), денежной премией (событие В), медалью (событие С). Что представляют собой события А+В?

*Решение:*

События А+В состоит в награждении победителя или призом денежной премией, или тем и другим.

**Пример 9**

Турист имеет возможность посетить 3 города: А, В и С. Обозначаем события: А – турист посетил город А; В- турист посетил город В;

С-турист посетил город С. В чем заключается событие А+С?

*Решение*:

Турист посетил только один из городов А или С, или он посетил их оба.

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий: Р(А+В)=Р(А)+(В).

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей их совместного появления: Р(А+В)=Р(А)+(В) – Р(АВ).

Сумма вероятностей дискретный событий, образующих полную группу, равна единице Р(А1 )+ Р(А 2)+…= Р(Аn)=1

Или

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: Р(А)+Р(Ā)=1.

**Пример 10**

Пусть вероятность того, что забег выигрывает Джим, равна , а вероятность того, что забег выиграет Том, равна . Какова вероятность того, что забег выиграет один из них?

Решение: P(A +B) = +

**Пример 11**

Вероятность того, что у взрослого пациента все зубы сохранились равна 0,67. Вероятность того, что некоторые зубы отсутствуют равна 0,24. Вероятность того, что он беззубый равно 0,09. Вычислить вероятность того, что у пациента несколько зубов.

*Решение*: Р(А+В)=Р(А)+Р(В)=0,67+0,24=0,91.

**Пример 12**

Вероятность попадания в опухолевую клетку «мишень» первого радионуклида равна Р =0,7, а второго –Р =0,8. Найти вероятность попадания в клетку - «мишень», если бы одновременно использовались оба препарата.

Решение: Р(А+В)=Р(А)+Р(В) - Р(А ·В)=0,7+0,8 - 0,56=0,94.

Для непрерывных случайный величин условие нормировки имеет вид:

**Пример 13**

В большой популяции плодовой мушки 25% мух имеют мутацию глаз, 50% - мутацию крыльев, а 40% мух с мутацией глаз и крыльев. Какова вероятность того, что у мухи, наудачу выбранной из этой популяции, окажется хотя бы одна из этих мутаций?

*Решение:*

А – Событие, состоящее в том, что случайно выбранная мха имеет мутации глаз. В есть событие, состоящее в том, что случайно выбранная муха имеет мутацию крыльев. Вероятность того, что муха имеет одну или обе мутации:

Р(А+В)=Р(А)+Р(В) - Р(АВ). Тогда Р(А+В)=0,25+0,5 - 0,4· 0,25=0,65.

**4. Условная вероятность**

Условная вероятность события В – это вероятность события В, найденная при условии, что событие А произошло. Обозначается Р(А/В).

**Пример 14**

В коробке содержатся 3 белых и 3 желтых таблетки. Из коробки дважды вынимают наугад по одной таблетке, не возвращая их в коробку. Найти вероятность появления белых таблеток при втором испытании (событие В), если при первом испытании была извлечена желтая таблетка (событие А).

*Решение:* После первого испытания в коробке осталось 5 таблеток, из них 3 белых.

Искомое условие вероятности: Р(В/А)= 3/5 =0,6.

**Пример 15**

В коробке находится 8 красных и 6 белых таблеток. Из коробки последовательно без возвращения извлекают 3 таблетки. Найти вероятность того, что все 3 таблетки белые.

*Решение:*

Обозначим; А1 - первая таблетка белая, А2 - вторая таблетка белая, А3 - третья таблетка

белая.

Р(А1А2 А3)=Р(А1)Р(А2 /А1)·Р(А3 /А1 А2);

Р(А1 )= ; Р(А2 /А1)= ; Р(А3 /А1 А2) = ;

P(A) = P(A1A2A3) = = 0,055.

**Пример 16**

Предположим, что в некоторой семье имеются 2 ребенка.

1. Какова вероятность, что оба ребенка – мальчики?

2. Если известно, что, по крайней мере, один из детей – мальчик, то какова вероятность того, что об ребенка – мальчики?

3. Если известно, что старший ребенок – мальчик, то вероятность того, что оба ребенка – мальчики?

*Решение:*

1. Четыре равновероятных события ММ, МД, ДМ ДД; Р(ММ)= 1/4 .

2. Исключается вариант ДД: Р(ММ)= 1/3.

3. Варианты только: ММ, МД: Р(ММ)= 1/2.

**5.Закон умножения вероятностей**

Произведение двух событий – это событие, состоящее в совместном появлении этих событий (А и В).

**Пример 17**

Пусть имеются следующие события: А – «из колоды карт вынута дама»; В – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Что представляет собой событие АВ?

*Решение:* АВ есть событие «вынута дама пик».

Событие В называются независимыми от события А, если появление события А не изменяет вероятности появления события В.

Вероятность появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

Р(А·В)=Р(А)· Р(В).

Для зависимых событий:

Р(АВ)=Р(А) ·Р(В/А).

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло.

**Пример 18**

Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

*Решение*: Р(А/В)=Р(А) ·Р(В) = .

**Пример 19**

Вероятность того, что у взрослого пациента все зубы сохранились равна 0,67. Какова

вероятность того, что у двух не имеющих отношения друг к другу больных, ожидающих приема в кабинете стоматолога, есть все зубы?

*Решение*: Р(А · В)=Р(А) · Р(В)=0,67 · 0,67=0,45.

**Пример 20**

Найти вероятность того, что в семье из двух детей:

1. оба ребенка – мальчики; 2) оба ребенка – девочки; 3) старший ребенок

мальчик, а младший – девочка. Вероятность рождения мальчика – 0,515.

*Решение:*

Р(ММ)=Р(М) ·Р(М)=0,515 ·0,515=0,265;

Р(ДД)=0,485· 0,485=0,235;

Р(МД)=0,515· 0,485=0,25

**Пример 21**

Известно, что в 3 случаях из 250 на свет появляются близнецы, причем в одном случае – это истинные (монозиготные) близнецы. Какова вероятность, что у определенной беременной женщины родятся близнецы мальчик и девочка. Учтите, что однояйцовые близнецы никогда не бывают разных полов – это обязательно либо 2 мальчика, либо 2 девочки.

*Решение*:

Вероятность иметь дизиготных близнецов равна:

Р(А)= ; 1 – Р(В) = 1 - =

Искомая вероятность:

Р(А)· Р(В)= · · · = .

**Пример 22**

Вероятность того, что студент в летнюю сессию сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы 1)только второй экзамен; 2)все три экзамена.

*Решение*:

1. Р(В)=Р(А1 А2 А3 )=Р(А1 ) · Р(А2 ) · Р(А3 )=0,1 0,9 0,2=0,018
2. Р(А1А2 А3)=Р(А1) · Р(А2 ) · Р(А3 )=0,9 0,9 0,8=0,648.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из событий А1 , А2 ,…, Аn , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий 1 , Ā2 , …, Ān.

**Пример 23**

Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий такова: Р1 = 0,75; Р2 = 0,8; Р3 = 0,85. Какова вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех этих орудий?

*Решение*:

g1= 1 – Р1 = 1 – 0,75= 0,25;

g2= 1 – Р2 = 1 – 0,8 = 0,2;

g3= 1 – Р3 = 1 – 0,85= 0,15;

Р(А) = 1 – g1g2g3;

Р(А)= 1 – 0,25 · 0,2 · 0,15=0,9925.

**Пример 24**

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

*Решение:*

Вероятность того, что в мишень попадет первый стрелок и не попадет второй, равна: Р(А1 Ā2)=0,7· (1-0,8)=0,7· 0,2=0,14

Вероятность того, что попадает второй стрелок в мишень и не попадет первый, равна: Р(Ā1 А2)=(1 – 0,7)· 0,8=0,3·0,8=0,24.

Вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок, равна сумме этих вероятностей: Р(А1 Ā2 )+Р(А1 Ā2 )=0,14+0,24=0,38.

**Пример 25**

Сколько должна планировать пара иметь детей, что бы вероятность хотя бы одного мальчика была выше 90% (вероятность рождения мальчика и девочки – 0,5).

*Решение:* Пусть вероятность того, что все девочки:

Р(Д) = …n = n= 0,9

Вероятность того, что не все девочки:

Р(хотя бы один мальчик) = 1 - n = 0,9.

0,1= n; 1/2n; 2n = 10 ⇒n≈ 4.

**6.Формула Байеса**

Формула Байеса применяется, когда событие *А,* которое может появиться только с одной из гипотез *Н1, Н2 …Нп*, произошло и необходимо произвести количественную пе­реоценку *априорных* вероятностей этих гипотез *Р(Н1), Р(Н2),* ..., *Р(Нп),* известных до испытания, т.е. найти *апостериорные* (получаемые после проведения испытания) условные вероятности гипотез Р(Н1/А), Р(Н2/А), …, *Р(Нп/А):*

*Р(Нi/А)* =

Или вместо *Р(А)* используем ее значение, вычисленное по формуле полной вероятности:

*Р(Нi/А) =*

Итак, пусть до опыта имеются гипотезы *Н1, Н2, ..., Нп*. После опыта становится известной информация о результа­тах опыта, но не полная, а именно: результаты наблюде­ний показывают, что наступило некоторое событие А.

Считается, что до опыта были известны *(априорные)* вероятности гипотез *Р(Н1),Р(Н2), ...,Р(Нп)* и *условные* вероятности *Р(А/Н1),* Р(А/Н2),..., *Р(А/Нп).* Необходимо определить *апостериорные* вероятности гипотез *Р(Н1/А), Р(Н2/А), ..., Р(Нп/А).*

Значение формулы Байеса состоит в том, что при наступ­лении события *А,* т.е. по мере получения новой информа­ции, мы можем проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы. Такой подход называется байесовским.

**Пример 26**

Два охотника одновременно стреляют одинаковыми пу­лями в медведя. В результате медведь был убит одной пу­лей (событие *А).*

Как охотники должны поделить шкуру убитого медведя, если известно, что вероятность попадания у первого охотника 0,3,а у второго 0,6?

*Решение:*

Воспользуемся формулой Байеса. Определим предвари­тельно гипотезы.

Гипотеза *Н1 :* попал первый охотник, второй промахнулся.

Гипотеза *Н*2: попал второй, первый промахнулся.

Гипотеза *Н3:* попали оба охотника.

Гипотеза *Н4*: оба промахнулись.

Событие *А* может произойти только тогда, когда про­изошла либо гипотеза *Н1*, либо гипотеза *Н*2, т. е.:

*Р(А/Н1)=1, Р(А/Н3)=0*

*Р(А/Н2)=1, Р(А/Н4)=0*

Предполагаем, что попадания охотников в медведя не зависят друг от друга. И получаем:

*Р(*) = 0,3·(1 – 0,6) = 0,12;

*Р(Н2*) = 0,6·(1 – 0,3) = 0,42;

*Р(Н3*) = 0,3·0,6 = 0,18;

*Р(Н4*) = (1 – 0,3)(1 – 0,6) = 0,28.

Применяем формулу Байеса:

Р(Н1/А) =

Р(Н1/А) =

Р(Н2/А) =

Р(Н2/А) = .

Таким образом, при справедливом делении первый охотник должен получить шкуры, т.е. меньше четвертой час­ти шкуры, в то время как, на первый взгляд, казалось, что ему причитается шкуры (0,3).

**Ход работы:**

**Вариант 1**

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6?
2. Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты она три раза упадет гербом кверху?
3. Консультационный пункт университета получает пакеты с контрольными работами из городов А, В и С. Вероятность получения пакета из города А равна 0,6, а из города В – 0,1. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города С.
4. Вероятность того, что в летнюю сессию студент сдаст первый экзамен, равна 0,8; второй — 0,9; третий — 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст хотя бы один экзамен.
5. Имеется два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, а во втором — 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один ящик и вынимают из него шар. Какова вероятность того, что ос­тавшийся шар является белым?

**Вариант 2**

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 30 (включительно) является делителем числа 30?
2. В НИИ работает 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60-немецкий, а 50-знают оба. Какова вероятность того, что выбранный наудачу сотрудник не знает ни одного иностранного языка?
3. С первого предприятия поступило 200 пробирок, из которых 190 стандартных, а со второго – 300, из которых 280 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу взятая пробирка будет стандартной.
4. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность пораже­ния цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность рав­на 0,8.
5. Два автомата производят одинаковые хирургические за­жимы. Производительность первого автомата вдвое больше, чем второго. Первый автомат производит в среднем 60% зажимов отличного качества, а второй — 84%. Наудачу взятый зажим оказался отличного каче­ства. Найти вероятность того, что он произведен пер­вым автоматом.

**Вариант 3**

1. Группа туристов, состоящая из 12 юношей и 8 девушек, выбирает по жребию

хозяйственную команду в составе 4 человек. Какова вероятность того, что в числе

избранных окажется двое юношей и две девушки?

1. Имеется три урны. В первой находится 5 белых шаров и 3 черных, во второй – 6 белых и 2 черных, в третьей—10 белых шаров. Вынимают наугад один шар. Урна выбирается тоже наугад. Найти вероятность того, что этот шар белый.
2. На тридцати историях болезни написаны 30 двухзначных чисел от 1 до 30 (их порядковые номера). Эти истории болезней лежат на полке в случайном порядке. Какова вероятность вынуть историю болезни с номером, кратным 2 или 3?
3. Отдел технического контроля проверяет медицинское из­делие на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное
4. В пяти аптечках находятся одинаковые по массе и раз­мерам таблетки. В двух — по 6 зеленых и 4 желтых таб­леток. (Это аптечка состава Н1). В двух других аптечках (состава Н2) — по 8 зеленых и 2 желтых таблеток. В од­ной аптечке (состава Н3) — 2 зеленых и 8 желтых табле­ток. Наудачу выбирается аптечка и из нее извлекается таблетка, которая оказалась зеленой. Какова вероят­ность того, что зеленая таблетка извлечена из аптечки первого состава.

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) запишите определение случайного события, классическое определение вероятности случайного события

2) запишите закон сложения и умножения вероятностей событий

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

**Название практической работы**: Вычисление случайных величин. Вычисление математического ожидания и дисперсии случайной величины.

**Цель работы:** Научиться вычислять математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия теории математической статистики (виды случайных величин, математическое ожидание и дисперсия случайной величины);

основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности.

**Теоретическая часть:**

**1. Случайные величины**

*Случайная величина —* это величина, которая в результа­те испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно — заранее неизвестно).

*Дискретная случайная величина —* это случайная величи­на, когда принимает отдельное изолированное, счетное множество значений.

*Непрерывная случайная величина —* это случайная вели­чина, принимающая любые значения из некоторого интер­вала. Понятие непрерывной случайной величины возника­ет при измерениях.

Случайные величины обозначаются конечными заглавны­ми буквами латинского алфавита *X, У, Z ,* а их значения — соответствующими строчными буквами *х, у, z.*

**2.Закон распределения случайной величины**

Это всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответ­ствующими им вероятностями.

Для *дискретной* случайной величины закон распределе­ния может быть задан в виде *таблицы,* аналитически (в виде *формулы) и графически.*

*Таблица —* это простейшая форма задания закона рас­пределения. В ней перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины X и соответству­ющие вероятности. Эта таблица называется *рядом распределения.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *…* | *xn* |
| *p1* | *p2* | *…* | *pn* |

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной вели­чины, а по оси ординат — соответствующие их вероятно­сти. Соединение образует ломаную линию. Это многоуголь­ник или полигон распределения вероятностей.

х

x2

x3

xn

…

x1

Pi

*Полигон распределения вероятностей*

**Пример 1**

Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| хi | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Pi | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

A) Б)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| хi | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Pi | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

*Решение*

А) Да, так как выполняется условие : 0,1+0,4+0,3+0,2=1

Б) Нет: 0,1+0,2+0,3+0,5 ≠ 1.

**Пример 2**

В денежной лотереи выпущено 100 билетов. Разыгрыва­ется один выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 руб­лю. Найти закон распределения случайной величины *X —* стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

*Решение: в*озможные значения Х:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| xi | 50 | 1 | 0 |
| рi | 0,01 | 0,1 | 0,89 |

Р1 = ; Р2 = ; Р3 = 1 - (Р2 + Р1)

Контроль: 0,01 + 0,1 + 0,89 = 1

**Пример 3**

Вероятность того, что студент сдаст семестровый экза­мен по биофизике равна 0,7, а по биохимии — 0,9. Составь­те закон распределения числа семестровых экзаменов, ко­торые сдаст студент. Построить многоугольник распреде­ления вероятностей.

*Решение*

Возможные значения *X —* число сданных экзаменов: 0,1,2.

Считаем вероятности:

Р(Х=0) = Р(А1)·Р(А2) = (1 – 0,7)·(1 – 0,9) = 0,3·0,1 = 0,03

Р(Х=1) = Р(А1А2 + А1А2) = Р(А1)·Р(А2) + Р(А1)·Р(А2) = 0,7·0,1 + 0,3·0,9 = 0,34

Р(Х=0) = Р(А1А2 ) = Р(А1)·Р(А2) = (1 – 0,7)·(1 – 0,9) = 0,7·0,9 = 0,63.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 1 | 2 |
| рi | 0,03 | 0,34 | 0,63 |

Ряд распределения имеет вид:

Контроль: 0,03 + 0,34 + 0,63 = 1.

*Многоугольник распределения вероятностей*

**0,66**

**0,2**

**0,4**

**3**

**2**

**1**

**0**

**pi**

**xi**

**3.Функция распределения случайных величин**

Функция *F(х),* выражающая для каждого *х* вероятность того, что случайная величина *X*примет значение меньше некоторого фиксированного *х*, *называется функцией распре­деления* случайной величины *X: Р(х)* = *Р( X< х).* Ее также называют *интегральной функцией распределения* дискретных и непрерывных случайных величин.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 1 | 4 | 5 | 7 |
| рi | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |

**Пример 4**

Дан ряд распределения случайных величины:

Найти и изобразить график ее функции распределения.

*Решение*

Будем задавать различные значения хiи находить для F(х):

1. Если х ≤ 1, F(x) = 0
2. Пусть 1< х ≤4, (например, х = 2), F(x) = P(x = 1) = 0,4.
3. Пусть 4< х ≤ 5, (например, х = 4,25),

F(x) = P(X < x) = P(x=1) + P(x=4) = 0,5 + 0,4 = 0,5

1. Пусть 5< х ≤ 7, F(x) =(P(x=1)) + P(x=4) + P(x=5) = 0,5 + 0,3 = 0,8.
2. Пусть х>7

0,8

1,0

0,4

0,6

*Функция распределения дискретной случайности величин*

7

6

5

4

3

2

1

0

0,2

F(x) = (P(x=1) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=7) = 0,8 + 0,2 =1

Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки ко­торой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

**4. Числовые характеристики дискретной случайной величины**

1. *Математическим ожиданием* М(Х); дискретной слу­чайной величины называется сумма произведений всех ее значений не соответствующие им вероятности:

М(Х) =

**Пример 5**

Известны значения распределения случайных величин X и Y — число очков выбиваемых первым и вторым стрел­ками.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| pi | 0,15 | 0,11 | 0,04 | 0,05 | 0,04 | 0,10 | 0,10 | 0,04 | 0,05 | 0,12 | 0,20 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| pi | 0,01 | 0,03 | 0,05 | 0,09 | 0,11 | 0,24 | 0,21 | 0,10 | 0,10 | 0,04 | 0,02 |

Необходимо выявить, какой из двух стрелков стреляет лучше. Построить многоугольники распределения.

*Решение:*

Очевидно, что из двух стрелков лучше стреляет тот, кто в среднем выбивает большее количество очков.

*M(X) = 0·0,15 + 1·0,10 + 2·0,04 + … + 9·0,12 + 10·0,2 = 5,36*

*M(Y) = 0·0,01 + 1·0,03·0,05 + … +9·0,04 + 10·0,02 = 5,36*

То есть среднее число выбиваемых очков у двух стрелков одинаково.

**Пример 6**

Случайная величина Х задана законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *1* | *2* | *5* |
| *pi* | *0,3* | *0,5* | *0,2* |

*Решение: М(Х) = 1·0,3 + 2·0,5 + 5·0,2 = 2,3*

*2. Дисперсия* дискретной случайности величины. Слово «дисперсия» означает «рассеяние»:

D(X) = M(X – M(X))2.

*Дисперсией D(х)*случайной величины называется мате­матическое ожидание квадрата ее отклонения от математи­ческого ожидания.

*Среднее квадратическое отклонение* σ (стандартное от­клонение или стандарт) случайной величины *X —* это ариф­метическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

σ =

**Пример 7.**

В задаче 1 о стрелках вычислить дисперсию числа вы­битых очков для каждого стрелка.

*Решение:*

Очевидно, что лучше стрелял тот стрелок, у которого при равенстве средних значений числа выбитых очков меньше отклонение этого числа относительно среднего значения (дисперсия).

D(X) = (0 – 5,36)2 ·0,15 + (1 – 5,36)2·0,11 + … + (10 – 5,36)2·0,2 = 13,6

D(X) = (0 – 5,36)2 ·0,01 + (1 – 5,36)2·0,03 + … + (10 – 5,36)2·0,02 = 4,17

*Ответ:* Дисперсия меньше у второго стрелка.

**Пример 8**

В задаче 2 вычислить дисперсию.

*Решение:*

D(х) = (1 – 2,3)2 ·0,3 + (2 – 2,3)2·0,5 + (5 – 2,3)2·0,2 = 2,01

**5. Плотность вероятности непрерывных случайных величин**

*Плотностью вероятности, или плотностью распределе­ния f(х) непрерывной случайной* величины Х, называется про­изводная ее функции распределения:

*f(x) = F´(x)*

Ее *также называют дифференциальной* функцией распределения.

***f (x)***

*Плотность распределения*

***b***

***a***

***0***

***x***

*Свойство плотности вероятности*:

1. Неотрицательная функция f(x) > 0 .

2. Площадь фигуры, ограниченной кривой распределе­ния и осью абсцисс, равна единице.

3. Вероятность попадания непрерывной случайной ве­личины в интервал [а, b]

равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от *а* до *b.*

Геометрическая интерпретация:

Полученная вероятность равна площади фигуры, огра­ниченной сверху кривой распределения и опирающейся на отрезок [а, b].

Непрерывная случайная величина описывается следую­щими числовыми характеристиками:

1. Математическое ожидание: М(Х) =
2. Дисперсия D(X) = ·*f(x)dx*

Или D(X) = ·*f(x)dx –*

**Пример 9**

Найдите математическое ожидание и дисперсию случай­ной величины *X,* если плотность распределения:

*Решение:*

0

1

*М (х) = = =*

*Д(х) = - = - =*

**Ход работы:**

**Вариант 1**

1. Случайная величина Х задана законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *2* | *3* | *10* |
| *pi* | *0,1* | *0,4* | *0,5* |

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение *σ(Х).* Построить многоугольник распределения.

1. Найти дисперсию случайной величины *X,* зная закон ее распределения. Построить многоугольник распределения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *0.1* | *2* | *10* | *20* |
| *pi* | *0.4* | *0.2* | *0.15* | *0.25* |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *3* | *5* | *2* |
| *pi* | *0,1* | *0,6* | *0,3* |

**Вариант2.**

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X,* зная закон ее распределения.

2. Найти дисперсию случайной величины *X,* которая задана законом распределения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *2* | *3* | *5* |
| *pi* | *0,1* | *0,6* | *0,3* |

**Вариант 3.**

1. Дискретная случайная величина *X* имеет закон распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *0,2* | *0,4* | *0,6* | *0,8* | *1* |
| *pi* | *0,1* | *0,2* | *0,4* | *Р4* | *0,1* |

Чему равна вероятность *Р4(Х =* 0,8)? Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2. Дискретная случайная величина *X* имеет закон распре­деления.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* |
| *pi* | *Р1* | *0,15* | *Р3* | *0,25* | *0,35* |

Найти вероятность *Р1(х* = 3) и *Р3(х* = 5), если известно, что *Р3*в 4 раза больше Р1. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дис­персию.

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) перечислите и охарактеризуйте виды случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

2) что такое математическое ожидание и дисперсия случайной величины?

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

**Название практической работы**: Вычисление среднеквадратического отклонения дискретной случайной величины.

**Цель работы:** Научиться вычислять математическое ожидание, дисперсию случайной величины и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины.

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия теории математической статистики (виды случайных величин, математическое ожидание, дисперсия случайной величины и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины);

основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности.

**Теоретическая часть:**

**Числовые характеристики дискретной случайной величины**

1. *Математическим ожиданием* М(Х); дискретной слу­чайной величины называется сумма произведений всех ее значений не соответствующие им вероятности:

М(Х) =

**Пример 1**

Известны значения распределения случайных величин X и Y — число очков выбиваемых первым и вторым стрел­ками.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| pi | 0,15 | 0,11 | 0,04 | 0,05 | 0,04 | 0,10 | 0,10 | 0,04 | 0,05 | 0,12 | 0,20 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| pi | 0,01 | 0,03 | 0,05 | 0,09 | 0,11 | 0,24 | 0,21 | 0,10 | 0,10 | 0,04 | 0,02 |

Необходимо выявить, какой из двух стрелков стреляет лучше. Построить многоугольники распределения.

*Решение:*

Очевидно, что из двух стрелков лучше стреляет тот, кто в среднем выбивает большее количество очков.

*M(X) = 0·0,15 + 1·0,10 + 2·0,04 + … + 9·0,12 + 10·0,2 = 5,36*

*M(Y) = 0·0,01 + 1·0,03·0,05 + … +9·0,04 + 10·0,02 = 5,36*

То есть среднее число выбиваемых очков у двух стрелков одинаково.

**Пример 2**

Случайная величина Х задана законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *1* | *2* | *5* |
| *pi* | *0,3* | *0,5* | *0,2* |

*Решение: М(Х) = 1·0,3 + 2·0,5 + 5·0,2 = 2,3*

*2. Дисперсия* дискретнойслучайности величины. Слово «дисперсия» означает «рассеяние»:

D(X) = M(X – M(X))2.

*Дисперсией D(х)*случайной величины называется мате­матическое ожидание квадрата ее отклонения от математи­ческого ожидания.

*Среднее квадратическое отклонение* σ (стандартное от­клонение или стандарт) случайной величины *X —* это ариф­метическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

σ =

**Пример 3**

В задаче 1 о стрелках вычислить дисперсию числа вы­битых очков для каждого стрелка.

*Решение:*

Очевидно, что лучше стрелял тот стрелок, у которого при равенстве средних значений числа выбитых очков меньше отклонение этого числа относительно среднего значения (дисперсия).

D(X) = (0 – 5,36)2 ·0,15 + (1 – 5,36)2·0,11 + … + (10 – 5,36)2·0,2 = 13,6

D(X) = (0 – 5,36)2 ·0,01 + (1 – 5,36)2·0,03 + … + (10 – 5,36)2·0,02 = 4,17

*Ответ:* Дисперсия меньше у второго стрелка.

**Пример 4**

В задаче 2 вычислить дисперсию.

*Решение:*

D(х) = (1 – 2,3)2 ·0,3 + (2 – 2,3)2·0,5 + (5 – 2,3)2·0,2 = 2,01

**5. Плотность вероятности непрерывных случайных величин**

*Плотностью вероятности, или плотностью распределе­ния f(х) непрерывной случайной* величины Х, называется про­изводная ее функции распределения:

*f(x) = F´(x)*

Ее *также называют дифференциальной* функцией распределения.

***f (x)***

*Плотность распределения*

***b***

***a***

***0***

***x***

*Свойство плотности вероятности*:

1. Неотрицательная функция f(x) > 0 .

2. Площадь фигуры, ограниченной кривой распределе­ния и осью абсцисс, равна единице.

3. Вероятность попадания непрерывной случайной ве­личины в интервал [а, *b*]равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от *а* до *b.*

Геометрическая интерпретация:

Полученная вероятность равна площади фигуры, огра­ниченной сверху кривой распределения и опирающейся наотрезок [а, b].

Непрерывная случайная величина описывается следую­щими числовыми характеристиками:

1. Математическое ожидание: М(Х) =
2. Дисперсия D(X) = ·*f(x)dx*

Или D(X) = ·*f(x)dx –*

**Пример 5**

Найдите математическое ожидание и дисперсию случай­ной величины *X,* если плотность распределения:

*Решение:*

*М (х) = = =*

1

0

*Д(х) = - =*  = *- =*

0

**6.Нормальный закон распределения**

Этот закон наиболее часто встречается на практике. Он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения. Нормальное распределение является одним из самых важных распределений в статистике. Обычно всё сравнивают с нормальным законом распределения.

Непрерывная случайная величина *X*имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами μ и σ2, если ее плотность вероятности имеет вид:

*Свойства плотности распределения вероятностей:*

* Она колокообразная («колокол Гаусса»), иначе унимодальная.
* Плотность определяется двумя параметрами: математическим ожиданием (μ) и средним квадратическим отклонением (σ).
* Симметричная относительно среднего.
* Среднее и медиана нормального распределения равны.
* Кривая сдвигается вправо, если среднее увеличивается при постоянном квадратическом отклонении (рис. б), и сдвигается влево, если среднее уменьшается.
* Кривая расширяется, если среднее квадратическое отклонение а увеличивается (если среднее постоянно).
* Кривая становится более остроконечной с меньшей шириной основания колокола, если а уменьшается при среднем постоянном (площадь под графиком всегда рав­на 1)(рис. в).

**1=2**

**μ2>μ1**

**μ2**

**μ1**

***х***

***0***

**μ**

***х***

а) б)

в) г)

**1**

**2**

**μ2**

**μ1**

**2**

**1**

**μ1=μ2**

***х***

*Кривая нормального закона распределения и ее изменения при изменении параметров*

*Дополнительные свойства:*

Вероятность того, что нормально распределенная слу­чайная величина *х* со средним μ и средним квадратическим отклонением σ (стандартное отклонение) находит­ся между (μ - σ) и (μ + σ), равна 0,68, т.е. 68% случай­ной величины *х* отличается от среднего не более чем на одно стандартное отклонение ± σ.

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина *х* находится между (μ - 2σ) и (μ + 2σ), равна 0,95, т.е. примерно 95% случайной величины *х* отличается от среднего на два стандартных отклонения ±2σ.

Вероятность того, что нормально распределенная слу­чайная величина *х* находится между (μ - Зσ) и *(μ*+ Зσ), равна 0,99, т.е. 99% (практически достоверно). Это свой­ство носит название правило трех сигм.

*Правило трех сигм*

99%

95%

μ-σ

μ+σ

***х***

**Ход работы:**

**Вариант 1**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *3* | *5* | *2* |
| *pi* | *0,1* | *0,6* | *0,3* |

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X,* зная закон

ее распределения.

2. Дискретная случайная величина *X* имеет закон распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *0,2* | *0,4* | *0,6* | *0,8* | *1* |
| *pi* | *0,1* | *0,2* | *0,4* | *Р4* | *0,1* |

Чему равна вероятность *Р4(Х =* 0,8)? Найти математическое ожидание и дисперсию и среднее квадратическое отклонение *σ(Х).* Построить многоугольник распределения.

**Вариант 2.**

1. Дискретная случайная величина *X* имеет закон распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *0,2* | *0,4* | *0,6* | *0,8* | *1* |
| *pi* | *0,1* | *0,2* | *0,4* | *Р4* | *0,1* |

Чему равна вероятность *Р4(Х =* 0,8)? Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2. Дискретная случайная величина *X* имеет закон распре­деления.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* |
| *pi* | *Р1* | *0,15* | *Р3* | *0,25* | *0,35* |

Найти вероятность *Р1(х* = 3) и *Р3(х* = 5), если известно, что *Р3*в 4 раза больше Р1. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание, дис­персию и среднее квадратическое отклонение *σ(Х).*

**Вариант 3.**

1.Случайная величина Х задана законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *2* | *3* | *10* |
| *pi* | *0,1* | *0,4* | *0,5* |

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение *σ(Х).* Построить

многоугольник распределения.

2. Найти дисперсию случайной величины *X,* зная закон ее распределения. Построить многоугольник распределения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***xi*** | ***0,1*** | ***2*** | ***10*** | ***20*** |
| ***pi*** | ***0,4*** | ***0,2*** | ***0,15*** | ***0,25*** |

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) как найти математическое ожидание и дисперсия случайной величины?

2) что такое среднее квадратическое отклонение величины?

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

**Название практической работы:**  Решение задач с помощью численных.

**Цель работы:** Научиться решать задачи с помощью с помощью численных методов

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия о математическом синтезе и анализе (Численное интегрирование. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формула прямоугольника. Формула трапеций. Формула парабол (формула Симпсона).

**умения:**

выполнять необходимые измерения и связанные с ними расчеты;

находить приближенные значения определенного интеграла с помощью формул трапеций.

применять математические методы для приближенного вычисления определенного

интеграла

**Теоретическая часть**

**Методы численного интегрирования**

**Метод прямоугольников**

Идея численного интегрирования предельно проста и вытекает из геометрического смысла определенного интеграла – значение определенного интеграла численно равно площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции *y=f(x)*, осью абсцисс и прямыми *х=а, х=b*. Находя приближенно площадь криволинейной трапеции, мы получаем значение интеграла. Формально процедура численного интегрирования заключается в том, что отрезок [а, b] разбивается на n частичных отрезков, а затем подинтегральная функция заменяется на нем легко интегрируемой функцией, по определенной зависимости интерполирующей значения подинтегральной функции в точках разбиения. Рассмотрим теперь простейшие из численных методов интегрирования.

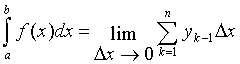
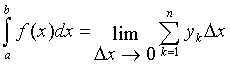
Итак, функция *у=f(x)* интегрируема на сегменте [a,b] и требуется вычислить ее интеграл . Составим интегральную сумму для *f(x)* на сегменте [a,b] . Для этого разобьем сегмент [a,b] на n равных между собой частей с помощью точек: *x1, x2, … , xk, … ,*

*xn-1*. Если длину каждой части мы обозначим через d1.gif (857 bytes)*х*, так что http://www.exponenta.ru/educat/systemat/gritsenko/images/image006.gif, то для каждой точки *xk* будем иметь: http://www.exponenta.ru/educat/systemat/gritsenko/images/image008.gif*(k=0, 1, 2, …, n).*

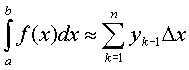
Обозначим теперь через *yk*значение подынтегральной функции *f(x)*при image012.gif (344 bytes) то есть положим image010.gif (405 bytes) *(k=0, 1, …, n).*

Тогда суммыimage014.gif (595 bytes)  будут интегральными для функции *f(x)* на отрезке [a,b]*.* (При составлении первой суммы мы рассматриваем значения функции *y=f(x)* в точках, являющихся левыми концами частичных сегментов, а при составлении второй суммы – в точках, являющихся правыми концами этих сегментов.)

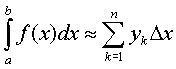
По определению интеграла имеем:

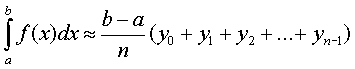
    и    

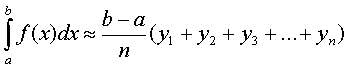
Поэтому в качестве приближенного значения image021.gif (391 bytes) естественно взять интегральную сумму image024.gif (599 bytes),т.е. положить:



а также

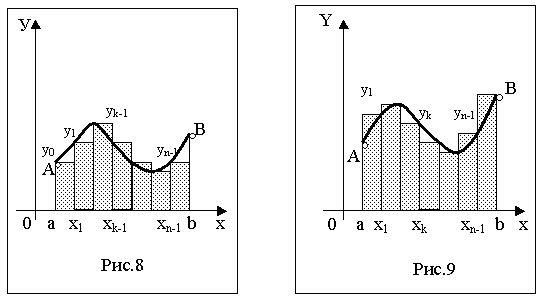


т.е                                     (1)

и                                          (1')

Эти приближенные равенства называются формулами прямоугольников.

В том случае, когда *f(x)bor.gif (855 bytes) 0*, формулы (1) и (1’) с геометрической точки зрения означают, что площадь криволинейной трапеции*aABb*, ограниченной дугой кривой *y=f(x),* осью *Ох* и прямыми *х=а*и*х=b*, принимается приближенно равной площади ступенчатой фигуры, образованной из n прямоугольников с основаниями image035.gif (359 bytes) и высотами: *y0, y1, y2, …, yn-1* – в случае формулы (1) (рис.8) и *y1, y2, y3, …, yn* – в случае формулы (1') (рис.9).



Исходя из приведенного выше геометрического смысла формул (1) и (1') способ приближенного вычисления определенного интеграла по этим формулам принято называть *методом прямоугольников*.

Всякое приближенное вычисление имеет определенную ценность лишь тогда, когда оно сопровождается оценкой допущенной при этом погрешности. Поэтому формулы прямоугольников будут практически пригодны для приближенного вычисления интегралов лишь в том случае, если будет существовать удобный способ оценки получающейся при этом погрешности (при заданном n), позволяющий к тому же находить и число частей n разбиения сегмента, гарантирующее требуемую степень точности приближенного вычисления.

Будем предполагать, что функция *f(x)* имеет ограниченную производную на сегменте [a, b], так что существует такое число *М>0*, что для всех значений х из [a, b] выполняется неравенство *|f'(x)|mor.gif (852 bytes)M*. Качественный смысл этого неравенства заключается в том, что скорость изменения значения функции ограничена. В реальных природных системах это требование практически всегда выполнено. В этих условиях абсолютная величина погрешности Rn, которую мы допускаем, вычисляя интеграл image057.gif (391 bytes) по формуле прямоугольников может быть оценена по формуле [27]:

*|Rn| mor.gif (852 bytes) M(b-a)2/2n*                                       (2)

При неограниченном возрастании n выражение *M(b-a)2/2n*, а следовательно, и абсолютная величина погрешности *Rn* будет стремиться к нулю, т.е. точность приближения будет тем больше, чем на большее число равных частей будет разделен сегмент [a, b]. Абсолютная погрешность результата будет заведомо меньше заданного числа e.gif (847 bytes)*>0*, если взять

*n > M(b-a)2/2*e.gif (847 bytes)*.*

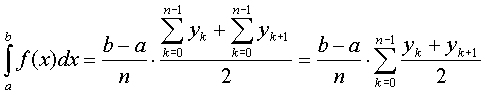
Следовательно, для вычисления интеграла image058.gif (391 bytes) с указанной степенью точности достаточно сегмент [a, b] разбить на число частей, большее числа *M(b-a)2/2*e.gif (847 bytes)*.*[27]*.*

Метод прямоугольников – это наиболее простой и вместе с тем наиболее грубый метод приближенного интегрирования. Заметно меньшую погрешность дает другой метод – метод трапеций.

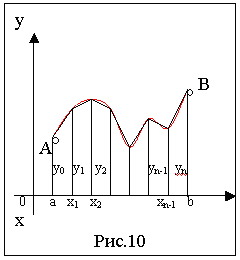
**Метод трапеций**

Очевидно, что чем больше будет число n отрезков разбиения, тем более точный результат дадут формулы (3а) и (3б). Однако увеличение числа отрезков разбиения промежутка интегрирования не всегда возможно. Поэтому большой интерес представляют формулы, дающие более точные результаты при том же числе точек разбиения.

Простейшая из таких формул получается как среднее арифметическое правых частей формул (1) и (1'):

                (4)

Легко усмотреть геометрический смысл этой формулы. Если на каждом отрезке разбиения дугу графика подинтегральной функции y=f(x) заменить стягивающей ее хордой (линейная интерполяция), то мы получим трапецию, площадь которой равна image062.gif (415 bytes) и следовательно, формула (4) представляет собой площадь фигуры, состоящей из таких трапеций (рис.10) . Из геометрических соображений понятно, что площадь такой фигуры будет, вообще говоря, более точно выражать площадь криволинейной трапеции, нежели площадь ступенчатой фигуры, рассматриваемая в методе прямоугольников.



Приведя в формуле (4) подобные члены, окончательно получим

image079.gif (1040 bytes)              (5)

Формулу (5) называют *формулой трапеций*.

Формулой трапеций часто пользуются для практических вычислений. Что касается оценки погрешности *Rn*, возникающей при замене левой части (5) правой, то доказывается, что абсолютная величина ее удовлетворяет неравенству:

image081.gif (545 bytes)                                      (6)

где *М2* – максимум модуля второй производной подинтегральной функции на отрезке [a,b], т.е.

image083.gif (541 bytes).

Следовательно, *Rn* убывает при besk.gif (915 bytes) по крайней мере так же быстро, как image085.gif (235 bytes).

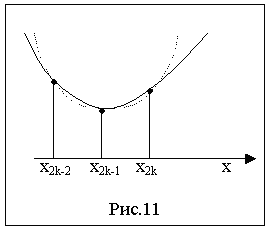
Абсолютная погрешность *Rn* будет меньше наперед заданного числа e.gif (847 bytes) > *0*, если взять image087.gif (522 bytes).

**Метод парабол (метод Симпсона)**

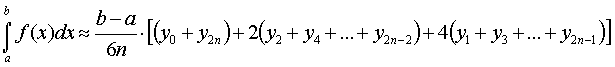
Значительное повышение точности приближенных формул может быть достигнуто за счет повышения порядка интерполяции. Одним из таких методов приближенного интегрирования является метод парабол. Идея метода исходит из того, что на частичном промежутке дуга некоторой параболы в общем случае теснее прилегает к кривой *y=f(x),* чем хорда, соединяющая концы дуги этой кривой, и поэтому значения площадей соответствующих элементарных трапеций, ограниченных “сверху” дугами парабол, являются более близкими к значениям площадей соответствующих частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху дугой кривой *y=f(x),*чем значения площадей соответствующих прямолинейных трапеций. Сущность метода заключается в следующем. Отрезок [a,b] делится на *2n* равных частей. Пусть точки деления будут

*х0=а, x1, x2, …x2n-2, x2n-1, x2n=b,*

а *y0, y1, …y2n* – соответствующие значения подинтегральной функции на отрезке [a,b]*.* Произведем квадратичную интерполяцию данной подинтегральной функции на каждом из отрезков разбиения (заменим дугу графика подинтегральной функции дугой параболы с вертикальной осью) (рис.11).



Приведем без вывода формулу парабол в окончательном виде:

              (7)

(Подробный вывод формулы (7) см. в [13] ).

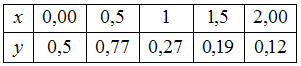
Если подинтегральная функция *f(x)* имеет на отрезке [a,b] непрерывную четвертую производную, то для поправочного члена формулы (7) имеет место оценка

image098.gif (642 bytes)                                    (8)

где *М4*- максимум модуля четвертой производной подинтегральной функции на отрезке [a,b].

Cравнивая между собой оценки (6) и (8), замечаем, что с увеличением n поправочный член формулы трапеций уменьшается пропорционально величине image101.gif (235 bytes), а для формулы парабол – пропорционально величине image100.gif (237 bytes), т.е. метод парабол сходится значительно быстрее метода трапеций, тогда как с точки зрения техники вычислений оба метода одинаковы.

**Примеры решения задач с помощью численных методов.**

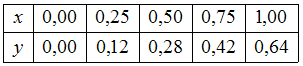
Для приближенного вычисления определенного интеграла от функции  
http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/E8845E0F723794A3B78B6E3448323634.png на интервале http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/68963F6446C30095A6CDA845D3175BE1.png можно воспользоваться формулой трапеций  
http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/C0611E22CADA42EC6F4BBBD1C59DFA3B.png  
Интервал http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/BDF55C4CBA3C0C4E7F010E13997FB486.png разбили на 4 равные части и вычислили соответствующие приближенные значения http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/3F5DFA46AB5463D861D5E7CEADE3BF1C.png.  
Получили   
Найти  http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/079D2852B4877048BD5BCB28F59E4B23.png …

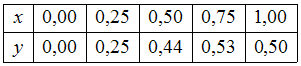
Решение: Конец формы

Разобьем отрезок [*a*;*b*] на *n* равных частей с шагом http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/008910806AA6CF60BED9910BFAB47CAB.png  
Получим http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/C56740E744EEFC0D332B8E9A35524F9F.png  
Тогда http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/6F4E4F9FFCBB4AA030CDE6875A762445.png где *i* меняется от 0 до *n*.   
Подставим полученные значения в формулу трапеций.

 Ответ 0.77

**Ход работы:**

**Вариант 1.** Для приближенного вычисления определенного интеграла от некоторой функции http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/34C4707D8E1BF203909EB27B935C51B0.png на интервале http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/708531448519EB8424A9582B32DE5E61.png можно воспользоваться  формулой трапеций http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/2362E33437A7911A9B04643783BFEB2C.png  
Интервал http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/A0936205975C0D4CC6AF51F3C267ABC4.png разбили на 4 равные части и значения функции в соответствующих точках записали в виде таблицы:  
.  
Вычисления производят с точностью до 0,01.  
Тогда http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/83A3521D56300649A275851A21515574.png …

**Вариант 2.** Для приближенного вычисления определенного интеграла можно воспользоваться формулой трапеций: http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/1ADFD09813E5EB8636EDB415E64AA72D.png  
Отрезок http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/EDBD1599D887DAFD84DCBD8B7266AD79.png разбивают на *n* равных частей и пусть http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/589FF7F243AA11CF9F00D80C4A1D8507.png  
Отрезок http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/17916C93442BB6123FE461ED8502A322.png разбили на 4 равные части и вычислили соответствующие приближенные значения функции http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/024E4E74EEC4316C6C210278AE2F1B45.png  
Результаты вычислений занесли в таблицу: .  
Вычисления производят с точностью до 0,01.  
Тогда http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/5337E6EA1454CC38FB551A77D16340D2.png …

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) Назовите методы численного интегрирования.

2) Почему данный метод называется методом трапеций?

3) Запишите формулу трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод).**

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

**Название практической работы:** Решение профессиональных задач с помощью численных методов.

**Цель работы:** Научиться решать задачи с помощью с помощью численных методов

**знания** (актуализация)**:**

основные понятия о математическом синтезе и анализе (абсолютная и относительная погрешность приближения, производная функции и ее значение в некоторой точке, дифференциальные уравнения, решение дифференциальных уравнений).

**умения:**

выполнять необходимые измерения и связанные с ними расчеты;

находить приближенные значения определенного интеграла с помощью формул трапеций.

применять математические методы для решения профессиональных задач.

**Примеры применения численных методов для решения задач**

**Пример1**

Пусть *a=6,9* и*b=5,1*.  
Необходимо найти значение *2a+b.*Сначала числа округлили до целых, а потом проделали вычисления.  
Получили http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180652/60F974CFC6ABE3829E703F0F4EAF23A5.png

Найти абсолютную погрешность полученного результата

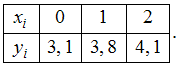
Решение:

Модуль разности между точным числом http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180652/60A250F998F415151D60F99A9DBEA60C.png и его приближенным значением http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180652/C6FFCAF1FF4B99608D2A55155F9D6CDF.png  
называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180652/E6E2777FDC81EED440C19FFA0672401D.png  
и обозначается http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180652/FD5E3DFA18FA89B6F59EA319CD6D41DF.png  
http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180652/0408BC086416AA62B5FE0207280E6A3C.png

 Абсолютную погрешность полученного результата можно  
найти по формуле http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180652/C9FCBC992D1EB92AE6ADA80661636888.png

Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна 0,3

**Пример2**

Некоторая функция http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/BC0F990F12BF9E5BC50558A05524D376.png задана в виде таблицы:   
Если требуется найти значение производной данной функции в некоторой точке, то можно заменить данную функцию, аналитическая запись которой неизвестна, некоторой другой функцией:http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/A89937FD9279FDECF027D94DD11632E1.png которая является многочленом и проходит через точки, заданные в таблице. Затем найти производную новой функцииhttp://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/466B420EAB5EE648B4A18C2BA2185927.png  
Если шаг таблицы *h* (разность между соседними значениями *x*) является величиной постоянной, то можно воспользоваться формулой:  
http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/AE82547B38EF99DE8CC91959C52A8102.png  
где http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/B45E9371C094D3A22044D4840ECD408B.png Известно, что http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/434BA5AE698C7E54FCF6F6427A64E398.png и http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/2CCED34B5402B8867472CA389A498EDD.png  
Для заданной в виде таблицы функции http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/A8E1C6EC6D4DDF9F83CD22B97B8F0059.png значение http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/D5CA1C24F49A6A2A7F44F45C4F2701EC.png …

Решение:

Шаг таблицы http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/614EE44CDD7EB4950BD278499C80F66E.png тогда http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/844E9381CD56C4F1B8980F349D4EA5DF.png  
Воспользуйтесь данной формулой и получите: http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/F25AC623C96CA80308BF55FA8DEE8FCD.png  
Остается найти производную и подставить значение http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/EC5CC51893C62F037C2F247D5551F684.png

|  |  |
| --- | --- |
| Значение http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/D5CA1C24F49A6A2A7F44F45C4F2701EC.png http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210636/8ECF89CA9D042AD6621C7FF5EBB9C254.png  **Пример3**  Для вычисления объема шара был измерен его радиус *r.* Оказалось *r = 20 см* с погрешностью *0,2 см*. Как известно, объем шара http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180632/3AA16A168FC26D1EB27CBC80CDCB4A3D.png. Для облегчения счета число http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180632/00AF2E4457D162C6598B59D680729CCD.png заменили числом *3*. При данной замене абсолютную погрешность можно считать равной *0,15*. Был получен объем http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180632/B9A8ABEB5BAC1822298961CA1D22E77F.png см3.  Найти относительную погрешность полученного результата.  Решение:  Относительная погрешность приближенного положительного числа равна отношению абсолютной погрешности числа к точному значению этого числа. Так как точное значение числа, как правило, неизвестно, то под относительной погрешностью понимают отношение абсолютной погрешности числа к его приближенному значению. Тогда получим относительные погрешности http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180632/9EA1F2F448118B103FDDA3F046C501C3.png Относительная погрешность произведения приближенных чисел равна сумме относительных погрешностей сомножителей.  относительные погрешности произведения и частного двух приближенных чисел вычисляются по формулам: http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210638/771FB92660DD27C0C051A9D636130645.png и http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210638/4DA7D9F2E0ECBF1B0E9106C84C4536F7.png соответственно. Обращаем внимание, что в обоих случаях относительная погрешность равна сумме относительных погрешностей.  Тогда относительная погрешность полученного результата равна  0,08.  **Пример4.**  Известно, что для приближенного решения дифференциального уравнения http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/6D918FCB2D51B990CA80AEECA0C99EEC.png с начальным условием http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/919ACCFBCA1E1509ABBA075BBCA4B65B.png можно воспользоваться методом Эйлера: http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/5C2A33A2CAECC462E4623635C4B6DA44.png. Тогда для уравнения http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/1094F603D945712FB569129E50D0EE17.png при начальном условии http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/3B1981B4BD321528A532A410793A83D3.png с шагом http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/637012C1DC5872E96E1614176F75AB86.png и точностью до десятых http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/B29B876BEB08BBF2B045DED6EDD3A4A2.png равно …  Обращаем внимание, что в формуле Эйлера http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/8202B315E14FB12232D3ABC469E630D7.png. Для нахождения *y*(0, 2) нужно найти http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/24B3F8E6E4FF0E3AD698702C2EB994FC.png, то есть применить формулу два раза.  Известно, что для приближенного решения дифференциального уравнения http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/B8B1B596036F6DF42B355FDCD6A4C4C4.png с начальным условием http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/8E6230D28F62C49B24BB5EBCBBC0227C.png можно воспользоваться методом Эйлера: http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/EC7BE6495A57F1FF0DBC34D0FD54B770.png. Тогда для уравнения, http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/8CDEC34F2BD547E4D46F0D65B983C521.png при начальном условии http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/4A4F334542CB2B5A5665741825189836.png с шагом http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/9A5A30D1EBFE73998D6BB0B37F3AAE9D.png и точностью до десятых *y*(0, 2) равно …  Обращаем внимание, что в формуле Эйлера http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/EBA13EC9E94A5365464CA387803BA4D1.png. Для нахождения *y*(0,2)  нужно найти http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/9BABE525A6CA4DEA3518C1EBD648CBC4.png, то есть применить формулу два раза.   |  | | --- | | Ответ: 1,2 |   **Ход работы:**  **Вариант 1.**   1. Пусть  *a* = 8,95 и *b* =4.1    Необходимо найти разность этих чисел *a-b. Д*ля удобства числа округлили до целых: *x* =9  и *y* = 4. Затем нашли их разность:  9-4 = 5.  Найти абсолютную погрешность полученной разности.  2) Некоторая функция http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180630/12A902F482619BF9D342D28E6BD586A2.png задана в виде таблицы http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180630/399A6202AF03F3DFA26C40544ADF19AA.png Если требуется найти значение производной данной функции  в некоторой точке то можно заменить данную функцию, аналитическая запись которой неизвестна, некоторой другой функцией http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180630/D325D294C4DD2F74A3D7BC6063AB6A81.png для которой http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180630/0FE5F28C4FB17BE6117B5BD0F32B8173.png и найти производную функции http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180630/099E3B68457BE6789E11159F362B7B7D.png. Если шаг таблицы *h* (разность между соседними значениями *x*) постоянен, то можно воспользоваться формулой: http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180630/B78B83699C4971A03AFD73F70F746A69.png где http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180630/99CC43BAA94B2FF9BFB5DF95129AA32E.png.  Вычисления производить с двумя знаками после запятой. Для заданной в виде таблицы функции http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180630/07E33B9F2F6A436461C8FCD42A31FE2D.png значение http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180630/3C5D449AF9CA471F288F87F4B528D542.png …  **Вариант 2.** |

1. Пусть *a=3,8* и*b=6,2*. Необходимо найти значение *a+4b.*Сначала числа округлили до целых, а потом проделали вычисления.  
   Получили http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180652/10E8005E220D5F1215C909B21B6DF5BB.png  
   Найти абсолютную погрешность полученного результата.
2. Известно, что для приближенного решения дифференциального уравнения http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/6D918FCB2D51B990CA80AEECA0C99EEC.png с начальным условием http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/919ACCFBCA1E1509ABBA075BBCA4B65B.png можно воспользоваться методом Эйлера: http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/5C2A33A2CAECC462E4623635C4B6DA44.png.  
   Тогда для уравнения http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/1094F603D945712FB569129E50D0EE17.png при начальном условии http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/3B1981B4BD321528A532A410793A83D3.png с шагом http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/637012C1DC5872E96E1614176F75AB86.png и точностью до десятых http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/B29B876BEB08BBF2B045DED6EDD3A4A2.png равно …

Обращаем внимание, что в формуле Эйлера http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/8202B315E14FB12232D3ABC469E630D7.png. Для нахождения *y*(0, 2) нужно найти http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210637/24B3F8E6E4FF0E3AD698702C2EB994FC.png, то есть применить формулу два раза.

2. Ответьте на контрольные вопросы:

1) Как найти абсолютную погрешность полученного результата?

2) Как найти относительные погрешности произведения и частного двух приближенных чисел?

3) Запишите соответствующие формулы.

3. Оформите и сдайте отчет преподавателю. **(Не забудьте написать вывод)**

**Критерии оценивания практических работ**

* оценка «отлично» выставляется обучающемуся за работу, выполненную безошибочно, в полном объеме с учетом рациональности выбранных решений;
* оценка «хорошо» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в полном объеме с недочетами;
* оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (не менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы);
* оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы).

**Список рекомендуемой литературы**

Основная литература:

1. Богомолов, Н.В. Математика [Текст]: Учеб. для Ссузов /Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – М.: Дрофа, 2010.-396 с.

Дополнительная литература:

1. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике [Текст]: учеб. пособие для средних проф. учеб. заведений / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2014. – 495 с.: ил.
2. Богомолов, Н.В. Сборник задач по математике [Текст]: учеб. пособие для средних проф. учеб. заведений / Н.В. Богомолов. . – М.: «Дрофа», 2010. – 205 с.: ил.
3. Богомолов, Н.В. Математика. Дидактические задания [Текст]: учеб. пособие для средних проф. учеб. заведений / Н.В. Богомолов, П.Ю. Сергиенко. – М.: «Дрофа», 2009. – 236 с.
4. Башмаков, М.И. Математика [Текст]: учеб. пособие для средних проф. учеб. заведений / М.И. Башмаков. – М.: «Академия», 2010. – 396 с.
5. Акимов, О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы. /О.Е. Акимов. – М.: Издатель АКИМОВА, 2009.

***Дополнительные источники:***

***Интернет-ресурсы:***

1. [www.ru.Wikipedia.org](http://www.ru.Wikipedia.org)
2. [www.ru.matformula.ru](http://www.ru.matformula.ru)
3. [www.reshebnik.ru](http://www.reshebnik.ru)
4. [www.PlusPi.org](http://www.PlusPi.org)
5. [www.exponenta.ru](http://www.exponenta.ru)
6. <http://www.pedsovet.info/info/pages/referats/info_00002.htm>