Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ   
по дисциплине**

**«МАТЕМАТИКА»**

для студентов специальности 35.02.12 Садово-парковое и ландшафтное строительство (базовая подготовка)

Челябинск, 2017

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Составлены в соответствии с программой учебной дисциплины*Математика*, | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  комиссией ЕМД  протокол № \_\_\_\_\_\_  от «\_\_»\_\_\_\_\_\_\_201\_ г.  Председатель ПЦК \_\_\_\_\_\_\_\_\_О.И. Макаренко | УТВЕРЖДАЮ  Заместитель директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_201\_\_ г. |

## Составитель: Панова Е.Н., преподаватель Южно-Уральского государственного технического колледжа.

# **1. Пояснительная записка**

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов – это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, при этом носящая сугубо индивидуальный характер.

Целью самостоятельной работы студентов является:

* систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
* овладение практическими навыками работы с нормативной и справочной литературой;
* развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
* формирование самостоятельности профессионального мышления: способности к профессиональному саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
* овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;
* развитие исследовательских умений.

Для организации самостоятельной работы необходимы следующие условия:

* готовность студентов к самостоятельному труду;
* мотивация получения знаний;
* наличие и доступность всего необходимого учебно-методического и справочного материала;
* система регулярного контроля качества выполненной самостоятельной работы;
* консультационная помощь преподавателя.

Формы самостоятельной работы студентов определяются содержанием учебной дисциплины, степенью подготовленности студентов.

*Задачи самостоятельной работы:*

* закрепить знание теоретического материала по математике, используя необходимый инструментарий, практическим путем (решение задач и упражнений и т. д.);
* содействовать развитию творческой личности, обладающей высокой зрелостью, готовностью и способностью преодолевать жизненные трудности.

Программой дисциплины «Математика» предусматривается 26часов внеаудиторной самостоятельной работы, направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

* ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
* ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
* ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
* ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
* ОК 5. Использовать информационно- коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
* ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
* ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
* ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации
* ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.
* ПК 1.1. Проводить ландшафтный анализ и предпроектную оценку объекта озеленения.
* ПК 1.2. Выполнять проектные чертежи объектов озеленения с использованием компьютерных программ.
* ПК 1.3. Разрабатывать проектно-сметную документацию.

В результате выполнения внеаудиторной самостоятельной работы по математике студент должен

***уметь****:*

* использовать математические методы при решении прикладных задач;
* проводить элементарные расчеты, необходимые в садово-парковом и ландшафтном строительстве;

***знать****:*

**-** основные численные методы решения прикладных задач и их применение в

садово-парковом и ландшафтном строительстве;

Общий объём времени, отведённого на самостоятельную работу составляет26 часов. Отчеты по внеаудиторной самостоятельной работе выполняются в тетрадях формата А5.

Критерии оценивания:

* Оценка «отлично» выставляется обучающемуся за работу, выполненную безошибочно, в полном объеме с учетом рациональности выбранных решений;
* Оценка «хорошо» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в полном объеме с недочетами;
* Оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (не менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы);
* Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы).

**2. Тематический план внеаудиторной самостоятельной работы**

|  |  |
| --- | --- |
| **Наименование темы** | **Количество часов на с/р** |
| **Тема 1.**Теория пределов и непрерывность | 4 |
| **Тема 2.**Дифференциальное исчисление функции одной независимой переменной | 4 |
| **Тема 3.**Интегральное исчисление функции одной независимой переменной | 4 |
| **Тема 4.**Дифференциальные уравнения | 5 |
| **Тема 5.**Основы теории вероятностей и математической статистики | 4 |
| **Тема 6.** Основные численные методы | 5 |
|  | 26 |

**3. Методические указания по самостоятельному изучению и выполнению заданий**

**Тема 1. Теория пределов**

**Цель работы:**систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знанийи практических умений студентов по теме «Теория пределов».

*Теоретические сведения:*

**Предел функции.**

При решении задач на вычисление пределов необходимо знать, что если существуют пределы функции при хх0*f* (x)=A, (x)=В, то можно использовать основные правила вычисления пределов.

1.  (*f* (x) (x)) = *f* (x) (x) = А В

2.  (*f* (x) ⋅(x)) = *f* (x) ⋅(x) = А ⋅ В

3. = = ; ϕ (x) ≠0, ϕ (x) ≠0

4. *c*⋅*f* (x) = *c*⋅*f* (x) = *c* ⋅ A, где*с*=const

5. (*f* (x))k = ( *f* (x))k

6. (*f* (x))ϕ(x) = [ *f* (x)](x)

а также следующие пределы:

1.  = 0

2.  х = ∞

3.  = ∞ и = + ∞

 = −∞

4. x = 0

5. Первый замечательный предел:  = 1

6. Второй замечательный предел:  (1 +)х = е или (1 + х)1/x = e

e≈ 2,7182… или e≈2,7

*х**х*− бесконечно большая величина

*х*→ 0 ⇒*х*− бесконечно малая величина

*f* (x) →∞⇒*f* (x) − бесконечно большая величина

*f* (x) → 0 ⇒*f* (x) − бесконечно малая величина

7. Если существует lim*f* (x), то существуют и односторонние пределы:

левый *f*(x0−0) = *f* (x) и правый *f*(x0+0) =*f* (x), причем

*f* (x) = *f*(x0−0) = *f*(x0+0)

8. Если функция у = *f* (x) непрерывна в точке x0, то *f* (x) = *f*(x0) или *f*(x0−0) = *f*(x0+0) =*f*(x0), в противном случае точка x0 − точка разрыва функции.

# Решение типовых примеров

Найти указанные пределы.

*Пример 1*

Функция определена, а значит и непрерывна в точке х =2, поэтому данный предел равен значению функции в этой точке ==

*Пример2*

При подстановке в выражение под знаком предела вместо его предельного значения получаем неопределенность вида .

Функция  не определена в точке х =3, т.е. х =3 −точка разрыва, но т.к. переменная *х* стремится к точке 3, х→3, а не равна 3, то под знаком предела можно производить тождественные преобразования выражения, не принимая во внимание его поведения в предельной точке.

Разложим квадратные трехчлены, входящие числитель и знаменатель, на линейные множители по формуле: aх2 +bх + с = a(х−х1) (х−х2) − корни квадратного уравнения

aх2 +bх + с =0

2х2−3х − 9 =0

D = b2−4ac =9 − 4 ⋅2 ⋅(−9) = 81

х1,2 = 

2*х*2 − 3*х*−9 = 2(*х*− 3)(*х* +)

Аналогично:

*х*2− х − 6 = (*х*−3)(*х*−2)

Преобразуем данный предел:



Функция  в точке *х* = 3 не существует, а предел от этой функции при х→ 3 существует и равен 

*Пример 3*

Здесь сталкиваемся с неопределенностью вида , избавиться от которой можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной (или делением числителя и знаменателя на старшую степень переменной):



т.к.  = 0;  = 0 как пределы от бесконечно малых

величин

 = 0;  = 0

*Пример 4*

Для раскрытия неопределенности , умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю: 

= 

Заменим «в числителе по формуле разность квадратов»

(a−b)(a + b) = a2 - b2

= (*x +* 2) − (4 −*x*) = 2*x*−2 = 2(*x*− 1)

в знаменателе *х*2 −1 =(*x*−1)( *x*+1)



*Пример 5*

Для раскрытия неопределенности вида в данном примере воспользуемся первым замечательным пределом и одним из его следствий:

 = 1  = 1

заменим предел произведения произведением пределов и вынесем постоянный множитель =

по первому замечательному пределу (u =2x или u = 4x)

= 1;  = 

Из первого замечательного предела вытекают и другие следствия

; α

***Задание 1.***Перед выполнением работы ответьте на следующие вопросы:

1. Дайте определение предела последовательности и предела функции;

2. Перечислите основные свойства пределов;

3. Дайте определение бесконечно большой и бесконечно малой функции;

4. Запишите формулы первого и второго замечательных пределов;

***Задание 2.***

1. Вычислите предел путем разложения на множители
2. Раскрыть неопределенность вида вызванную присутствием корня
3. Вычислите предел при :
4. Вычислите предел при :
5. Вычислите предел с помощью первого замечательного предела:

**Тема 2.Дифференциальное исчисление**

**Цель работы:**систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знанийи практических умений студентов по теме «Дифференциальное исчисление»

*Теоретические сведения:*

## Производная и дифференциал функции

Важнейшим понятием математического анализа является производная, которая определяет скорость изменения функции относительно своего аргумента.

Производная функции у = *f*(*x*) в точке х0 называется предел (если он существует) отношения приращения функции Δ *f*(x) к приращению аргумента Δ(х) при стремлении последнего к нулю и обозначается *f’* (х0), т.е. Другие обозначения: f’(x); y’(x); 

При вычислении производных используют таблицу производных и правила дифференцирования.

***Правила дифференцирования***

Пусть u = u(x) и v = v(x) − непрерывные функции в точке х = х0, тогда существуют производные от суммы (разности), произведения, частного этих функций в заданной х0.

1. (u ± v)′ = u′± v′
2. (u · v)′ = u′ ·v + u ·v′
3. (c· u)′ = c · u′
4. c′ = 0
5. x′ = 1
6. 

### Производная сложной функции

Пусть у =f(u), а u = ϕ(x), тогда у =f(ϕ(x)) − сложная функция, ее производная находится по правилу дифференцирования сложной функции. Если каждая функция у =f(u) и u = ϕ(x), дифференцируема по своему аргументу, то 

Таблица производных основных элементарных функций и производных сложных функций

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | функция  у =f(х) | производная  у′ =f′(х) | функция у=f(u), где u = ϕ(x) | производная y′=f′(u)· u′ |
| 1 | *у =хn* | *(xn)′=n · xn-1* | *y = un* | *(un)′= n·un-1·u′* |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 | *y =ax* | *(ax) =ax · ln a* | *y =au* | *(au) =au · ln a ·u′* |
| 5 | *y =ex* | *(ex) =ex* | *y =eu* | *(eu) =eu ·u′* |
| 6 | *y =*log*ax* | (log*ax*)′ = | *y =*log*au* | (log*au*)′ = |
| 7 | *y =*ln *x* | (ln *x*)′ = | *y =*ln *u* | (ln *u*)′ = |
| 8 | *y =*sin *x* | (sin *x*)′ = cos *x* | *y =*sin *u* | (sin *u*)′ = cos u *·u′* |
| 9 | *y =*cos *x* | (cos *x*)′ = | *y =*cos *u* | (cos *u*)′ = *·u′* |
| 10 | *y =*tg*x* | (tg*x*)′ = | *y =*tg*u* | (tg*u*)′ = |
| 11 | *y =*ctg*x* | (ctg*x*)′ = | *y =*ctg*u* | (ctg*u*)′ = |
| 12 | *y =*arcsin*x* | (arcsin*x*)′ = | *y =*arcsin*u* | (arcsin*u*)′ = |
| 13 | *y =*arcos *x* | (arcos *x*)′ = | *y =*arcos *u* | (arcos *u*)′= |
| 14 | *y =*arctg*x* | (arctg*x*)′ = | *y =*arctg*u* | (arctg*u*)′ = |
| 15 | *y =* arcctg*x* | (arcctg*x*)′ = | *y =* arcctg*u* | (arcctg*u*)′ = |

**Правило Лопиталя.**

Если или , то 

**Дифференциал функции −**понятие столь же часто используемое в математике как и производная.

Дифференциал функции у = f(х) в точке х0 вычисляется по формуле  или , где dx− дифференциал аргумента.

Поэтому вычисление дифференциала функции сводится к технике нахождения ее производной.

**Решение типовых примеров.**

Найти производные следующих функций.

*Пример 1*



*Пример 2*



*Пример 3*



*Пример 4*



Таким образом,



*Пример 5*



Таким образом,



*Пример 6*



Таким образом,



***Задание 1.***Перед выполнением работы ответьте на следующие вопросы:

1. Дайте определение производной;

2. Перечислите основные свойства производной;

3. Дайте определение дифференциала

***Задание 2.***

1. Найдите производную:

а) У=5х8-6х2+3х-41;

б) 

в) ; найдите .

г)  Найдите 

1. Напишите уравнение касательной к кривой  в точке абсциссой х0=3;
2. Точка движется прямолинейно по закону S=2t3-3t2+4 (s – в метрах, t-секундах). Найдите ускорение точки в конце 3-й секунды.

**Тема 3.Интегральное исчисление**

**Цель работы:**систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знанийи практических умений студентов по теме «Интегральное исчисление»

*Теоретические сведения по теме:Неопределенный интеграл*

*Определение:* **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

F(x) + C. Записывают: , где - есть некоторая первообразная функции на этом промежутке, С – const. При этом знак называется знаком интеграла, - подынтегральной функцией, - подынтегральным выражением, - переменная интегрирования, С- постоянная интегрирования.

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется интегрированием данной функции.

Интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования. У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределенный интеграл.

**Таблица неопределенных интегралов**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Свойства неопределенного интеграла:**

;

;

;

**Методы интегрирования  
1. Непосредственное интегрирование**

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на *примере 1*:

.

*Пример 2*.

.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяется способ, описанный ниже.

**2. Метод замены переменных**

**Теорема:** Если требуется найти интеграл , но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены и получается: .

*Пример 3*. Найти неопределенный интеграл .

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdx*.

.

*Пример 4*. .

Замена Получаем:

.

*Пример 5*.

.

**Определенный интеграл**

Пусть функция определена на отрезке *a* ≤*x*≤*b* и <<произвольное разбиение этого отрезка на n частей:

Определение: сумма вида∆,

где  ∆

называется интегральной суммой функции *f*(*x*) на отрезке [].

Определение: Предел интегральной суммы при условии, что число разбиений отрезка [] , а наибольшая из разностей ∆(длин частичных отрезков разбиения) стремится к нулю называется определенным интегралом от функции  на отрезке [] и обозначается , где −подынтегральная функция

 нижний предел интегрирования

 верхний предел интегрирования

Если функция определена, непрерывна и имеет первообразную на

отрезке [], то определенный интеграл находится по формуле Ньютона –

Лейбница



Основные свойства определенного интеграла.









**Геометрический смысл определенного интеграла**

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой двумя прямыми  и и отрезком оси абсцисс















*y*

S



Если 

на отрезке [a,b]















*y*

S



Если 

на отрезке [a,b]

Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми и и двумя прямыми  и , где на отрезке  находится по формуле



S















*y*



##### Решение типовых примеров

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями , 

**1.** Найдем вершины парабол для данных функций по формуле 





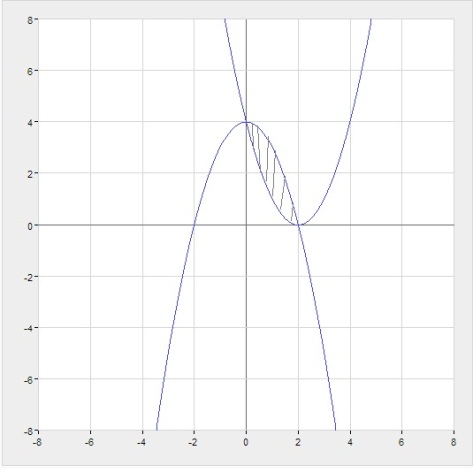


Точка (2;0) − вершина параболы Точка (0;4) − вершина параболы

**2**. Найдем точки пересечения парабол. Для этого приравняем данные функции решим получившееся уравнение



Точки (0;4) и (2;0) − точки пересечения парабол. Построим графики данных функции по найденным точкам, определив таким образом криволинейную трапецию.



Найдем площадь заштрихованной фигуры по формуле:





Ответ: 

***Задание 1.***Перед выполнением работы ответьте на следующие вопросы:

1. Дайте определение неопределенного интеграла.
2. Чему равен неопределенный интеграл?
3. Как называется каждый элемент в обозначении неопределенного интеграла?
4. Что называется интегрированием функции?
5. Перечислить основные свойства неопределенного интеграла.
6. Таблица неопределенных интегралов.
7. В чем заключается метод непосредственного интегрирования при отыскании неопределенного интеграла?
8. В чем заключается метод замены переменной (метод подстановки) при отыскании неопределенного интеграла?
9. Дайте определение определённого интеграла;
10. Перечислите свойства определённого интеграла;
11. Метод замены переменной в определенном интеграле;
12. Дайте определение криволинейной трапеции. Как вычислить её площадь?

***Задание 2. Вычислите интегралы:***

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 

***Задание 3.***1. Сделайте чертёж и вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями: у= - х2 +4 и осью ох.

1. Сделайте чертёж и найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

у=-х2+10х-16, у=х+2.

**Тема 4.Дифференциальные уравнения**

**Цель работы:**систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знанийи практических умений студентов по теме «Дифференциальные уравнения»

*Теоретические сведения:*

**Дифференциальные уравнения.**

**Определение:** Уравнение, связывающее независимую переменную *х*, неизвестную функцию *у* и ее производную первого порядка  называется **дифференциальным уравнением первого порядка.**

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записывать в виде:

= 0 или 

**Определение:** Решением дифференциального уравнения называется функция которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество.

Функция  называется **общим решением** дифференциального уравнения.

**Определение:Частным решением** дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего, при конкретном значении С, вычисленном при помощи начального условия.

Нахождение частного решения дифференциального уравнения называется решением задачи Коши.

**Определение:** Если общее решение получено в неявном виде (т.е. в виде неразрешенном относительно *у*), то такое решение называется общим интегралом. Если в общем интеграле постоянной С придать конкретное значение, то мы получим частный интеграл.

1. **Уравнение с разделяющими переменными**.

Это уравнение вида 

Интегрируя обе части данного уравнения найдем общий интеграл (общее решение)



Или дифференцированное уравнение с разделяющими переменными может быть записано в виде



Решение:

1) разделим обе части уравнения на

 и получим уравнение



общий интеграл данного уравнения находим интегрированием левой и правой частей



1. **Однородные дифференциальные уравнения I-го порядка.**

Это уравнение вида , где непрерывная функция  удовлетворяет условию: 

Решение подобного уравнения заключается в том, что оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой , где  новая искомая функция и 

Решение:

1. Дифференцируем равенство 
2. Подставим  и  в данное уравнение и получим



− уравнение с разделяющими переменными *х* и *и*

**3. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами**

Это уравнения, которые могут быть записаны в виде:

 (1)

где и некоторые числа

Решение:

Составляем характеристическое уравнение

 (2)

Тогда возможны 3 случая:

1. Если корни уравнения (2) различные, действительные числа: , ,, то общее решение одного уравнения (1) имеет вид: 
2. Если корни уравнения (2) действительные и равные: , то общее решение одного уравнения (1) имеет вид: 
3. Если корни уравнения (2) комплексные: ; где , то общее решение уравнения (1) имеет вид: , где произвольные постоянные

###### Решение типовых примеров.

**Пример 1.**  Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

это уравнение с разделяющимися переменными



проинтегрируем обе части



**Пример 2**. Найти частное решение (частный интеграл).



Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части на

Получим 





 общий интеграл

Найдем частный интеграл с помощью начального условия 

Получим 





Тогда частный интеграл имеет вид



**Пример 3.** Найти общее решение (общий интеграл) однородного уравнения I-го порядка









 (1)

Введем подстановку 



подставив в уравнение (1)

Получим 

поставим функцию 

общий интеграл

**Пример 4.** Найти частное решение однородного дифференцированного уравнения II-го порядка



Составим характеристическое уравнение



Найдем производную общего решения



Используя начальные условия получим систему уравнений



Подставим найденные значения  и  в общее решение и получим частное решение



частное решение

**Пример5.** Найти общее решение дифференцированного уравнения



Составим характеристическое уравнение



комплексные числа общее решение имеет вид 

***Задание 1.***Перед выполнением работы ответьте на следующие вопросы:

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения;

2. Назовите виды дифференциальных уравнений.

***Задание2.***

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:
2. y′′- 4y′-5у=0
3. y′′+6y′+13y = 0
4. у′′+16у=0
5. Найдите общее решение уравнения:уdx+xdy=0;.
6. Найдите частное решение дифференциального уравнения (1-x2)y′+xy = 0 y=4 при x=0

**Тема 5. Основы теории вероятностей и математической статистики**

**Цель работы:**систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знанийи практических умений студентов по теме «Основы теории вероятностей и математической статистики».

*Теоретические сведения:*

1. **Случайное событие**

Случайное событие – это любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти. Случайное событие – это результат испытания.

Испытание (опыт, эксперимент) – в этом определении понимается определение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат. Испытание может проводиться человеком, но может осуществляться и независимо от человека. Человек в этом случае выступает в роли наблюдателя.

Событие обозначаются начальными прописными (заглавными) буквами латинского алфавита**А, В, С**.

Достоверное событие – это событие, которое в результате испытания обязательно должно произойти.

Невозможное событие – это событие, которое в результате испытания

вообще не может произойти.

События называются несовместимыми, если наступление одного из них исключает появление другого. В противном случае события – совместные.

Противоположные события: два события А и Ā называются противоположными, если не появление одного из них в результате данного испытания влечет появление другого. (Ā читается «не A»).

**2. Вероятность случайного события**

Численная мера степени объективности возможности наступления события называется *вероятностью случайного события*.

*Классическое определение* вероятности события А:

P(A) =

Вероятность события А равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию А (m), к общему числу случаев (n).

**Пример 1**

Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

*Решение:* Обозначим через А событие, состоящее в том, что число на взятой карточке кратно 5. В данном испытании имеется 30 равновозможных исходов, из которых событию А благоприятствуют 6 исходов 5, 10, 15, 20, 25, 30).

Следовательно, P(A) = = 0,2

**Пример 2**

Подбрасывают 2 монеты. Какова вероятность, что обе упадут «гербом» кверху?

*Решение:*  4 исхода бросания монет: ГГ, ГР, РГ, РР.

Пусть событие А – «выпали 2 герба» - этому событию благоприятствует один исход. P(A) = = = 0,25

**Пример 3**

Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 7 или 8?

*Решение:*

Обозначим события: А – «выпало 7 очков», В –«выпало 8 очков».

Событию А благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1).

События В благоприятствует 5 исходов: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2).

Всех равновозможных исходов n=62 =36.

P(A) = = = 0,167, P(B) = = 0,139

Итак, Р(А) > Р(В) получить в сумме 7 очков более вероятное событие, чем в сумме 8 очков.

**3. Статистическое определения вероятности**

Относительная частота события – это доля тех фактически проведенных испытаний, в которых событие А появилось W = Р\*(А)= . Это опытная экспериментальная характеристика, где m – число опытов, в которых появилось событие А; n – число всех поведенных опытов.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний Р(А) =

**Пример 4**

Из 982 больных, поступивших в хирургическую больницу за месяц, 275 человек имели травмы. Какова относительная частота поступления больных с этим видом заболевания?

*Решение*: Р\*(А) =

**Пример 5**

При стрельбе по мишени частота w=0,75. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

*Решение*: W = ⇒m = Wn; m = 0,75·40 = 30.

*Ответ*: было получено 30 попаданий.

**4. Закон сложения вероятностей**

Сумма двух событий – это такое событие, при котором появляется хотя бы одно из этих событий (А или В).

Если А и В совместные события, то их сумма А+В обозначает наступление события А или события В, или обоих событий вместе.

Если А и В несовместимые события, то сумма А+В означает наступление или события А или события В.

**Пример 6**

Победитель соревнования награждается призом (событие А), денежной премией (событие В), медалью (событие С). Что представляют собой события А+В?

*Решение:*

События А+В состоит в награждении победителя или призом денежной премией, или тем и другим.

**Пример 7**

Турист имеет возможность посетить 3 города: А, В и С. Обозначаем события: А – турист посетил город А; В- турист посетил город В;

С-турист посетил город С. В чем заключается событие А+С?

*Решение*:

Турист посетил только один из городов А или С, или он посетил их оба.

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:Р(А+В)=Р(А)+(В).

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей их совместного появления:Р(А+В)=Р(А)+(В) – Р(АВ).

Сумма вероятностей дискретный событий, образующих полную группу, равна единицеР(А1 )+ Р(А 2)+…= Р(Аn)=1 или

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: Р(А)+Р(Ā)=1.

**5.Закон умножения вероятностей**

Произведение двух событий – это событие, состоящее в совместном появлении этих событий (А и В).

**Пример 8**

Пусть имеются следующие события: А – «из колоды карт вынута дама»; В – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Что представляет собой событие АВ?

*Решение:* АВ есть событие «вынута дама пик».

Событие В называются независимыми от события А, если появление события А не изменяет вероятности появления события В.

Вероятность появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

Р(А·В)=Р(А)· Р(В).

Для зависимых событий:

Р(АВ)=Р(А) ·Р(В/А).

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло.

**Пример 9**

Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

*Решение*: Р(А/В)=Р(А) ·Р(В) = .

**Пример 10**

1. Найти вероятность того, что в семье из двух детей: 1) оба ребенка – мальчики;2) оба ребенка – девочки; 3) старший ребенок – мальчик, а младший – девочка. Вероятность рождения мальчика – 0,515.

*Решение:*

Р(ММ)=Р(М) ·Р(М)=0,515 ·0,515=0,265;

Р(ДД)=0,485· 0,485=0,235;

Р(МД)=0,515· 0,485=0,25

**Пример 11**

Вероятность того, что студент в летнюю сессию сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут

сданы 1)только второй экзамен; 2)все три экзамена.

*Решение*:

1. Р(В)=Р(А1 А2 А3 )=Р(А1 ) · Р(А2 ) · Р(А3 )=0,1 0,9 0,2=0,018
2. Р(А1А2 А3)=Р(А1) · Р(А2 ) · Р(А3 )=0,9 0,9 0,8=0,648.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из событий А1 , А2 ,…, Аn , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий 1 , Ā2 , …, Ān.

**Пример 12**

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

*Решение:*

Вероятность того, что в мишень попадет первый стрелок и не попадет второй, равна: (А1 Ā2)=0,7· (1-0,8)=0,7· 0,2=0,14

Вероятность того, что попадает второй стрелок в мишень и не попадет первый, равна: Р(Ā1 А2)=(1 – 0,7)· 0,8=0,3·0,8=0,24.

Вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок, равна сумме этих вероятностей: Р(А1 Ā2 )+Р(А1 Ā2 )=0,14+0,24=0,38.

**Пример 13**

Сколько должна планировать пара иметь детей, что бы вероятность хотя бы одного мальчика была выше 90% (вероятность рождения мальчика и девочки – 0,5).

*Решение:* Пусть вероятность того, что все девочки:

Р(Д) = …n = n= 0,9

Вероятность того, что не все девочки:

Р(хотя бы один мальчик) = 1 - n = 0,9.

0,1= n; 1/2n; 2n = 10 ⇒n≈ 4.

**6.Формула Байеса**

Формула Байеса применяется, когда событие *А,* которое может появиться только с одной из гипотез *Н1, Н2 …Нп*, произошло и необходимо произвести количественную пе­реоценку *априорных* вероятностей этих гипотез *Р(Н1), Р(Н2),* ..., *Р(Нп),* известных до испытания, т.е. найти *апостериорные* (получаемые после проведения испытания) условные вероятности гипотез Р(Н1/А), Р(Н2/А), …, *Р(Нп/А):*

*Р(Нi/А)* =

Или вместо *Р(А)* используем ее значение, вычисленное по формуле полной вероятности:

*Р(Нi/А) =*

Итак, пусть до опыта имеются гипотезы *Н1, Н2, ..., Нп*. После опыта становится известной информация о результа­тах опыта, но не полная, а именно: результаты наблюде­ний показывают, что наступило некоторое событие А.

Считается, что до опыта были известны *(априорные)* вероятности гипотез *Р(Н1),Р(Н2), ...,Р(Нп)* и *условные* вероятности *Р(А/Н1),* Р(А/Н2),..., *Р(А/Нп).* Необходимо определить *апостериорные* вероятности гипотез *Р(Н1/А), Р(Н2/А), ..., Р(Нп/А).*

Значение формулы Байеса состоит в том, что при наступ­лении события*А,* т.е. по мере получения новой информа­ции, мы можем проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы. Такой подход называется байесовским.

**Пример 14**

Два охотника одновременно стреляют одинаковыми пу­лями в медведя. В результате медведь был убит одной пу­лей (событие *А).*

Как охотники должны поделить шкуру убитого медведя, если известно, что вероятность попадания у первого охотника 0,3,а у второго 0,6?

*Решение:*

Воспользуемся формулой Байеса. Определим предвари­тельно гипотезы.

Гипотеза *Н1 :*попал первый охотник, второй промахнулся.

Гипотеза *Н*2: попал второй, первый промахнулся.

Гипотеза *Н3:* попали оба охотника.

Гипотеза *Н4*: оба промахнулись.

Событие*А*может произойти только тогда, когда про­изошла либо гипотеза *Н1*, либо гипотеза *Н*2, т. е.:

*Р(А/Н1)=1, Р(А/Н3)=0*

*Р(А/Н2)=1, Р(А/Н4)=0*

Предполагаем, что попадания охотников в медведя не зависят друг от друга. И получаем:

*Р(*) = 0,3·(1 – 0,6) = 0,12;

*Р(Н2*) = 0,6·(1 – 0,3) = 0,42;

*Р(Н3*) = 0,3·0,6 = 0,18;

*Р(Н4*) = (1 – 0,3)(1 – 0,6) = 0,28.

Применяем формулу Байеса:

Р(Н1/А) =

Р(Н1/А) =

Р(Н2/А) =

Р(Н2/А) = .

Таким образом, при справедливом делении первый охотник должен получить шкуры, т.е. меньше четвертой час­ти шкуры, в то время как, на первый взгляд, казалось, что ему причитается шкуры (0,3).

Изучениеконспектов занятий, повторить формулы, ответы на вопросы по элементам теории вероятностей (определение вероятности, случайные события, вероятность события, сложение и умножение вероятностей, формула Бернулли). Подготовка к практическим занятиям с использованием рекомендаций преподавателя, повторить: теоремы сложения и умножения вероятностей; формула полной вероятности, Формула Байеса, решение задач по теме.

***Задание 1.***Перед выполнением работы ответьте на следующие вопросы:

1. Сформулируйте определение вероятности, случайного события, вероятность события;

2. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей; формулу полной вероятности, формула Байеса.

***Задание 2.***

1. Вычислите , , , , P3, P6
2. Вычислите
3. Сколько существует способов расса­дить 6 гостей по шести местам за праздничным столом?
4. В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя и культорга. Сколько существует способов это сделать?
5. В одном ящике имеется 12 однотипных деталей, из которых четыре нестандартные, в другом ящике 15 деталей и из них три нестандартные. Из каждого ящика наудачу извлекается по две детали. Найдите вероятность того, что из первого ящика извлекли две нестандартные, а из второго ящика – две стандартные детали.
6. **Тема 5. Основные численные методы**

**Цель работы:**систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практических умений студентов по теме «Основные численные методы».

*Теоретические сведения:*

основные понятия о математическом синтезе и анализе (Численное интегрирование. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формула прямоугольника. Формула трапеций. Формула парабол (формула Симпсона).

##### Методы численного интегрирования

**Метод прямоугольников**

Идея численного интегрирования предельно проста и вытекает из геометрического смысла определенного интеграла – значение определенного интеграла численно равно площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции *y=f(x)*, осью абсцисс и прямыми *х=а, х=b*. Находя приближенно площадь криволинейной трапеции, мы получаем значение интеграла. Формально процедура численного интегрирования заключается в том, что отрезок [а, b] разбивается на n частичных отрезков, а затем подинтегральная функция заменяется на нем легко интегрируемой функцией, по определенной зависимости интерполирующей значения подинтегральной функции в точках разбиения. Рассмотрим теперь простейшие из численных методов интегрирования.

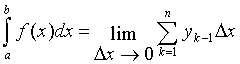
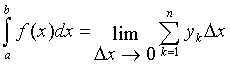
Итак, функция *у=f(x)* интегрируема на сегменте [a,b] и требуется вычислить ее интеграл . Составим интегральную сумму для *f(x)* на сегменте [a,b] . Для этого разобьем сегмент [a,b] на n равных между собой частей с помощью точек: *x1, x2, … , xk, … , xn-1*.

Если длину каждой части мы обозначим через d1.gif (857 bytes)*х*, так что http://www.exponenta.ru/educat/systemat/gritsenko/images/image006.gif, то для каждой точки *xk* будем иметь: http://www.exponenta.ru/educat/systemat/gritsenko/images/image008.gif*(k=0, 1, 2, …, n).*

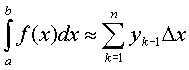
Обозначим теперь через *yk*значение подынтегральной функции *f(x)*при image012.gif (344 bytes) то есть положим image010.gif (405 bytes) *(k=0, 1, …, n).*

Тогда суммы image014.gif (595 bytes) будут интегральными для функции *f(x)* на отрезке [a,b]*.* (При составлении первой суммы мы рассматриваем значения функции *y=f(x)* в точках, являющихся левыми концами частичных сегментов, а при составлении второй суммы – в точках, являющихся правыми концами этих сегментов.)

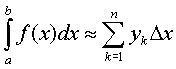
По определению интеграла имеем:

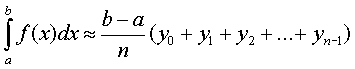
    и    

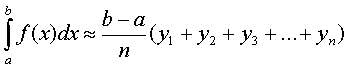
Поэтому в качестве приближенного значения image021.gif (391 bytes) естественно взять интегральную сумму image024.gif (599 bytes),т.е. положить:



а также

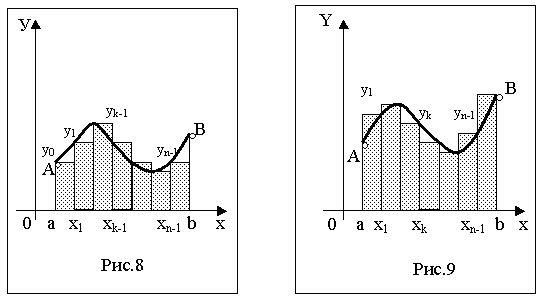


т.е                                     (1)

и                                          (1')

Эти приближенные равенства называются формулами прямоугольников.

В том случае, когда *f(x)bor.gif (855 bytes) 0*, формулы (1) и (1’) с геометрической точки зрения означают, что площадь криволинейной трапеции*aABb*, ограниченной дугой кривой *y=f(x),* осью *Ох* и прямыми *х=а*и*х=b*, принимается приближенно равной площади ступенчатой фигуры, образованной из n прямоугольников с основаниями image035.gif (359 bytes) и высотами: *y0, y1, y2, …, yn-1* – в случае формулы (1) (рис.8) и *y1, y2, y3, …, yn* – в случае формулы (1') (рис.9).



Исходя из приведенного выше геометрического смысла формул (1) и (1') способ приближенного вычисления определенного интеграла по этим формулам принято называть *методом прямоугольников*.

Всякое приближенное вычисление имеет определенную ценность лишь тогда, когда оно сопровождается оценкой допущенной при этом погрешности. Поэтому формулы прямоугольников будут практически пригодны для приближенного вычисления интегралов лишь в том случае, если будет существовать удобный способ оценки получающейся при этом погрешности (при заданном n), позволяющий к тому же находить и число частей n разбиения сегмента, гарантирующее требуемую степень точности приближенного вычисления.

Будем предполагать, что функция *f(x)* имеет ограниченную производную на сегменте [a, b], так что существует такое число *М>0*, что для всех значений х из [a, b] выполняется неравенство *|f'(x)|mor.gif (852 bytes)M*. Качественный смысл этого неравенства заключается в том, что скорость изменения значения функции ограничена. В реальных природных системах это требование практически всегда выполнено. В этих условиях абсолютная величина погрешности Rn, которую мы допускаем, вычисляя интеграл image057.gif (391 bytes) по формуле прямоугольников может быть оценена по формуле [27]:

*|Rn| mor.gif (852 bytes) M(b-a)2/2n*                                       (2)

При неограниченном возрастании n выражение *M(b-a)2/2n*, а следовательно, и абсолютная величина погрешности *Rn* будет стремиться к нулю, т.е. точность приближения будет тем больше, чем на большее число равных частей будет разделен сегмент [a, b]. Абсолютная погрешность результата будет заведомо меньше заданного числа e.gif (847 bytes)*>0*, если взять

*n > M(b-a)2/2*e.gif (847 bytes)*.*

Следовательно, для вычисления интеграла image058.gif (391 bytes) с указанной степенью точности достаточно сегмент [a, b] разбить на число частей, большее числа *M(b-a)2/2*e.gif (847 bytes)*.*[27]*.*

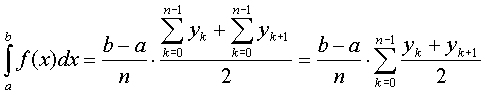
Метод прямоугольников – это наиболее простой и вместе с тем наиболее грубый метод приближенного интегрирования. Заметно меньшую погрешность дает другой метод – метод трапеций.

**Метод трапеций**

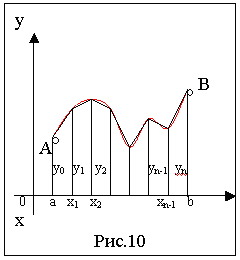
Очевидно, что чем больше будет число n отрезков разбиения, тем более точный

результат дадут формулы (3а) и (3б). Однако увеличение числа отрезков разбиения промежутка интегрирования не всегда возможно. Поэтому большой интерес представляют формулы, дающие более точные результаты при том же числе точек разбиения.

Простейшая из таких формул получается как среднее арифметическое правых частей формул (1) и (1'):

                (4)

Легко усмотреть геометрический смысл этой формулы. Если на каждом отрезке разбиения дугу графика подинтегральной функции y=f(x) заменить стягивающей ее хордой (линейная интерполяция), то мы получим трапецию, площадь которой равна image062.gif (415 bytes) и следовательно, формула (4) представляет собой площадь фигуры, состоящей из таких трапеций (рис.10) . Из геометрических соображений понятно, что площадь такой фигуры будет, вообще говоря, более точно выражать площадь криволинейной трапеции, нежели площадь ступенчатой фигуры, рассматриваемая в методе прямоугольников.



Приведя в формуле (4) подобные члены, окончательно получим

image079.gif (1040 bytes)              (5)

Формулу (5) называют *формулой трапеций*.

Формулой трапеций часто пользуются для практических вычислений. Что касается оценки погрешности *Rn*, возникающей при замене левой части (5) правой, то доказывается, что абсолютная величина ее удовлетворяет неравенству:

image081.gif (545 bytes)                                      (6)

где *М2* – максимум модуля второй производной подинтегральной функции на отрезке [a,b], т.е.

image083.gif (541 bytes).

Следовательно, *Rn* убывает при besk.gif (915 bytes) по крайней мере так же быстро, как image085.gif (235 bytes).

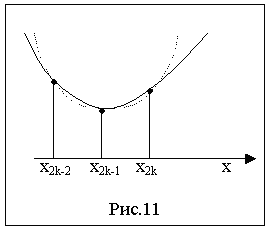
Абсолютная погрешность *Rn* будет меньше наперед заданного числа e.gif (847 bytes) > *0*, если взять image087.gif (522 bytes).

**Метод парабол (метод Симпсона)**

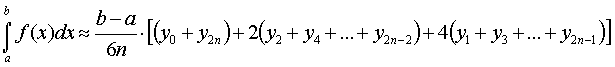
Значительное повышение точности приближенных формул может быть достигнуто за счет повышения порядка интерполяции. Одним из таких методов приближенного интегрирования является метод парабол. Идея метода исходит из того, что на частичном промежутке дуга некоторой параболы в общем случае теснее прилегает к кривой *y=f(x),* чем хорда, соединяющая концы дуги этой кривой, и поэтому значения площадей соответствующих элементарных трапеций, ограниченных “сверху” дугами парабол, являются более близкими к значениям площадей соответствующих частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху дугой кривой *y=f(x),*чем значения площадей соответствующих прямолинейных трапеций. Сущность метода заключается в следующем. Отрезок [a,b] делится на *2n* равных частей. Пусть точки деления будут

*х0=а, x1, x2, …x2n-2, x2n-1, x2n=b,*

а *y0, y1, …y2n* – соответствующие значения подинтегральной функции на отрезке [a,b]*.* Произведем квадратичную интерполяцию данной подинтегральной функции на каждом из отрезков разбиения (заменим дугу графика подинтегральной функции дугой параболы с вертикальной осью) (рис.11).



Приведем без вывода формулу парабол в окончательном виде:

              (7)

(Подробный вывод формулы (7) см. в [13] ).

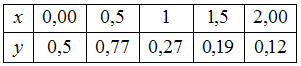
Если подинтегральная функция *f(x)* имеет на отрезке [a,b] непрерывную четвертую производную, то для поправочного члена формулы (7) имеет место оценка

image098.gif (642 bytes)                                    (8)

где *М4*- максимум модуля четвертой производной подинтегральной функции на отрезке [a,b].

Cравнивая между собой оценки (6) и (8), замечаем, что с увеличением n поправочный член формулы трапеций уменьшается пропорционально величине image101.gif (235 bytes), а для формулы парабол – пропорционально величине image100.gif (237 bytes), т.е. метод парабол сходится значительно быстрее метода трапеций, тогда как с точки зрения техники вычислений оба метода одинаковы.

**Примеры решения задач с помощью численных методов.**

Для приближенного вычисления определенного интеграла от функции  
http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/E8845E0F723794A3B78B6E3448323634.png на интервале http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/68963F6446C30095A6CDA845D3175BE1.png можно воспользоваться формулой трапеций  
http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/C0611E22CADA42EC6F4BBBD1C59DFA3B.png  
Интервал http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/BDF55C4CBA3C0C4E7F010E13997FB486.png разбили на 4 равные части и вычислили соответствующие приближенные значения http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/3F5DFA46AB5463D861D5E7CEADE3BF1C.png.  
Получили   
Найти  http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/079D2852B4877048BD5BCB28F59E4B23.png …

Решение: Конец формы

Разобьем отрезок [*a*;*b*] на *n* равных частей с шагом http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/008910806AA6CF60BED9910BFAB47CAB.png  
Получим http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/C56740E744EEFC0D332B8E9A35524F9F.png  
Тогда http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_180629/6F4E4F9FFCBB4AA030CDE6875A762445.png где *i* меняется от 0 до *n*.   
Подставим полученные значения в формулу трапеций.

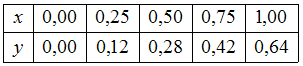
 Ответ 0.77

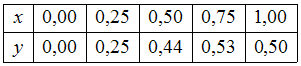
***Задание 1.***Перед выполнением работы ответьте на следующие вопросы:

1. Назовите методы численного интегрирования;

2. Почему данный метод называется методом трапеций?

3.Запишите формулу трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла.

***Задание 2.*** Для приближенного вычисления определенного интеграла от некоторой функции http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/34C4707D8E1BF203909EB27B935C51B0.png на интервале http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/708531448519EB8424A9582B32DE5E61.png можно воспользоваться  формулой трапеций http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/2362E33437A7911A9B04643783BFEB2C.png  
Интервал http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/A0936205975C0D4CC6AF51F3C267ABC4.png разбили на 4 равные части и значения функции в соответствующих точках записали в виде таблицы:  
.  
Вычисления производят с точностью до 0,01.  
Тогда http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/83A3521D56300649A275851A21515574.png …

***Задание 3.***Для приближенного вычисления определенного интеграла можно воспользоваться формулой трапеций: http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/1ADFD09813E5EB8636EDB415E64AA72D.png  
Отрезок http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/EDBD1599D887DAFD84DCBD8B7266AD79.png разбивают на *n* равных частей и пусть http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/589FF7F243AA11CF9F00D80C4A1D8507.png  
Отрезок http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/17916C93442BB6123FE461ED8502A322.png разбили на 4 равные части и вычислили соответствующие приближенные значения функции http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/024E4E74EEC4316C6C210278AE2F1B45.png  
Результаты вычислений занесли в таблицу: .  
Вычисления производят с точностью до 0,01.  
Тогда http://test.i-exam.ru/training/student/pic/1262_210635/5337E6EA1454CC38FB551A77D16340D2.png …

**5.СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

*Основные источники:*

1. Богомолов Н.В., Самойленко П. И. Математика. Учебное пособие для сред.проф. обр. – М.: «Дрофа», 2011 – 396 с.

*Дополнительные источники:*

1. Богомолов Н. В. Сборник задач по математике. Учебное пособие для сред.проф. обр. – М.: «Дрофа»,2012 – 205 с.
2. Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В.Математика и информатика– М.: «Академия», 2012– 272 с.

*Интернет-ресурсы*

1. Библиотека учебной и научной литературы <http://sbiblio.com>
2. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов <http://school-collection.edu.ru/>
3. Единое окно доступа к образовательным ресурсам http://window.edu.ru/library