Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**Методические рекомендации**

**по выполнению практических работ**

по учебной дисциплине

**«ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»**

для студентов специальности

**09.02.07 Информационные системы и программирование**

**квалификация:** Программист

Челябинск, 2019

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методические рекомендации составлены в соответствии с утвержденной программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  комиссией ЕМД  протокол № \_\_\_  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_2019 г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/ Макаренко О.И / | УТВЕРЖДАЮ  Зам. директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2019 г. |

**Автор:** Макаренко О.И, преподаватель Южно-Уральского государственного технического колледжа

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Элементы высшей математики» предназначены для обучающихся по специальности **09.02.07 Информационные системы и программирование квалификация:** Программист.

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» предусмотрено выполнение 15практических работ, направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие;

ОК 04.Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами;

ОК05.Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности;

***умений*:**

* Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
* Решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
* Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
* Решать дифференциальные уравнения;
* Пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

**обобщение, систематизацию, углубление и закрепление *знаний*:**

* Основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
* Основы дифференциального и интегрального исчисления;
* Основы теории комплексных чисел.

В методических рекомендациях по выполнению практических работ содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая практическая работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий.

**Ход выполнения практической работы**

Практические работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

*Ход работы:*

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. В тетрадях для практических работ выполнить самостоятельную работу или решить номера, которые указаны в работе.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

**Критерии оценивания практических работ**

*Оценка «5»* ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

*Оценка «4»* ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

*Оценка «3»* ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

*Оценка «2»* - решено мене 70% предлагаемых заданий.

**Перечень практических работ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № работы | Наименование практических работ | Кол-во  часов |
|  | Нахождение обратной матрицы. | 2 |
|  | Решение систем линейных уравнений матричным методом и методом Крамера | 2 |
|  | Решение систем линейных уравнений методом Гаусса | 2 |
|  | Определение взаимного расположения прямых, угла между прямыми и расстояния от точки до прямой | 2 |
|  | Выполнение операций над комплексными числами в различных формах. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом | 2 |
|  | Раскрытие различных неопределённостей | 2 |
|  | Исследование функции на непрерывность, классификация точек разрыва | 2 |
|  | Вычисление производных сложных функций | 2 |
|  | Применение производной к исследованию функции | 2 |
|  | Вычисление неопределённых интегралов с помощью замены переменной | 2 |
|  | Вычисление неопределённых интегралов с помощью метода интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций | 2 |
|  | Вычисление определённых интегралов | 2 |
|  | Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур | 2 |
|  | Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка | 2 |
|  | Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка | 2 |

**Практическая работа № 1**

***Нахождение обратной матрицы.***

**Цель работы:**

1. Научиться вычислять обратную матрицу.

**Знания** (актуализация):

1. Понятие матрицы, определителя матрицы.

2. Понятие обратной матрицы.

**Умения:**

1. Вычисление определителей и алгебраических дополнений матриц.

2. Вычисление обратной матрицы.

**Содержание работы:**

***Алгоритм вычисления обратной матрицы:***

1. Вычисляем определитель матрицы(если определитель равен нулю, то обратной матрицы не существует).
2. Находим все алгебраические дополнения матрицы.
3. Записываем обратную матрицу по формуле: 

***Пример****:* Для матрицы вычислим обратную:











**Задания для самостоятельной работы**

*Вычислить обратную матрицу:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант № 1 | Вариант № 2 | Вариант № 3 |
| 1. | 1. | 1. |
| 2. | 2. | 2. |

**Практическая работа № 2**

***Решение систем линейных уравнений матричным методом и методом Крамера***

**Цель работы:**

1. Научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.
2. Научиться решать системы линейных уравнений матричным методом.

**Знания** (актуализация):

1. Понятие системы линейных уравнений.
2. Матричный метод и метод Крамера.

**Умения:**

1. Решение систем линейных уравнений матричным методом и методом Крамера.

**Содержание работы:**

Системой из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными называется система вида: (1)

1. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений:



где , 

***Пример*:** Решить систему методом Крамера

Вычисляем определители системы:

,

,

,

.

Чтобы получить определитель , мы заменили в определителе первый столбец на столбец из свободных членов; заменяя в определителе  2-ой столбец на столбец из свободных членов, получаем ; аналогичным образом, заменяя в определителе  3-ий столбец на столбец из свободных членов, получаем . Решение системы:

.

*Ответ: (1; 0; -1)*

2. Запишем систему (I) в матричном виде , тогда решение ищем в виде:  (при условии, что матрица А- невырожденная, т.е. ).

***Пример*:** Решить систему с помощью обратной матрицы

.

Обозначим 



Найдем матрицу 

, , ,

,  , ,

, , ,

, тогда 

*Ответ: (1; 0; -1)*

**Задания для самостоятельной работы:**

Решить системы линейных уравнений а) матричным методом; б) методом Крамера:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 

10) 

**Практическая работа № 3**

***Решение систем линейных уравнений методом Гаусса***

**Цель работы:**

1. Научиться решать системы уравнения методом Гаусса.

**Знания** (актуализация):

1. Понятие системы линейных уравнений.

2. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.

**Умения:**

1. Решение систем линейных уравнений матричным методом Гаусса.

**Содержание работы:**

Процесс решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Гаусса состоит из двух этапов.

*Первый этап* (прямой ход метода) – система приводится к треугольному виду.

*Второй этап* (обратный ход) – неизвестные определяются последовательно, начиная с последнего неизвестного и заканчивая первым.

***Пример 1:*** Решить систему: 

Решение:

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

~~~

полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем, ранг матрицы системы также равен трем, r(A)=3 и число неизвестных n=3, следовательно, система определенная, т.е. имеет единственное решение.

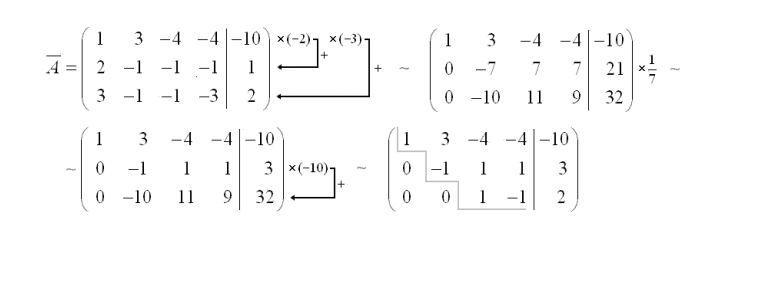
2. Записываем уравнение, используя последнюю строку приведённой матрицы: *z=1.*

Из второй строки: *5y-7z = -7,* т.к*. z=1, то y= 0.*Из третьей строки: *x- 2y +4z=3,* т.к*.z =1 y = 0,* то*x = 1.*

*Ответ: (-1,0,1)*

***Пример 2 :***Решить систему: 

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:



полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем, ранг матрицы системы также равен трем, r(A)=3. Поскольку ранг рассмотренных матриц равен 3, а число неизвестных переменных 4, т. е. r=3< n= 4, то делаем вывод о неопределенности данной системы линейных уравнений (т.е. система имеет бесконечное множество решений).

Базисными переменными будут (соответствующие этим переменным коэффициенты находятся в уголках ступенек треугольной матрицы), а переменная будет свободной. Пусть , тогда

из третьей строки приведённой матрицы: 

из второй строки:

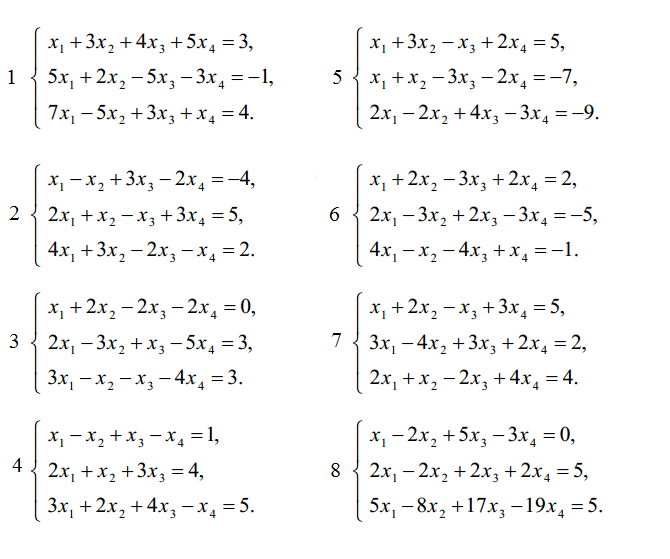
из первой строки:



Ответ: *(2С+1; 2С-1; С+2; С), СR*

**Задания для самостоятельной работы:**

*Решить системы методом Гаусса:*

****

**Практическая работа № 4**

***Определение взаимного расположения прямых, угла между прямыми и расстояния от точки до прямой***

**Цель работы:**

1. Познакомиться с формами заданиями прямой на плоскости.

2. На конкретных примерах научиться составлять различные уравнения прямой.

**Знания** (актуализация):

1. Виды уравнений прямой на плоскости.

**Умения:**

1. Составление различных видов уравнений прямой.

**Содержание работы:**

1. **Аx+Вy+С=0** – общее уравнение прямой

а) *А=0, В≠0.* Уравнение определяет прямую, параллельную оси абсцисс и пересекающую ось ординат в точке с координатой.

б) *B=0,A≠ 0*. Уравнение определяет прямую, параллельную оси ординат и пересекающую ось абсцисс в точке с координатой .

в) c=0. Уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.

**2.**- уравнение прямой, проходящей через две точки *(х1, у1); (х2, у2).*

**3**. - параметрические уравнения прямой, где - координаты любой точки, лежащей на прямой, - координаты направляющего вектора (вектора параллельного прямой или лежащего на прямой).

**4**. - уравнение прямой, проходящей через точку*А (х0, у0)* и направляющий вектор

**5**.- уравнение прямой в отрезках, где *a*и*b*отрезки отсекаемые на осях координат.

**6**.**А(x-х0) + В(y-у0) =0** – уравнение прямой, проходящей через точку *А(х0, у0)*и вектор нормали (вектор, перпендикулярный прямой).

**7. –**уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении, т.е. с заданным угловым коэффициентом k.

***Пример:*** Пусть даны координаты вершин треугольника:*A(4;3), B(16;-6), C(4;-12).*

а) Найти длины сторон треугольника *АВС.*

Используем формулу, определяющую расстояние d между точками и

Тогда по формуле получим:

б) Найти уравнения сторон треугольника, указать их угловые коэффициенты и координаты направляющих и нормальных векторов соответственно.

Используем формулу уравнения прямой, проходящей через две точки

Подставляя в формулу координаты соответствующих вершин треугольника ABC, определим искомые уравнения сторон.

(AB) :

или*-3(x-4)=4(y-3);-3x+12=4y-12;* ***3x+4y-24=0 (AB****)*

Получили общее уравнение прямой АВ. Разрешим это уравнение относительно переменной y , тогда коэффициент перед переменной x является угловым коэффициентом прямой АВ:

Если прямая задана своим общим уравнением *Ax+ By +C = 0*, то вектор нормали и направляющий вектор имеют следующие координаты:

Значит, для прямой АВ:

Аналогично определим уравнения сторон *ВС* и *АС* и координаты их нормальных и направляющих векторов соответственно.

(BC) :

*11(x-16)=2(y+6);11x-176=2y+12;* ***11x-2y-188=0 (BC)***

Координаты их нормальных и направляющих векторов:

(AC) :

*13(x-4)=16(y-3);13x-52=16y-48;* ***13x-16y-4=0 (AC)***

Координаты их нормальных и направляющих векторов:

в) Определить величину угла B треугольника ABC.

Если две прямые*l*1 и *l*2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: и, то угол между ними можно найти по формуле:

В нашем примере: , значит:

. Таким образом, .

г) Найти уравнение высоты CD и ее длину.

Поскольку CD является высотой треугольника АВС, значит CD⊥AB . Используем условие перпендикулярности двух прямых:

прямые перпендикулярны, если их угловые коэффициенты обратно пропорциональны и взяты с противоположными знаками, т.е.

В нашем случае: CD⊥AB

Далее, используем уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении:**.** В нашем случае известна точка C(20;16) точка, через которую проходит высота CD, и угловой коэффициент этой прямой

Тогда получим: **(CD)**

Для определения длины высоты CD, используем формулу ,

но сначала найдем координаты точки D. Поскольку точка D является пересечением прямых CD и AB, то для определения еѐ координат необходимо решить совместно уравнения этих прямых, т.е.

Значит, точка D имеет следующие координаты: D(8;0).

д) Найти уравнение медианы *BK* .

Так как *BK* является медианой, то точка K - середина отрезка AC. Определим координаты середины отрезка *AC* по формуле:

Далее, использую формулу , найдем уравнение медианы BK:

*31(x-16)=-8(y+6);* ***31x+8y-448=0(BK)***

е) Найти уравнение прямой, проходящей через точку D, параллельно стороне AС.

Пусть *l*искомая прямая. Тогда, по условию она параллельна прямой AС. Используем условие параллельности двух прямых:

*две прямые параллельны, если они имеют равные угловые коэффициенты*, т. е.

⇔

В нашем случае: .

Также, по условию, известно, что прямая *l* , проходит через точку D. Тогда используя формулу , определим уравнение искомой прямой:

**13(*l*)**

**Задания для самостоятельной работы:**

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

а) длины сторон треугольника;

б) уравнения сторон треугольника, указать их угловые коэффициентыи координаты направляющих и нормальных векторов соответственно;

в) угол C треугольника ABC;

г) уравнение высоты AL и ее длину;

д) уравнение медианы BK;

е) уравнение прямой, проходящей через точку L, параллельно стороне AB;

ж) сделать рисунок

1) *A(5;14), B(-5;9), C(7;0)*

2) *A(3;9), B(-7;4), C(5;-5)*

3) *A(10;8), B(0;3), C(12;-6)*

4) *A(14;6), B(4;1), C(16;-8)*

5) *A(0;10), B(-5;9), C(7;0)*

6) *A(4;13), B(-6;8), C(6;-1)*

7) *A(15;17), B(-1;4), C(11;-5)*

8) *A(22;23), B(-4;10), C(8;1)*

9) *A(13;11), B(3;6), C(15;-3)*

10) *A(8;12), B(-2;7), C(10;-2)*

**Практическая работа № 5**

***Выполнение операций над комплексными числами в различных формах. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом***

**Цель работы:**

Научиться выполнять операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

**Знания** (актуализация):

1. Понятие комплексного числа.

**Умения:**

1. Выполнение операций над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

2. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

**Содержание работы:**

Число вида , где - действительные числа, а*i*- мнимая единица, определяемая равенством: , называется *комплексным числом*.- действительная часть комплексного числа, - мнимая часть комплексного числа.

Модулем комплексного числа :

Числа и называются *сопряженными.*

Для того чтобы *сложить или вычесть* два комплексных числа в алгебраической форме, нужно соответственно сложить или вычесть их действительные и мнимые части.

***Пример****:* Найти сумму и разность чисел:

Для того чтобы *умножить* два комплексных числа в алгебраической форме, нужно перемножить их как многочлены и учесть при этом, что .

***Пример****:* Найти произведение чисел:

Для нахождения частного комплексных чисел и сначала числитель и знаменатель дроби умножают на сопряженное знаменателю число, а затем производят остальные действия.

***Пример****:* Найти частное чисел:

=

Запись комплексного числа в виде называется алгебраической формой записи комплексного числа. Часто бывает удобна другая форма записи комплексного числа. Пусть и. Тогда по определению аргумента имеем:

|  |
| --- |
|  |

Отсюда получается

Такая форма называется тригонометрической формой записи комплексного числа. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

***Пример*** Записать число в тригонометрической форме.

Найдём модуль этого числа: Аргумент данного числа находится из системы

Значит, один из аргументов числа равен .

Получаем: .

Умножение, деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме определяются следующим образом:

если , , то

1) ;

2) ;

если , , то

3) ;

4) .

В ответ записываются главные значения аргумента полученного результата, заключенные в промежутке .

***Пример:*** Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:

а) б) ; в) , если

а)

б)

в)

*Пример 3* Найти

Представим в тригонометрической форме – 16:

Найдём модуль этого числа: Аргумент данного числа находится из системы

Значит, один из аргументов числа равен .

Получаем: .

Найдем корень: *=*

Найдем различные корни:

**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| 1. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел | | |
|  |  |  |
| 2. Вычислить | | |
|  |  |  |
| 3. Решить уравнение | | |
|  |  |  |
| 4. Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:  а) б) ; в) | | |
| *n=3* | *n=3* | *n=6* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5.Выполнить действия в тригонометрической форме и представить результат в тригонометрической и алгебраической формах | | |
|  |  |  |
| 6. Найти значения корней | | |
|  |  |  |

**Практическая работа № 6**

***Раскрытие различных неопределённостей***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять пределы с различными видами неопределённостей.

**Знания** (актуализация):

1. Определения предела функции.

**Умения:**

1. Вычисление пределов функций: раскрытие неопределённостей вида .

**Содержание работы:**

***Типы неопределённостей и их виды***

*1 тип Неопределённость вида в пределе*

**Примеры***:*

*1)*(т.к. старшие степени числителя и знаменателя равны, то делим коэффициенты при старших степенях *х*).

*2)*(т.к. старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя)

*2 тип Неопределённость вида в пределе*

Для раскрытия неопределённости необходимо либо разложить числитель и знаменатель на множители, либо умножить выражение содержащее корни на сопряжённое.

**Примеры:**

1)

2)==

*3 тип I-ый замечательный предел и основные эквивалентности:*

При ***х→0*** имеют место следующие неопределённости:

**Примеры:**

*4 тип II -ой замечательный предел*

**Примеры:**

**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Вариант 1* | *Вариант 2* | *Вариант 3* |
| **«3»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| д) | д) | д) |
| **«4»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| д) |  |  |
| **«5»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| д) | д) |  |

**Практическая работа № 7**

***Исследование функции на непрерывность, классификация точек разрыва***

**Цель работы:**

Научиться определять точки разрыва функции и их вид, исследовать функцию на непрерывность.

**Знания** (актуализация):

1. Определение непрерывной функции.

2. Определение точек разрыва и их классификация.

**Умения:**

1. Нахождение точек разрыва и установление их типа.

2. Построение схематичного графика функции.

**Содержание работы:**

*Определение*: функция непрерывна в точке, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: .

Определение детализируется в следующих условиях:

1) Функция должна быть определена в точке , то есть должно существовать значение .

2) Должен существовать общий предел функции: . Это подразумевает существование и равенство односторонних пределов:

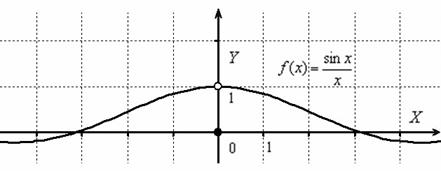
3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке:.

**Замечание:** Если нарушено **хотя бы одно** из 3-х условий, то функция теряет свойство непрерывности в точке.

### **Классификация точек разрыва**

### ***Точки разрыва первого рода***

Если в точке нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы конечны,** то она называется **точкой разрыва первого рода.**

***Пример*** *1:*Изобразим на чертеже график функции:

Данная функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки *x=0*. И в самом деле, знаменатель же не может быть равен нулю. Однако хоть точка и выколота, справедливость первого замечательного пределане нарушена – мы можем приблизиться к «нулю» и слева и справа бесконечно близко, таким образом, односторонние пределы существуют и совпадают:=1 (Условие №2 непрерывности выполнено).

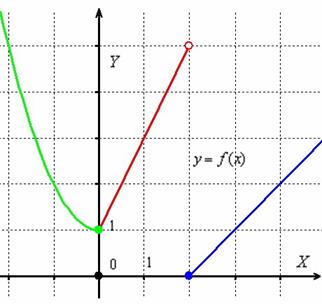
Но функция не определена в точке *х=0*, следовательно, нарушено Условие №1 непрерывности, и функция терпит разрыв в данной точке.

Разрыв такого вида (с существующим общим пределом) называют **устранимым разрывом**. Почему устранимым? Потому что функцию можно доопределить в точке разрыва:http://www.mathprofi.ru/i/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva_clip_image081.gif

***Пример 2:***

Рассмотрим функцию, заданную кусочно и выполним её чертёж.

Исследуем точку *х=2*на непрерывность:

1)*f(2)=2-2=0*– функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы.

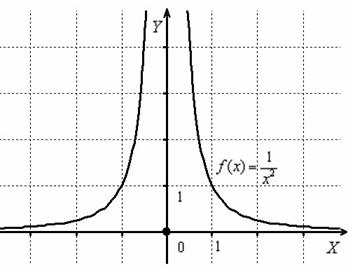
В результате получены конечные числа, причем они не равны. Поскольку односторонние пределы конечны и различны, то наша функция терпит разрыв первого рода неустранимый.

### ***Точки разрыва второго рода:***

*Пример 3:* Рассмотрим функцию .

Исследуем на непрерывность точку*x=0*:

1) Функция не определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы: Односторонние пределы бесконечные, следовательно *x=0* является точкой разрыва второго рода. Построим схематичный гафик данной функции, для этого вычислим ещё пределы этой функции на бесконечности .

**Задания для самостоятельной работы:**

Исследовать непрерывность функций в соответствии с заданиями.

а) Проверить, является ли функция  непрерывной в точках *х*1 и *х*2. В случае разрыва функции указать тип разрыва и сделать схематический чертеж в окрестности точки разрыва.

б) Построить график функции , используя график, записать промежутки непрерывности функции, перечислить точки разрыва и указать тип каждого из них.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № варианта | а) | б) |
| 1 | , *х*1 = 4, *х*2 = 5 |  |
| 2 | , *х*1 = 1,5, *х*2 = 2 |  |
| 3 | , *х*1 = 5, *х*2 = 7 |  |
| 4 | , *х*1 = 1, *х*2 = 4 |  |
| 5 | , *х*1 = 0, *х*2 = 0,5 |  |
| 6 | , *х*1 = –1, *х*2 = 2 |  |
| 7 | , *х*1 = 3, *х*2 = 5 |  |
| 8 | , *х*1 = 1, *х*2 = 3 |  |
| 9 | , *х*1 = 0, *х*2 = 1 |  |
| 10 | , *х*1 = –0,5, *х*2 = 1 |  |

**Практическая работа № 8**

***Вычисление производных сложных функций***

**Цель работы:**

Научиться вычислять производную сложной функции.

**Знания** (актуализация):

1. Определение производной и её свойства.

2. Понятие сложной функции.

3. Формула вычисления производной сложной функции.

**Умения:**

1.Вычисление производной заданной сложной функции.

**Содержание работы:**

***Таблица производных основных элементарных функций:***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

***Основные правила нахождения производной:***

; ; ; ; ; .

***Производная сложной функции***

Если  и , то- сложная функции, тогда её производная вычисляется по формуле, то есть . Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: *производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.*

***Примеры:***

1.Найти производную сложной функции: *.*

Положим , где получим:

2. .Найти производную сложной функции: *.*

Положим , получим:

**Задания для самостоятельной работы:**

Вычислите производные сложных функций:

Вариант 1

1) 2) 3) 4) 5)

Вариант 2

1) 2) 3)

4) 5)

Вариант 3

1) 2) 3)

4) 5)

Вариант 4

1) 2) 3) 4)

5)

Вариант 5

1) 2) 3) 4)

5)

**Практическая работа № 9**

***Применение производной к исследованию функции***

**Цель работы:**

Используя схему исследования функции, научиться исследовать функции и строить их графики.

**Знания** (актуализация):

1. Понятие экстремумов функции и её точек перегиба.

2. Понятие асимптот и их классификация.

**Умения:**

1. Построение графиков функций.

**Содержание работы:**

*Общая схема исследования функции и построение её графика.*

1. Найдите область определения функции.

2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.

3. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат (нули функции).

4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.

5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.

6. Определите наличие асимптот.

7. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

**Пример:**

Построить график функции:

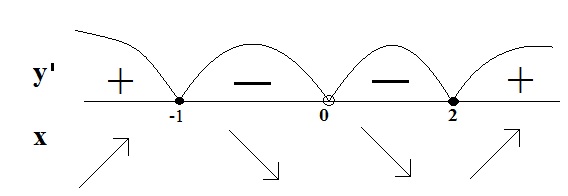
1.

2. Т.к. область определения не симметрична относительно начала координат, то функция не является ни чётной, ни нечётной (т.е. общего вида).

3. При *х=0*, *y(0)=0* – это единственная точка пересечения графика с осями координат.

4.

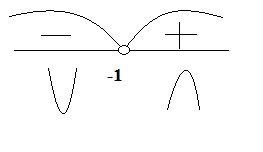
Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:



*x=-2 – т. max ymax =y(2) = -4*

*x=0 – т. min ymin =y(0) = 0*

5. Вычислим вторую производную и приравняем её к нулю:



Точек перегиба у данной функции нет.

6. Определим наличие асимптот:

а) т.е. горизонтальных асимптот нет.

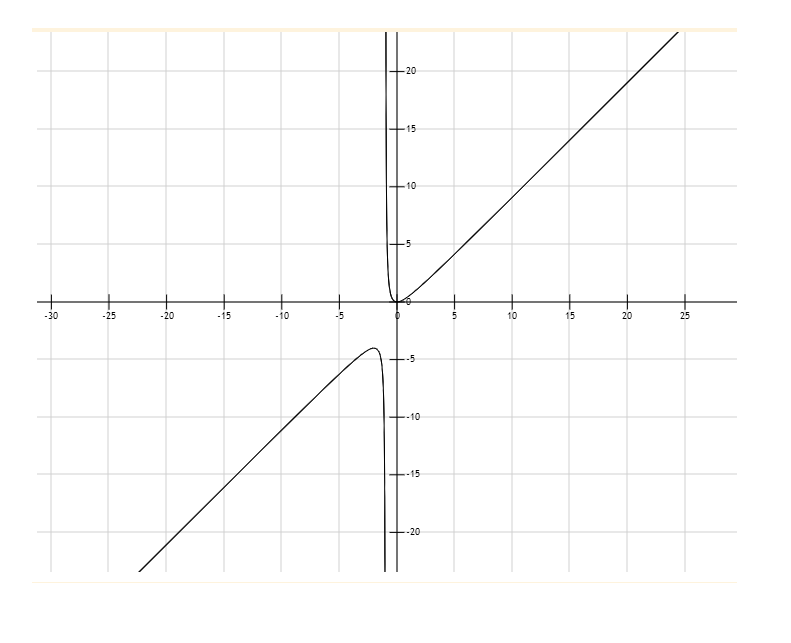
б) Рассмотрим односторонние пределы в точке *х=-1:*

Т.к. в точке *х=-1*функция терпит бесконечный разрыв, то график функции имеет вертикальную асимптоту *х=-1*

в) Для отыскания вертикальной асимптоты в виде *y=kx+b* вычислим следующие пределы:

Таким образом, прямая *y=x-1* служит наклонной асимптотой графика.

7. Используя полученные данные, строим график функции:



**Задания для самостоятельной работы:**

**ЗАДАЧА 1**

Провести полное исследование функции и построить ее график.

**1**.

**2**.

**3**.

**4**.

**5**.

**6**.

**7**.

**8.**

**9**.

**10**.

**ЗАДАЧА 2**

Провести полное исследование функции и построить ее график.

**1.****2.****3.**

**4.****5.****6.**

**7.****8.****9.**

**Практическая работа № 10**

***Вычисление неопределённых интегралов с помощью замены переменной***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить неопределенный интеграл с помощью замены переменных.

**Знания** (актуализация):

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

**Умения:**

1. Вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования.

2. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменной

**Содержание работы:**

***Таблица интегралов***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1.  2.  3.  4.  5.  6. | 7.  8.  9.  10.  11.  12. | 13.  14.  15.  16. |

**Непосредственное интегрирование** – это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов. Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

* 1. деление числителя на знаменатель почленно;
  2. применение формул сокращенного умножения;
  3. применение тригонометрических тождеств.

***Пример 1****.* Найти интеграл 

Решение*.*



***Пример 2*.** Найти интеграл 

Решение. Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель.



***Пример 3****.* Найти интеграл 

Решение**.** Возводим в куб и интегрируем каждое слагаемое.





***Пример 4****.* Найти интеграл 

Решение**.** Разлагаем подынтегральную дробь на две слагаемых дроби, деля числитель почленно на знаменатель.



***Пример 5****.*Найти интеграл 

Решение**.** Выделим в неправильной дроби целую часть и правильную дробь.





**Метод замены переменной (метод подстановки)**

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегри­рования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого ме­тода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный инте­грал сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегри­рованием.

***Пример 6*.**Вычислить

Решение**.** Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

***Пример 7.***Вычислить

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

***Пример 8.***Вычислить

Решение**.** Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Вариант 1* | *Вариант 2* | *Вариант 3* |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Практическая работа № 11**

***Вычисление неопределённых интегралов с помощью метода интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться находить неопределенный интеграл с помощью формулы интегрирования по частям, а также интегрировать рациональные функции.

**Знания**:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

**Умения:**

1. Вычисление неопределённых интегралов методом интегрирования по частям.

2. Вычисление неопределённых интегралов от рациональных функций.

**Содержание работы:**

*Метод интегрирования по частям* сводится к вычислению интеграла по формуле



Для вычисления интеграла по этой формуле необходимо подынтегральное выражение исходного интеграла представить как *udv.* Т.е. часть выражения принять за *u*, а часть - за *dv.*

***Пример 1*.**Вычислить интеграл с помощью формулы интегрирования по частям: 

Решение:

Положим *u=lnxdv=x2dx* дифференцируя*u*и интегрируя *dv* получим:



Постоянная *С*в этом случае не ставится; она будет поставлена в окончательном результате, когда будет найден данный интеграл.

Обращаемся теперь к формуле интегрирования по частям:



***Пример 2***.





***Пример 3*.**

{второе слагаемое вычислим с помощью замены переменной)



в итоге получаем 

*Интегрирование рациональных дробей* осуществляется с помощью разложения на простейшие дроби:

***Пример 4.***



Решение:

Знаменатель дроби раскладывается на множители:

*x3- 7x2+14x-8=(x-1)(x-2)(x-4)*

Так как каждый из двучленов входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей:



Освобождаясь от знаменателя, получим

*x2+2x+6=A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2)*

Следовательно,

*x2+2x+6=A(x2-6x+8)+B(x2-5x+4 )+C(x2-3x+2)*

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

*x2+2x+6=(A+B+C)x2+(-6A-5B-3C)x+(8A+4B+2C)*

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *х*, получим систему:



Из которой найдем*A=3, B=-7, C=5.*

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид



Таким образом,



***Пример 5*.**.

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:



Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:



Возвращаясь к исходному интегралы, получим:





**Задания для практической работы:**

*Интегрирование по частям*

1. 

2. 

3. 

*Интегрирование рациональных дробей*

1. 

2. 

3. 

**Практическая работа № 12**

***Вычисление определённых интегралов***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять определенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить определенный интеграл с помощью замены переменных и методом интегрирования по частям.

**Знания** (актуализация):

1. Понятие определённого интеграла, его основных свойств.

**Умения:**

1. Вычисление определённых интегралов методом непосредственного интегрирования.

2. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменной и по частям.

### Теоретические сведения.

Определённый интеграл вычисляется с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

***Пример 1***

Вычислите определенный интеграл .

Решение:



***Пример 2***

Вычислите определенный интеграл .

Решение:

.

***Пример 3***

Вычислите определенный интеграл .

Решение:

.

***Пример 4***

Вычислите определенный интеграл .

Решение:

.

*Метод интегрирования по частям.*

Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, произведение функций, а в ряде случаев – и частное.

Данный метод позволяет свести исходный определенный интеграл к более простому виду либо к табличному интегралу. Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Если функции u= u(x) и v = v(x) имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула интегрирования по частям:

Самое сложное, что есть в этом методе – это правильно определить, какую часть подынтегрального выражения брать за u, а какую за dv

Рассмотрим стандартные случаи.

* Для интегралов вида , или , где Pn(x) - многочлен, *a*– число. Удобно принять **u=P(x)**, а за **dv** обозначить все остальные сомножители.
* Интегралы вида , , , , . Удобно принять **P(x)**= **dv**, а за **u**все остальные сомножители.
* Интегралы вида , , где a и b числа. За **u** можно принять функцию **u = еах**.

***Пример 5*.** Вычислить

Решение.

.

***Пример 6.***Вычислить

Решение.

.

*Интегрирование заменой переменной (подстановкой).*

Пусть для интеграла от непрерывной функции сделана подстановка x = ϕ(t).

Если: 1) функция x = ϕ(t) и ее производная х/ = ϕ/(t)непрерывны при t∈[α;β];

2) множеством значений функции x = ϕ(t) при t∈[α;β] является отрезок [a;b]

3) ϕ(α) = a иϕ(β) = b, то

Отметим, что: 1) При вычислении определённого интеграла методом замены переменной возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки x = ϕ(t) применяют подстановку t = g(x);

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

*Алгоритм вычисления определенного интеграла методом подстановки:*

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4. Находят новые пределы интегрирования.

5. Производят замену под интегралом.

6. Находят полученный интеграл.

***Пример 7*.**Вычислить

Решение. Замена: t = x2 -16; dt= 2x dx; dx= .

Найдём новые пределы интегрирования. При x= 4, α= t(4) = 42 -16 =0; x= 5, β= t(5) = 52 -16 =9.

Получаем:

.

***Пример 8*.** Вычислить

Решение. Замена: t =, .

t -1 =, 2x + 1 = (t – 1)2, , dx = (t -1)dt.

Найдём новые пределы интегрирования. При x= 0, α= t(0) = 2; x= 4, β=t(4)=4.

Получаем:

.

**Задания для практической работы.**

Вариант 1.

1. б). в). 

2. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

а) ; б)

3. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) ; б)

Вариант 2.

1.а). б).  в). .

2. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

а) ; б)

3. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) ; б)

**Практическая работа № 13**

***Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур***

**Цель работы:**

1. Научиться вычислять определённые интегралы.

2. Познакомиться с понятием криволинейной трапеции

3. На конкретных примерах научиться находить площадь криволинейной трапеции

**Знания** (актуализация):

1. Понятие определённого интеграла.

2. Свойства определённого интеграла.

3. Основные методы вычисления определённых интегралов.

4. Понятие криволинейной трапеции

5. Методы вычисления площади криволинейной трапеции

**Умения:**

1. Вычисление определённых интегралов.

2. Вычисление площади криволинейной трапеции

**Содержание работы:**

Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:

|  |  |
| --- | --- |
| y=y(x)  a  b  X  Y  **Рис.1** | * сверху - графиком непрерывной функции *y=y(x)* * снизу – осью OX (*y=0*) * слева – прямой *x=a* * справа – прямой*x=b* |

Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

 (1)

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

**Пример 1**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: , x=-1, x=2 и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

|  |  |
| --- | --- |
| **2**  **-1**  X  Y  Рис. 2 | Ответ: 6 кв.ед. |

Пусть y=f(x) – непрерывная функция при x[a, b], график которой расположен ниже оси OX (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 3  **y=f(x)**  X  Y  **a**  **b** | (2) |

**Пример 2**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 4  Y  X  2  3 | Ответ: 1/6 кв.ед. |

**Пример 3**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций и .

Решение: данная фигура (рис. 5)представляет собой разность криволинейных трапеций

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: x1=-2 и x2=1.

. Можно записать под один интеграл:

|  |  |
| --- | --- |
| Y  Рис. 5  X  -2  1  ***y=-x+3*** | Ответ: 4,5 кв.ед. |

**Пример 4.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций и , и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций S=S1+S2, где  и . Получим формулу:

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 6  X  0  1  ***y=-x+3***  3 | Ответ: кв.ед. |

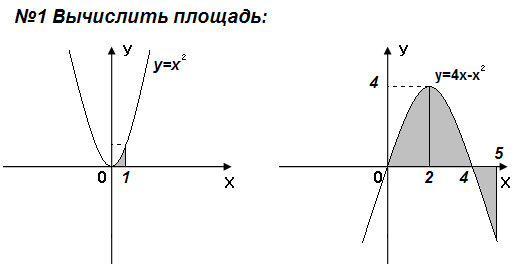
**Задания для самостоятельной работы:**

*Задание 1 Вычислить определённые интегралы:*

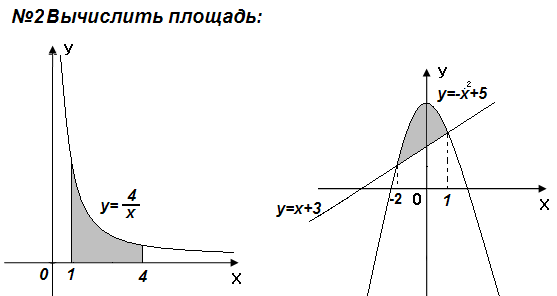
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

*Задание 2 Вычислить площади фигур*

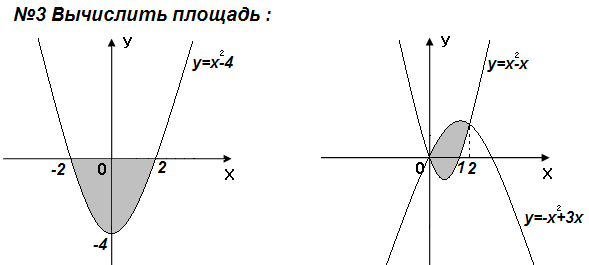
Вариант 1

****

Вариант 2

****

Вариант 3

****

**Практическая работа № 14**

***Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка

**Знания**:

1. Понятие дифференциального уравнения.

2. Виды дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения.

**Умения:**

1. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, линейных и однородных.

**Содержание работы:**

Дифференциальное уравнение называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

 или 

***Пример1***.Найти решение дифференциального уравнения

Подставим в уравнение, тогда⇒⇒

⇒⇒⇒⇒–общее решение

Решим задачу Коши: при : ⇒ 2= *С,* отсюда *частное решение:*

***Пример 2****.*Решить уравнение 

Дифференциальное уравнение вида называется **однородным**, если его правая часть

*f(x, y)*есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т.е.

***Пример 3***.Решить уравнение .

Введем вспомогательную функцию.

Отметим, что введенная нами функция *u*всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее .

Подставляем в исходное уравнение: 

Разделяем переменные: 

Интегрируя, получаем: 

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции у, получаем общее решение:

Любое уравнение вида  является однородным, если функции *P(x, y)* и

*Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:



при этом, если правая часть *Q(x)*равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)*неравна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию *y*заменить произведением двух вспомогательных функций *u=u(x)* и*v=v(x)*, т.е. положить *y=uv,* тогда .

***Пример 4***Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Будем искать решение в виде .

Тогда уравнение примет вид: . Сгруппируем второе и третье слагаемые и вынесем *u*за скобки:. Подберём функцию *v* так, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль, т.е.

Подставляя это частное решение в исходное уравнение получим:

Итак, общее решение исходного уравнения**:**

**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| 1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция: | | |
|  |  |  |
| 2. Решите уравнение с разделяющими переменными | | |
|  |  |  |
| 3. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию | | |
| у(0)=2 | у(0)=1 |  |
| 4. Решите однородное дифференциальное уравнение | | |
|  |  |  |
| 5. Решите линейное дифференциальное уравнение | | |
|  |  |  |

**Практическая работа № 15**

***Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка

**Знания** (актуализация):

1. Понятие линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

**Умения:**

1. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

**Содержание работы:**

Однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение: . Для отыскания общего решения этого уравнения составляют характеристическое уравнение: , которое получается из исходного уравнения заменой производных искомой функции соответствующими степенями *k,* причем сама функция заменяется единицей.

Тогда общее решение уравнение строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *D>0*  корни действительные и различные | *D=0*  корни действительные и равные | *D<0*  корни комплексные |
| Общее решение дифференциального уравнения записывается в виде: | | |
|  |  |  |

***Пример.*** Решить уравнение 

Характеристическое уравнение: 

Общее решение: 

***Пример****.* Решить уравнение 

Характеристическое уравнение: 



Общее решение: 

***Пример****.* Решить уравнение

Характеристическое уравнение: 

Общее решение:

**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| Решите уравнения ДУ 2го порядка | | |
| **а)**  **б)**  **в)**  **г)**  **д)** | **а)**  **б)**  **в)**  **г)**  **д)** | **а)**  **б)**  **в)**  **г)**  **д)** |

**Список литературы**

Основные источники:

1. Григорьев, В.П. Элементы высшей математики: учебник для студентов учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 400 с.

Дополнительные источники:

1. Григорьев, В.П. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2018. – 160 с.

Интернет - ресурсы

* Электронно-библиотечная система ZNANIUM.COM Режим доступа: http://www.znanium.com/
* Электронно-библиотечная система "ЮРАЙТ" Режим доступа http://www. biblio-online. ru
* Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru/
* Информационные, тренировочные и контрольные материалы. Режим доступа: http:// www. fcior. edu. ru.
* Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. Режим доступа: http:// www. school-collection. edu. ru.