Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

по учебной дисциплине

**«Теория вероятностей и математическая статистика»**

для специальностей УГС 09.00.00

«Информатика и вычислительная техника»

Челябинск, 2018

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Учебное пособие составлено в соответствии с содержанием программ учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  комиссией ЕМД  протокол № \_\_\_  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2018 г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_О.И. Макаренко | УТВЕРЖДАЮ  Зам. директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2018 г. |

**Автор:** Макаренко О.И., преподаватель ГПБОУ «Южно-Уральский государственный технический колледж»

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| **РАЗДЕЛ I** | |
| Введение | Стр. 4 |
| События. Виды событий | Стр. 5 |
| Вероятность события | Стр. 10 |
| **Классическое определение вероятности** | Стр. 11 |
| **Классическое определение вероятности** | Стр. 12 |
| **Основные формулы комбинаторики** | Стр. 15 |
| **Примеры решений задач на классическое определение вероятности** | Стр. 25 |
| Геометрическое определение вероятности | Стр. 33 |
| **Относительная частота события и статистическое определение вероятности** | Стр. 37 |
| **Теоремы сложения и умножения вероятностей** | Стр. 40 |
| **Формула полной вероятности и формула Байеса** | Стр. 55 |
| **Независимые испытания и формула Бернулли** | Стр. 64 |
| Асимптотические формулы в схеме Бернулли | Стр. 72 |
| **Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности** | Стр. 80 |
| **РАЗДЕЛ II** | |
| **Случайные величины. Дискретная случайная величина** | Стр. 82 |
| Закон (ряд) распределения дискретной случайной величины | Стр. 83 |
| Числовые характеристики дискретной случайной величины | Стр. 84 |
| Многоугольник и функция распределения дискретной случайной величины | Стр. 89 |
| **Основные виды дискретных распределений** | Стр. 95 |
| **Непрерывная случайная величина (НСВ) и её функция распределения. Функция плотности распределения** | Стр. 108 |
| **Числовые характеристики непрерывной случайной величины** | Стр. 115 |
| **Основные виды непрерывных распределений вероятностей** | Стр. 118 |
| **Раздел III** | |
| Элементы математической статистики. Введение | Стр. 132 |
| Генеральная совокупность и выборка | Стр. 133 |
| Вариационный и статистические ряды | Стр. 135 |
| Интервальный статистический ряд | Стр. 137 |
| Статистические характеристики выборки | Стр. 140 |
| Точечная оценка параметров генеральной совокупности | Стр. 143 |
| Интервальные оценки параметров генеральной совокупности | Стр. 144 |
| Задачи статистической проверки гипотез | Стр. 148 |
| **ПРИЛОЖЕНИЯ** | Стр. 154 |

# ****РАЗДЕЛ I****

**Введение**

Что изучает наука под названием «Теория вероятностей»? Многим в голову наверняка пришли мысли вроде «вероятность дождя велика», «вероятность выигрыша влотереюмала», «орёл и решка выпадают с вероятностью 50 на 50» и т.п. Но тогда сразу возникает вопрос, при чём здесь наука? Пожалуйста, прямо сейчас возьмите в руки монету и скажите, какой гранью она выпадет после броска? Совсем не похоже на теорию – скорее какое-то гадание….

И действительно, обывательское понимание вероятности больше смахивает на некое предсказание, часто с изрядной долей мистицизма и суеверий.Теория жевероятностей изучает*вероятностные закономерности*массовыходнородных*случайных событий*. То есть, у неё нет цели что-либо угадать, например, результат броска той же монеты в единичном эксперименте. Однако если одну и ту же монету в одинаковых условияхподбрасывать сотни и тысячи раз, то будет прослеживаться чёткая закономерность, описываемая вполне жёсткими законами.

Другой пример. Вокруг каждого из нас летают молекулы воздуха. Некоторые из них обладают высокой, некоторые средней, а некоторые – низкой скоростью. Не имеет смысла угадывать скорость отдельно взятых молекул; но их массовый учёт находит самое широкое применение в теоретических и прикладных физических исследованиях. Обратите внимание, что самолёты «умеют» летать, газовые и паровые котлы обычно не взрываются, а чайники при кипении не скачут по кухне. За многими и многими, казалось бы, обыденными фактами и событиями кроются серьёзные вероятностно-статистические расчёты.

Или пример попроще. Если вы приобретёте лотерейный билет, то вряд ли что-то выиграете и совсем невероятно, что сорвёте крупный куш. Но организатор [лотереи](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html#67664919)даже при случайном розыгрыше тиража *(извлечение пронумерованных шариков и т.п., либо, если участники сами угадывают номера)*гарантированно и с высокой точностью знает, сколько билетов выиграют/проиграют, и, понятно, остаётся в прибыли. Лотереи часто называют обманом, однако парадокс состоит в том, что эта гарантия строго обоснована теорией; ра́вно, как и житейская фраза «всё равно ничего не выиграю».

Подумайте ещё над одной насущной задачей: многие из нас за жизнь сдают десятки экзаменов, и практически всегда имеет место следующая ситуация: часть вопросов студент знает, а часть вопросов – не знает. Наступает день «X»: утро, коридор с 10-15 однокурсниками и дверь, за которой на столе лежит полный комплект билетов. В каком случае вероятнее сдать экзамен – если идти «в первых рядах», «в серединке» или если зайти в аудиторию в числе последних? …Изучаем теорию вероятностей!

**События. Виды событий.**

Одно из базовых понятий Теории вероятностей – это**событие**. События бывают**достоверными**,**невозможными**и**случайными**.

***Достоверным***называют событие, которое в результате**испытания**(осуществления определенных действий, определённого комплекса условий)**обязательно произойдёт**. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

***Невозможным***называют событие, которое**заведомо не произойдёт**в результате испытания. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

И, наконец, событие называется***случайным***, если в результате испытания оно может,**как произойти, так и не произойти**, при этом должен иметь местопринципиальный критерий случайности: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл». В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила/направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

Подчёркнутый критерий случайности очень важен – так, например, карточный шулер может очень ловко имитировать случайность и давать выигрывать жертве, но ни о каких случайных факторах, влияющих на итоговый результат, речи не идёт.

***Любой***результат испытания называется**исходом**, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые)**обозначают**большими латинскими буквами*A, D, C,D*….,либо теми же буквами с подстрочными индексами, например:*A1,A2, A3, A4*….

Запишем следующие случайные события:

*A0*– в результате броска монеты выпадет «орёл»;

*B5*– в результате броска игральной кости (кубика) выпадет 5 очков;

*CT*– из колоды будет извлечена карта трефовой масти(по умолчанию колода считается полной).

Да, события прямо так и записывают в практических задачах, при этом в уместных случаях удобно использовать «говорящие» подстрочные индексы (хотя можно обойтись и без них).

Следует в третий раз подчеркнуть, что случайные события обязательно удовлетворяют вышеприведённому критерию случайности. В этом смысле снова показателен 3-й пример: если из колоды изначально удалить все карты трефовой масти, то событие*CT*становитсяневозможным. Наоборот, если испытателю известно, что, например, дама треф лежит снизу, то он при желании может сделать событие*CT*достоверным. Таким образом, в данном примере предполагается, что**карты хорошо перемешаны и их рубашки неразличимы**, т.е. колода не является краплёной. Причём, здесь под «крапом» понимаются даже не «умелые руки», ликвидирующие случайность вашего выигрыша, а видимые дефекты карт. Например, рубашка той же дамы треф может быть грязной, порванной, заклеенной скотчем и т.д.

Таким образом, при розыгрыше важного жребия всегда есть смысл невзначай посмотреть, а не одинаковы ли грани монеты.

Другая важная характеристика событий – это их**равновозможность**.Два или бо́льшее количество событий называют***равновозможными***, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Например:

* выпадение орла или решки при броске монеты;
* выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;
* извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Могут ли быть те же события***не равновозможными***? Могут! Например, если у монеты или кубика смещён[центр тяжести](http://www.mathprofi.ru/primery_reshenij_proizvolnyh_troinyh_integralov.html), то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани. Как говорится, ещё одна лазейка для мошенников. СобытияСТ, СП, СЧ, СБ– извлечение трефы, пики, червы или бубны тоже равновозможны. Однако равновозможность легко нарушит фокусник, который, тасуя колоду (даже «идеальную»), ловко подсмотрит и спрячет в рукаве, например, туза треф. Здесь становитсяменее возможным, что оппоненту будет сдана трефа, и, главное,менее возможно, что будет сдан туз.

Тем не менее, в рассмотренных трёх случаях при потере равновозможности всё же сохраняется случайность событий.

### *****Совместные и несовместные события. Противоположные события.Полная группа событий*****

События называют**несовместными**, еслив одном и том же испытаниипоявление одного из событий**исключает**появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара**противоположных**событий. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой вверху. Например:

– в результате броска монеты выпадет орёл;– в результате броска монеты выпадет решка.

Совершено ясно, чтов отдельно взятом испытаниипоявление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными.

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

В5– в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;– в результате броска игрального кубика выпадет число очков, отличное от пяти.

Либо пять, либо не пять – третьего не дано, т.е. события**несовместны**и**противоположны**.

Аналогично – или трефа или карта другой масти:

СТ– из колоды будет извлечена карта трефовой масти;– из колоды будет извлечена пика, черва или бубна.

Множество несовместных событий образуют**полную группу событий**, если в результатеотдельно взятого испытания**обязательно появится одно из этих событий**. Очевидно, что любая пара противоположных событий (в частности, примеры выше) образует полную группу. Однако в различных задачах с одним и тем же объектом могут фигурировать разные события, например, для игрального кубика характерно рассмотрение следующего набора:

*В1*– в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;

*В2*– … 2 очка;

*В3*– … 3 очка;

*В4*– … 4 очка;

*В5*– … 5 очков;

*В6*– … 6 очков.

События*В1, В2, В3, В4, В5, В6* -**несовместны**(поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других)**и образуют полную группу**(так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий).

Ещё одно важное понятие, которое нам скоро потребуется – это**элементарность**исхода (события). Если совсем просто, то элементарное событие «нельзя разложить на другие события». Например, события*В1, В2, В3, В4, В5, В6* элементарны, но событиене является таковым, так как подразумевает выпадение 1, 2, 3, 4 или 6 очков (включает в себя 5 элементарных исходов).

В примере с картами событияСТ, СП, СЧ, СБ(извлечение трефы, пики, червы или бубны соответственно) несовместны и образуют полную группу, но они неэлементарны. Если считать, что в колоде 36 карт, то каждое из перечисленных событий включает в себя 9 элементарных исходов. Аналогично – событияD6,D7, D8, D9, D10, DВ, DД, DК, DТ (извлечение шестёрки, семёрки, …, короля, туза) несовместны, образуют полную группу и неэлементарны (каждое включает в себя 4 исхода).

Таким образом, элементарным исходом здесь считается лишь извлечение какой-то конкретной карты, и, разумеется, 36 несовместных элементарных исходов тоже образуют полную группу событий.

**Совместные**события менее значимы с точки зрения решения практических задач, но обходить их стороной не будем. События называются**совместными**, еслив отдельно взятом испытаниипоявление одного из них**не исключает**появление другого.

Например:

СТ– из колоды карт будет извлечена трефа;

DТ– из колоды карт будет извлечена семёрка.

Если быть совсем лаконичным, одно не исключает другого.

Понятие совместности охватывает и бо́льшее количество событий:

D– завтра в 12.00 будет дождь;G– завтра в 12.00 будет гроза;S– завтра в 12.00 будет солнце.

***Алгебра событий***

Пожалуйста, запомните**ВАЖНЕЙШЕЕ ПРАВИЛО**:

**Операция сложения событий** означает [***логическую связку***](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html)**ИЛИ**,а **операция умножения событий** – [***логическую связку***](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html)**И**.

1. **Суммой** двух событийAиBназывается событиеA+B, которое состоит в том, что наступит**или**событиеA**или**событиеB**или**оба события одновременно. В том случае, если события**несовместны**, последний вариант отпадает, то есть может наступить**или**событиеA**или**событиеB.

Правило распространяется и на бо́льшее количество слагаемых, например, событие А1+ А2+ А3+ А4+ А5состоит в том, что произойдёт**хотя бы одно**из событий А1, А2, А3, А4, А5, а**если события несовместны**–**то одно и только одно**событие из этой суммы:**или**событиеА1,**или**событие А2,**или**событие А3,**или**событие А4,**или**событие А5.

**Примеры:**

События(при броске игральной кости не выпадет 5 очков) состоит в том, что выпадет**или**1,**или**2,**или**3,**или**4,**или**6 очков.

Событие(выпадет**не более**двух очков) состоит в том, что появится 1**или**2**очка**.

Событие(будет чётное число очков) состоит в том, что выпадет**или**2**или**4**или**6 очков.

Событиезаключается в том, что из колоды будет извлечена карта красной масти (черва**или**бубна), а событие– в том, что будет извлечена «картинка» (валет**или**дама**или**король**или**туз).

Чуть занятнее дело с совместными событиями:

Событиесостоит в том, что из колоды будет извлечена трефа**или**семёрка**или**семёрка треф. Согласно данному выше определению,**хотя бы что-то**– или любая трефа или любая семёрка или их «пересечение» – семёрка треф. Легко подсчитать, что данному событию соответствует 12 элементарных исходов (9 трефовых карт + 3 оставшиеся семёрки).

Событиесостоит в том, что завтра в 12.00 наступит**ХОТЯ БЫ ОДНО из суммируемых совместных событий**, а именно:

– или будет только дождь / только гроза / только солнце;

– или наступит только какая-нибудь пара событий (дождь + гроза / дождь + солнце / гроза + солнце);

– или все три события появятся одновременно.

То есть, событиевключает в себя 7 возможных исходов.

1. **Произведением**двух событий*A*и*B*называют событие*AB*, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение*AB*означает, что при некоторых обстоятельствах наступит**и**событие*A***и**событие*B*. Аналогичное утверждение справедливо и для бо́льшего количества событий, так, например, произведение*А1 А2 А3 А4… А10*подразумевает, что при определённых условиях произойдёт**и**событие*А1*,**и**событие*А2*,**и**событие*А3*, …,**и**событие*А10*.

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются две монетыи следующие события:

А1– на 1-й монете выпадет орёл;

– на 1-й монете выпадет решка;

А2– на 2-й монете выпадет орёл;

– на 2-й монете выпадет решка.

Тогда:

– событиеА1 А2 состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й**и**на 2-й) выпадет орёл;

– событие– состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й**и**на 2-й) выпадет решка;

– событиеА1- состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл**и**на 2-й монете решка;

– событие- состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка**и**на 2-й монете орёл.

Нетрудно заметить, что событияА1 А2,, А1 ,**несовместны**(т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки)и образуют**полную группу**(поскольку учтены***все***возможные исходы броска двух монет). Просуммируем данные события: А1 А2++А1+. Как интерпретировать эту запись? Очень просто – умножение означает логическую связку**И**, а сложение –**ИЛИ**. Таким образом, эту суммулегко прочитать: «выпадут два орла**или**две решки**или**на 1-й монете выпадет орёл**и**на 2-й решка**или**на 1-й монете выпадет решка**и**на 2-й монете орёл »

Это был пример, когда**в одном испытании**задействовано несколько объектов, в данном случае – две монеты. Другая распространенная в практических задачах схема – это**повторные испытания**, когда, например, один и тот же игральный кубик бросается 3 раза подряд. В качестве демонстрации рассмотрим следующие события:

– в 1-м броске выпадет 4 очка;

– во 2-м броске выпадет 5 очков;

– в 3-м броске выпадет 6 очков.

Тогда событиесостоит в том, что в 1-м броске выпадет 4 очка**и**во 2-м броске выпадет 5 очков**и**в 3-м броске выпадет 6 очков. Очевидно, что в случае с кубиком будет значительно больше[комбинаций](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html)(исходов), чем, если бы мы подбрасывали монету.

## ****Вероятность события****

**Вероятность события**– это центральное понятие теории вероятностей. Существует несколько подходов к её определению:

**Классическое определение вероятности**;

[***Геометрическое определение вероятности***](http://www.mathprofi.ru/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti.html);

[***Статистическое определение вероятности***](http://www.mathprofi.ru/statisticheskoe_opredelenie_verojatnosti.html).

**Обозначения**. Вероятность некоторого события*A*обозначается большой латинской буквойP, а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента. Например:

– вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

– вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

– вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Также для обозначения вероятности широко используется маленькая буква*p*. В частности, можно отказаться от громоздких обозначений событийи их вероятностейв пользу следующей стилистики:

– вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

– вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

– вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

**Классическое определение вероятности**

Вероятностью наступления события*А*в некотором испытании называют отношение

,

где:*n*– общее число всехравновозможных,элементарныхисходов этого испытания, которые образуютполную группу событий;

*m*– количествоэлементарныхисходов,**благоприятствующих**событию*A*.

При броске монеты может выпасть либо орёл, либо решка – данные события образуютполную группу, таким образом, общее число исходов*n=2*; при этом, каждый из нихэлементарениравновозможен. Событию Аблагоприятствуетm=1 исход (выпадение орла). По классическому определению вероятностей:.

Аналогично – в результате броска кубика может появитьсяn=6 элементарных равновозможных исходов, образующих полную группу, а событиюблагоприятствует единственныйm=1 исход (выпадение пятёрки). Поэтому:.

Особое внимание обратим на третий пример. Здесь будет некорректным сказать«раз в колоде 4 масти, то вероятность извлечения трефы». В определении речь идёт обэлементарныхисходах, поэтому правильный порядок рассуждений таков: всего в колоде 36 карт(несовместные элементарные исходы, образующие полную группу), из них 9 карт трефовой масти(кол-во элементарных исходов, благоприятствующих событию); по классическому определению вероятности:. Именно так!

Вероятности можно выразить и в процентах, например: вероятность выпадение орла равна, выпадения пятёрки,извлечения трефы, но в теории вероятностей**этого делать не принято**(хотя не возбраняется прикидывать проценты в уме).

**Принято использовать доли единицы**, и, очевидно, что вероятность может изменяться в пределах. При этом если, то событиеAявляетсяневозможным, если–достоверным, а если, то речь идёт ослучайномсобытии.

***! Если в ходе решения любой задачи у вас получилось какое-то другое значение вероятности – ищите ошибку!***

При классическом подходе к определению вероятности крайние значения (ноль и единица) получаются посредством точно таких же рассуждений. Пусть из некой урны, в которой находятся 10 красных шаров, наугад извлекается 1 шар. Рассмотрим следующие события:

K– из урны будет извлечён красный шар;Z– из урны будет извлечён зелёный шар.

Общее количество исходов:n=10. СобытиюKблагоприятствуют все возможные исходы (m=10), следовательно,, то есть данное событиедостоверно. Для 2-го же события благоприятствующие исходы отсутствуют (m=0), поэтому, то есть событиеZневозможно.

Особый интерес представляют события, вероятность наступления которых чрезвычайно мала. Хоть такие события и являются случайными, для них справедлив следующий постулат:

***в единичном испытании маловозможное событие не произойдёт.***

Именно поэтому Вы не сорвёте в лотерее Джек-пот, если вероятность этого события, скажем, равна 0,00000001. Да-да, именно Вы – с единственным билетом в каком-то конкретном тираже. Впрочем, бо́льшее количество билетов и бо́льшее количество розыгрышей Вам особо не помогут.

Но грустить не нужно, потому что есть противоположный принцип: если вероятность некоторого события очень близка к единице, то в отдельно взятом испытании онопрактически достовернопроизойдёт. Поэтому перед прыжком с парашютом не надо бояться, наоборот – улыбайтесь! Ведь должны сложиться совершенно немыслимые и фантастические обстоятельства, чтобы отказали оба парашюта.

Рассмотрим одну важную теорему:

**Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице**.

**То есть,** если события образуют полную группу, то со 100%-й вероятностью какое-то из них произойдёт. В самом простом случае полную группу образуют противоположные события, например:

– в результате броска монеты выпадет орёл;– в результате броска монеты выпадет решка.

По теореме:

Совершенно понятно, что данные события равновозможны и их вероятности одинаковы.

По причине равенства вероятностей равновозможные события часто называют**равновероятными**.

Пример с кубиком:событияпротивоположны, поэтому.

Рассматриваемая теорема удобна тем, что позволяет быстро найти вероятность противоположного события. Так, если известна вероятностьтого, что выпадет пятёрка, легко вычислить вероятность того, что она не выпадет: .

Это гораздо проще, чем суммировать вероятности пяти элементарных исходов. Для элементарных исходов, к слову, данная теорема тоже справедлива:.

События, как отмечалось выше, равновозможны – и теперь мы можем сказать, что равновероятны. Вероятность выпадения любой грани кубика равна:

Ещё один пример: поскольку нам известна вероятностьтого, что будет извлечена трефа, то легко найти вероятность того, что будет извлечена карта другой масти:.

Заметьте, что рассмотренные пары событий и не равновероятны, как оно чаще всего и бывает.

В упрощенной версии записи решения вероятность противоположного события стандартно обозначается строчной буквойq. Например, еслиp=0,7– вероятность того, что стрелок попадёт в цель, тоq=1-p =1-0,7 = 0,3– вероятность того, что он промахнётся.

**Основные формулы комбинаторики**

Комбинаторика является самостоятельным разделом высшей математики, но нам будет достаточно небольшой доли теоретических знаний, используя которые мы разберёмтиповые комбинаторные задачи.

В узком смысле комбинаторика – это подсчёт различных комбинаций, которые можно составить из некоторого множествадискретныхобъектов. Под объектами понимаются какие-либо обособленные предметы или живые существа – люди, звери, грибы, растения, насекомые и т.д. При этом комбинаторику совершенно не волнует, что множество состоит из тарелки манной каши, паяльника и болотной лягушки. Принципиально важно, что эти объекты поддаются перечислению – их три(дискретность)и существенно то, что среди них нет одинаковых.

С множеством разобрались, теперь о комбинациях. Самыми распространёнными видами комбинаций являются перестановки объектов, их выборка из множества (сочетание) и распределение (размещение).

Но, прежде чем начать изучение комбинаторики, дадим определение факториала.

Факториалом числа *n*называется произведение всех натуральныхчисел начиная с 1 и заканчивая числом *n* включительно.

Обозначение:

Например,

и т.д.

Обратите внимание на то, что по определению принимают,а также имеет место формула

## ****Перестановки, сочетания и размещения без повторений****

Что значит «**без повторений**»? Это значит, что в данном параграфе будут рассматриваться множества, которые состоят из**различных**объектов.

***Перестановки***

**Перестановками**называют комбинации, состоящиеиз одних и тех же*n***различных**объектов и отличающиеся только порядком их расположения. Количество всех возможных перестановок выражается формулой:

Отличительной особенностью перестановок является то, чтов каждой из нихучаствует**ВСЁ**множество, то есть,**все***n*объектов.

**Задача:**Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

**Решение**: используем формулу количества перестановок:

**Ответ**: 120 способами

Невероятно, но факт. Обратите внимание, что здесь не имеет значения круглый ли стол, квадратный, или вообще все люди селина скамейку вдоль одной стены – важно лишь количество объектов и их взаимное расположение.

***Сочетания***

**Сочетаниями**называют различные комбинации из*m*объектов, которые выбраны из множества *n*различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из *m*элементов, в которойне важен их порядок(расположение). Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле .

**Задача:** В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

**Решение**: прежде всего, снова обращаем внимание на то, что по логике условия, детали считаются***различными–*** даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы(в этом случае их можно, например, пронумеровать).

В задаче речь идёт о выборке из 4 деталей, в которой не имеет значения их «дальнейшая судьба» – грубо говоря, «просто выбрали 4 штуки и всё». Таким образом, у нас имеют место сочетания деталей. Считаем их количество:

Здесь, конечно же, не нужно вычислять огромные числа 11!=39916800, 15!=1307674368000.

В похожей ситуации нужно использовать следующий приём: в знаменателе выбираем наибольший[факториал](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf)(в данном случае 11!) и сокращаем на него дробь. Для этого числитель следует представить в виде. Распишем подробно:

способами можно взять 4 детали из ящика.

Ещё раз: что это значит? Это значит, что из набора 15 различных деталей можно составитьодну тысячу триста шестьдесят пять***уникальных***сочетания 4 деталей. То есть, каждая такая комбинация из четырёх деталей будет отличаться от других комбинаций хотя бы одной деталью.

**Ответ**: 1365 способами

Формуленеобходимо уделить самое пристальное внимание, поскольку она является «хитом» комбинаторики. При этом полезно понимать и без всяких вычислений записывать «крайние» значения:

.

Применительно к разобранной задаче:

– единственным способом можно не выбрать ни одной детали;

способами можно взять 1 деталь (любую из пятнадцати);

;способами можно взять 14 деталей (при этом какая-то одна из 15 останется в ящике);

– единственным способом можно взять все пятнадцать деталей.

***Размещения***

**Размещениями**называют различные комбинации из *m*объектов, которые выбраны из множества *n*различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке,так и их порядком. Количество размещений рассчитывается по формуле:

**Задача:** Боря, Дима и Володя сели играть в «очко». Сколькими способами им можно сдать по одной карте?(колода содержит 36 карт)

**Решение**: здесь важно не только то, какие три карты будут извлечены из колоды, но и то, КАК они будут распределены между игроками. По формуле размещений:способами можно раздать 3 карты игрокам.

**Ответ**: 42840

## *****Правило сложения и правило умножения комбинаций*****

Данные правила весьма напоминают[алгебру событий](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html):

Правило сложения комбинаций:

1. Знак «плюс» следует понимать и читать как союз[**ИЛИ**](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html).

**Задача 1:** Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

**Решение**: в данном случае подсчётне годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей**или**двух девушек, и уже сама словесная формулировка указывает на верный путь решения:

способами можно выбрать 2 юношей;

способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы – юношей**или**девушек) можно выбрать:способами.

**Ответ**: 123

Правило умножения комбинаций:

1. Знак «умножить» следует понимать и читать как союз**[И](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html)**.

Рассмотрим ту же студенческую группу, которая пошла на танцы. Сколькими способами можно составить пару из юноши и девушки?

способами можно выбрать 1 юношу;

способами можно выбрать 1 девушку.

Таким образом, одного юношу**и**одну девушку можно выбрать:

способами.

Когда из каждого множества выбирается по 1 объекту, то справедлив следующий принцип подсчёта комбинаций: «**каждый**объект из одного множества может составить пару**с каждым**объектом другого множества».

То есть, Олег может пригласить на танец любую из 13 девушек, Евгений – тоже любую из тринадцати, и аналогичный выбор есть у остальных молодых людей. Итого: 10·13=130 возможных пар.

Следует отметить, что в данном примере не имеет значения «история» образования пары; однако если принять во внимание инициативу, то количество комбинаций нужно удвоить, поскольку каждая из 13 девушек тоже может пригласить на танец любого юношу. Всё зависит от условия той или иной задачи!

Похожий принцип справедлив и для более сложных комбинаций, например: сколькими способами можно выбрать двух юношей**и**двух девушек для участия в сценке КВН?

Союз**И**недвусмысленно намекает, что комбинации необходимо перемножить:

возможных групп артистов.

Иными словами,**каждая**пара юношей (45 уникальных пар) может выступать с**любой**парой девушек (78 уникальных пар). А если рассмотреть распределение ролей между участниками, то комбинаций будет ещё больше.

Правило умножения комбинаций распространяется и на бо́льшее количество множителей.

**Задача 2:**Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

**Решение**: для наглядности обозначим данное число тремя звёздочками:**\*\*\***

Комбинации будем считать по разрядам –слева направо:

Вразряд сотенможно записать любую изцифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9). Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным.

А вот вразряд десятков(«посерединке») можно выбрать любую из 10 цифр:.

По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры.

***Итого, существует***:трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

При этом произведениерасшифровывается так: «9 способами можно выбрать цифру вразряд сотен**и**10 способами выбрать цифру вразряд десятков**и**2 способами вразряд единиц»

Или ещё проще: «**каждая**из 9 цифр вразряде сотенкомбинируется**с каждой**из 10 цифрразряда десятков**и с каждой**из двух цифр вразряде единиц».

**Ответ**: 180

**Задача 3**Сколько существует выигрышных комбинаций из 2 карт при игре в «очко»?

Для тех, кто не знает: выигрывает комбинация 10 + ТУЗ (11 очков) = 21 очко и, давайте будем считать выигрышной комбинацию из двух тузов.

(порядок карт в любой паре не имеет значения)

Кстати, не надо считать пример примитивным. Блэк-джек – это чуть ли не единственная игра, для которой существует математически обоснованный алгоритм, позволяющий выигрывать указино. Желающие могут легко найти массу информации об оптимальной стратегии и тактике. Правда, такие мастера довольно быстро попадают в чёрный список всех игорных заведений.

Итак, решение задачи:способами может быть сдана десятка и туз («каждая десятка с каждым тузом»);способами может быть сдана пара тузов.Итого:выигрышные комбинации.

**Задача 4**У Васи дома живут 4 кота.

а) сколькими способами можно рассадить котов по углам комнаты?

б) сколькими способами можно отпустить гулять котов?

в) сколькими способами Вася может взять на руки двух котов (одного на левую, другого – на правую)?

**Решаем**: во-первых, вновь следует обратить внимание на то, что в задаче речь идёт о**разных**объектах (даже если коты –близнецы). Это очень важное условие!

а) Данной «процедуре» подвергаются**сразу все коты**+ важно их расположение, поэтому здесь имеют место перестановки:способами можно рассадить котов по углам комнаты.

Ещё раз обратим внимание, что при перестановках имеет значение лишь количество различных объектов и их взаимное расположение. В зависимости от настроения Вася может рассаживать животных полукругом на диване, в ряд на подоконнике и т.д. – перестановок во всех случаях будет 24. Желающие могут для удобства представить, что коты разноцветные (например, белый, чёрный, рыжий и полосатый) и перечислить все возможные комбинации.

б) Сколькими способами можно отпустить гулять котов?

Предполагается, что коты ходят гулять только через дверь, при этом вопрос подразумевает безразличие по поводу количества животных – на прогулку могут выйти 1, 2, 3 или все 4 кота.

Считаем все возможные комбинации:

способами можно отпустить гулять одного кота (любого из четырёх); способами можно отпустить гулять двух котов (варианты перечислите самостоятельно);

способами можно отпустить гулять трёх котов (какой-то один из четырёх сидит дома);

способомможно выпустить всех котов.

Наверное, вы догадались, что полученные значения следует просуммировать:способами можно отпустить гулять котов.

в) Сколькими способами Вася может взять на руки двух котов?

Ситуация предполагает не только выбор 2 животных, но и их размещение по рукам:способами можно взять на руки 2 котов.

Второй вариант решения:способами можно выбрать двух котов**и**способами посадить**каждую**пару на руки:

**Ответ**: а) 24, б) 15, в) 12

**Задача 5**

В лифт 12-этажного дома сели 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со 2-го) этаже. Сколькими способами:

1) пассажиры могут выйти на одном и том же этаже(порядок выхода не имеет значения);

2) два человека могут выйти на одном этаже, а третий – на другом;

3) люди могут выйти на разных этажах;

4) пассажиры могут выйти из лифта?

**Решение**:

1. способами можно выбрать этаж для выхода всех пассажиров.
2. способами можно выбрать 2 этажа для выхода пассажиров (например, 6-й и 11-й этаж).

способами можно выбрать двух человек для выхода на одном этаже (третий выйдет на другом этаже).

Например:**6 этаж / 11 этаж**

Таня+Надя/ Люся

Таня+Люся/ Надя

Надя+Люся/ Таня

Кроме того, любую пару и «одинокого человека» можно поменятьэтажами:

**11 этаж / 6 этаж**

Таня+ Надя / Люся

Таня+ Люся / Надя

Надя+ Люся/ Таня

Таким образом,***для каждой***пары этажей (55 уникальных сочетаний) возможноспособов выхода пассажиров.По правилу умножения комбинаций:способами 2 пассажира могут выйти на одном этаже, а третий – на другом этаже.

1. способами пассажиры могут выйти на разных этажах.
2. ***Способ первый***: суммируем комбинации первых трёх пунктов:

способом пассажиры могут выйти из лифта.

**Способ второй**: в общем случае он более рационален, более того, позволяет обойтись без результатов предыдущих пунктов. Рассуждения таковы:способами может выйти 1-й пассажир из лифта***и***способами может выйти 2-й пассажир***и***способами может выйти 3-й пассажир. По правилу умножения комбинаций:способом могут выйти три человека.

**Ответ**: 1) 11; 2) 330; 3) 990; 4) 1331.

## *****Перестановки, сочетания и размещения с повторениями*****

## *****Перестановки с повторениями*****

В перестановках с повторениями, как и в «обычных» перестановках, участвует**сразу всё множество объектов**, но есть одно но: в данном множестве один или бо́льшее количество элементов (объектов) повторяются.

Для случая, когда среди выбираемых n элементов есть одинаковые (выборка с возвращением), задачу о числе перестановок с повторениями можно выразить вопросом: сколькими способами можно переставить n предметов, расположенных на n различных местах, если среди n предметов имеются k различных типов (k < n), т. е. есть одинаковые предметы.

Формула перестановок с повторениями:

**Задача 1**

Сколько различных буквосочетаний можно получить перестановкой карточек со следующими буквами: К, О, Л, О, К, О, Л, Ь, Ч, И, К?

**Решение**: в том случае, если бы все буквы были различны, то следовало бы применить тривиальную формулу, однако совершенно понятно, что для предложенного набора карточек некоторые манипуляции будут срабатывать «вхолостую», так, например, если поменять местами любые две карточки с буквами «К» в любом слове, то получится то же самое слово. Причём, физически карточки могут сильно отличаться: одна быть круглой с напечатанной буквой «К», другая – квадратной с нарисованной буквой «К». Но по смыслу задачи даже такие карточки**считаются одинаковыми**, поскольку в условии спрашивается о буквосочетаниях.

Всё предельно просто – всего: 11 карточек, среди которых буква:

К – повторяется 3 раза;О – повторяется 3 раза;Л – повторяется 2 раза;Ь – повторяется 1 раз;Ч – повторяется 1 раз;И – повторяется 1 раз.

Проверка: 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 11, что и требовалось проверить.

По формуле[количества перестановок с повторениями](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf):

различных буквосочетаний можно получить. Больше полумиллиона!

Для быстрого расчёта большого факториального значения удобно использовать стандартную функцию Excel: набираем в любую ячейку=ФАКТР(11)и нажимаемEnter.

На практике вполне допустимо не записывать общую формулу и, кроме того, опускать единичные факториалы:

. Но предварительные комментарии о повторяющихся буквах обязательны!

**Ответ**: 554400

**Задача 2**

Алексей занимается спортом, причём 4 дня в неделю – лёгкой атлетикой, 2 дня – силовыми упражнениями и 1 день отдыхает. Сколькими способами он может составить себе расписание занятий на неделю?

Формулаздесь не годится, поскольку учитывает совпадающие перестановки (например, когда меняются местами силовые упражнения в среду с силовыми упражнениями в четверг). И опять – по факту те же 2 силовые тренировки могут сильно отличаться друг от друга, но по контексту задачи (с точки зрения расписания) они считаются одинаковыми элементами.

По формуле количества перестановок с повторениями:

способами можно составить расписание занятий на неделю.

**Ответ**: 105

### *****Сочетания с повторениями*****

Характерная особенность этого вида комбинаций состоит в том, что выборка проводится из нескольких групп, каждая из которых состоит из одинаковых объектов.

Сочетания с повторениями из n элементов по m элементов могут содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до m включительно или не содержать его совсем, т.е. каждое сочетание из n элементов по k элементов может состоять не только из m различных элементов, но из m каких угодно и как угодно повторяющихся элементов. Число сочетаний с повторениями из n элементов по m обозначают символом и вычисляют по формуле

**Задача 1**

В студенческой столовой продают сосиски в тесте, ватрушки и пончики. Сколькими способами можно приобрести пять пирожков?

**Решение**: сразу обратите внимание на типичный критерий сочетаний с повторениями – по условию на выбор предложено не множество объектов как таковое, а***различные виды***объектов; при этом предполагается, что в продаже есть не менее пяти хот-догов, 5 ватрушек и 5 пончиков. Пирожки в каждой группе, разумеется, отличаются. Однако физические характеристики пирожков по смыслу задачи не существенны, и хот-доги / ватрушки / пончики в своих группах считаются одинаковыми.

Что может быть в выборке? Прежде всего, следует отметить, что в выборке обязательно будут одинаковые пирожки (т.к. выбираем 5 штук, а на выбор предложено 3 вида). Варианты тут на любой вкус: 5 хот-догов, 5 ватрушек, 5 пончиков, 3 хот-дога + 2 ватрушки, 1 хот-дог + 2 + ватрушки + 2 пончика и т.д.

Как и при «обычных» сочетаниях, порядок выбора и размещение пирожков в выборке не имеет значения – просто выбрали 5 штук и всё.

Используем формулуколичества сочетаний с повторениями:способом можно приобрести 5 пирожков.

**Ответ**: 21

**Задача 2**

В кошельке находится достаточно большое количество 1-, 2-, 5- и 10-рублёвых монет. Сколькими способами можно извлечь три монеты из кошелька?

В целях самоконтроля ответьте на пару простых вопросов:

1) Могут ли в выборке все монеты быть разными?

2) Назовите самую «дешевую» и самую «дорогую» комбинацию монет.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

### *****Размещения с повторениями*****

Из множества, состоящего из*n*элементов, выбирается*m*элементов, при этом важен порядок элементов в каждой выборке и любой объект исходного множества мы можем выбирать сколько угодно раз.

Когда так бывает? Типовым примером является кодовый замок с несколькими дисками, но по причине развития технологий актуальнее рассмотреть его цифрового потомка:

**Задача 1**

Сколько существует четырёхзначных пин-кодов?

**Решение**:способами можно выбрать первую цифру пин-кода**и**способами – вторую цифру пин-кода**и**столькими же способами – третью**и**столькими же – четвёртую. Таким образом, по правилу умножения комбинаций, четырёхзначныйпин-код можно составить:способами.

А теперь с помощью формулы. По условию нам предложен набор изцифр, из которого выбираютсяцифры и располагаютсяв определенном порядке, при этом цифры в выборке могут повторяться(т.е. любой цифрой исходного набора можно пользоваться произвольное количество раз). По формулеколичества размещений с повторениями:.

**Ответ**: 10000

Что тут приходит на ум… …если банкомат «съедает» карточку после третьей неудачной попытки ввода пин-кода, то шансы подобрать его наугад весьма призрачны.

И кто сказал, что в комбинаторике нет никакого практического смысла?

**Задача 2**

Согласно государственному стандарту, автомобильный номерной знак состоит из 3 цифр и 3 букв. При этом недопустим номер с тремя нулями, а буквы выбираются из набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х(используются только те буквы кириллицы, написание которых совпадает с латинскими буквами).

Сколько различных номерных знаков можно составить для региона?

Не так их, кстати, и много. В крупных регионах такого количества не хватает, и поэтому для них существуют по несколько кодов к надписи RUS.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

# ****ЗАМЕЧАНИЕ:** *Для правильного выбора комбинаторной формулы используйте* ПРИЛОЖЕНИЕ 6.**

# ****Примеры решений задач на классическое определение вероятности****

Вероятность наступления события*А*в некотором испытании равна отношению, где:

*n*– общее число всехравновозможных,элементарныхисходов данного испытания, которые образуютполную группу событий;

*m*– количествоэлементарныхисходов, благоприятствующих событию*A*.

**Задача 1**

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

**Решение**: важнейшей предпосылкой для использования классического определения вероятности является**возможность подсчёта общего количества исходов**.

Всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, и, очевидно, справедливы следующие факты:

– извлечение любого шара одинаково возможно(***равновозможность***исходов), при этомисходы**элементарны**и образуют**полную группу событий**(т.е. в результате испытания обязательно будет извлечён какой-то один из 30 шаров).

Таким образом, общее число исходов:*n=30*

Рассмотрим событие:*A*– из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют*m=15*элементарныхисходов, поэтому по классическому определению:– вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.

Как ни странно, даже в такой простой задаче можно допустить серьёзную неточность. Где здесь подводный камень? Здесь некорректно рассуждать, что«раз половина шаров белые, то вероятность извлечения белого шара». В классическом определении вероятности речь идёт об***элементарных***исходах, и дробьследует обязательно прописать!

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

*B*– из урны будет извлечён красный шар;*C*– из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию*B*благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию*C*– 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:

**Ответ**: а) б) в)

**Задача 2**

В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

**Решение***:* 30 – 5 = 25 холодильников не имеют дефекта. По классическому определению: *–* вероятность того, что наугад выбранный холодильник не имеет дефекта.

**О*твет****: .*

**Задача 3**

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

**Примечание**: ноль – это чётное число (делится на 2 без остатка)

**Решение**: сначала найдём общее количество исходов. По условию, абонент помнит, что одна из цифр – ноль, а другая цифра – нечётная. Здесь рациональнее не мудрить с[комбинаторикой](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html)и воспользоватьсяметодом прямого перечисления исходов. То есть, при оформлении решения просто записываем все комбинации:01, 03, 05, 07, 0910, 30, 50, 70, 90. И подсчитываем их – всего: 10 исходов.Благоприятствующий исход один: верный номер.

По классическому определению:– вероятность того, что абонент наберёт правильный номер

**Ответ**: 0,1

**Задача 4**

Абонент забыл пин-код к своей сим-карте, однако помнит, что он содержит три «пятёрки», а одна из цифр – то ли «семёрка», то ли «восьмёрка». Какова вероятность успешной авторизации с первой попытки?

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

Иногда перечисление комбинаций оказывается весьма кропотливым занятием. В частности, так обстоят дела в следующей, не менее популярной группе задач, где подкидываются 2 игральных:

**Задача 5**

Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет:а) пять очков;б) не более четырёх очков;в) от 3 до 9 очков включительно.

**Решение**: найдём общее количество исходов:

способами может выпасть грань 1-го кубика**и**способами может выпасть грань 2-го кубика; по[*правилу умножения комбинаций*](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html), всего:возможных комбинаций. Иными словами,**каждая**грань 1-го кубика может составитьупорядоченнуюпару**с каждой**гранью 2-го кубика. Условимся записывать такую пару в виде (*a,b*), где*a*– цифра, выпавшая на 1-м кубике,*b*– цифра, выпавшая на 2-м кубике. Например:

(3*,5*) – на первом кубике выпало 3 очка, на втором – 5 очков, сумма очков: 3+5=8;

(6*,1*) – на первом кубике выпало 6 очков, на втором – 1 очко, сумма очков: 6+1=7;

(*2,2*) – на обеих костях выпало 2 очка, сумма: 2+2 =4.

Очевидно, что наименьшую сумму даёт пара(*1,1*), а наибольшую – две «шестёрки».

а) Рассмотрим событие:*A*– при бросании двух игральных костей выпадет 5 очков. Запишем и подсчитаем количество исходов, которые благоприятствуют данному событию: (*1,4*), (*4,1*), (*2,3*), (*3,2*). Итого: 4 благоприятствующих исхода. По классическому определению:– искомая вероятность.

б) Рассмотрим событие:*B*– выпадет не более 4 очков. То есть, либо 2, либо 3, либо 4 очка. Снова перечисляем и подсчитываем благоприятствующие комбинации, слева записано суммарное количество очков, а после двоеточия – подходящие пары:

*2 очка: (1,1)*

*3 очка: (1,2); (2,1)*

*4 очка: (1,3); (3,1); (2,2)*

Итого: 6 благоприятствующих комбинаций. Таким образом:– вероятность того, что выпадет не более 4 очков.

в) Рассмотрим событие:*C*– выпадет от 3 до 9 очков включительно. Как лучше поступить? В подобных случаях рациональным оказывается окольный путь. Рассмотрим[*противоположное событие*](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html):– выпадет 2 или 10 или 11 или 12 очков.

В чём смысл? Противоположному событию благоприятствует значительно меньшее количество пар:

*2 очка: (1,1)*

*10 очков: (4,6); (6,4); (5,5)*

*11 очков: (5,6); (6,5);*

*12 очков: (6,6);*

Итого: 7 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:– вероятность того, что выпадет меньше трёх или больше 9 очков.

Далее пользуемся тем, что[сумма вероятностей противоположных событий](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html)равна единице:– вероятность того, что выпадет от 3 до 9 очков включительно.

**Ответ**: а) б) в)

**Задача 6**

Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков:а) будет равно семи;б) окажется не менее 20;в) будет чётным.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

Помимо прямого перечисления и подсчёта исходов, в ходу также различные[комбинаторные формулы](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf).

**Задача 7**

В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что:

а) они выйдут на разных этажах; б) двое выйдут на одном этаже;в) все выйдут на одном этаже.

Следует отметить, что[случайность](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html)здесь имеет место быть лишь с точки зрения стороннего наблюдателя(т.к. человек обычно едет на вполне определённый этаж).

**Решение**: вычислим общее количество исходов:способами может выйти из лифта 1-й пассажир**и**способами – 2-й пассажир**и**способами – третий пассажир. По правилу умножения комбинаций:возможных исходов. То есть,***каждый***этаж выхода 1-го человека может комбинироваться***с каждым***этажом выхода 2-го человека и***с каждым***этажом выхода 3-го человека.

Второй способ основан на[размещениях с повторениями](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf):– кому как понятнее.

а) Рассмотрим событие:*А*– пассажиры выйдут на разных этажах. Вычислим количество благоприятствующих исходов:способами могут выйти 3 пассажира на разных этажах. По классическому определению:

в) Рассмотрим событие:*В*– пассажиры выйдут на одном этаже. Данному событию благоприятствуютисходов и по классическому определению, соответствующая вероятность:.

б) Рассмотрим событие:*С*– два человека выйдут на одном этаже(и, соответственно, третий – на другом).

События*A,B,C*образуют[полную группу](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html), а значит,

.

В результате, искомая вероятность:

.

**Ответ**: а) б) в)

, что и требовалось проверить.

Иногда по причине погрешности округлений может получиться 0,9999 либо 1,0001, в этом случае одно из приближенных значений следуют «подогнать» так, чтобы в сумме нарисовалась «чистая» единица.

**Задача 8**

Подбрасывается 10 монет. Найти вероятность того, что:а) на всех монетах выпадет орёл;б) на 9 монетах выпадет орёл, а на одной – решка;в) орёл выпадет на половине монет.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Задача 9**

На семиместную скамейку случайным образом рассаживается 7 человек. Какова вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом?

**Решение**: с общим количеством исходов проблем не возникает:способами могут рассесться 7 человек на скамейке.

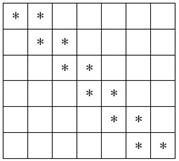
Но вот как подсчитать количество благоприятствующих исходов? Тривиальные формулы не подходят и единственный путь – это логические рассуждения. Сначала рассмотрим ситуацию, когда Саша и Маша оказались рядом на левом краю скамейки:

http://www.mathprofi.ru/m/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij_clip_image121.jpg

Очевидно, что порядок имеет значение: слева может сидеть Саша, справа Маша и наоборот. Но это ещё не всё – *для каждого*из этих двух случаев остальные люди могут рассесться на свободных местахспособами. Выражаясь комбинаторно, Сашу и Машу можно переставить на соседних местахспособами **и**для каждой такой перестановки других людей можно переставитьспособами.

Таким образом, по правилу умножения комбинаций, выходит благоприятствующихисходов.

Но и это ещё не всё! Перечисленные факты справедливы***для каждой***пары соседних мест:

Интересно отметить, что если скамейку «скруглить»(соединяя левое и правое место), то образуется дополнительная, седьмая пара соседних мест. Согласно тому же принципу умножения комбинаций, получаем окончательное количество благоприятствующих исходов:. По классическому определению:– вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом.

**Ответ**:.

**Задача 10**

На шахматную доску из 64 клеток ставят наудачу две ладьи белого и чёрного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?

**Справка**: шахматная доска имеет размер*8×8* клеток; черная и белая ладьи «бьют» друг друга, когда располагаются на одной горизонтали или на одной вертикали

Обязательно выполните схематический чертёж доски, а ещё лучше, если неподалёку есть шахматы. Одно дело рассуждения на бумаге, и совсем другое – когда расставляешь фигуры собственными руками.

Вычислим общее количество исходов:способами можно расставить двух ладей на доске.Теперь подсчитаем исходы, в которых ладьи «бьют» друг друга. Рассмотрим 1-ю горизонталь. Очевидно, что фигуры можно расставить на ней произвольным образом, например, так:http://www.mathprofi.ru/m/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij_clip_image224.jpgКроме того, ладей можно переставить. Придаём рассуждениям числовую форму:способами можно выбрать две клетки**и**способами переставить ладей**в каждом**из 28 случаев. Всего:возможных расположений фигур на горизонтали. Короткая версия оформления:способами можно разместить белую и чёрную ладью на 1-й горизонтали.

Проведённые рассуждения справедливы**для каждой**горизонтали, поэтому количество комбинаций следует умножить на восемь: . Кроме того, аналогичная история справедлива для любой из восьми вертикалей. Вычислим итоговое количество расстановок, в которых фигуры «бьют» друг друга:Тогда в оставшихся вариантах расстановки ладьи не будут «бить» друг друга:4032 – 896 = 3136

По классическому определению вероятности:– вероятность того, что наугад поставленные на доску белая и чёрная ладья не будут «бить» друг друга.

**Ответ**:

**Задача 11**

Какова вероятность того, что в четырех сданных картах будет один туз и один король?

**Решение**: Вычислим общее количество исходов. Сколькими способами можно извлечь 4 карты из колоды? Речь идёт околичестве сочетаний:

способами можно выбрать 4 карты из колоды.

Теперь считаем благоприятствующие исходы. По условию, в выборке из 4 карт должен быть один туз, один король и, о чём не сказано открытым текстом, –**две другие карты**:способами можно извлечь одного туза;

способами можно выбрать одного короля.

Исключаем из рассмотрения тузов и королей: 36 – 4 – 4 = 28

способами можно извлечь две другие карты.

По правилу умножения комбинаций:=6048 способами можно извлечь искомую комбинацию карт (одного туза**и**одного короля**и**две другие карты).

По классическому определению:– вероятность того, что среди четырех сданных карт будет один туз и один король.

**Ответ**:

Более простая задача для самостоятельного решения:

**Задача 12**

В ящике находится 15 качественных и 5 бракованных деталей. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что:а) обе детали будут качественными;б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной;в) обе детали бракованы.

События перечисленных пунктов образуют полную группу, поэтому проверка здесь напрашивается сама собой.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Задача 13**

Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на два из трёх вопросов?

**Решение**: итак, расклад таков: всего 60 вопросов, среди которых 25 «хороших» и, соответственно, 60 – 25 = 35 «плохих». Ситуация шаткая и не в пользу студента. Давайте узнаем, насколько хороши его шансы:способами можно выбрать 3 вопроса из 60(общее количество исходов).

Для того чтобы сдать экзамен, нужно ответить на 2**или**3 вопроса. Считаем благоприятствующие комбинации:способами можно выбрать 2 «хороших» вопроса**и**один «плохой»;

способами можно выбрать 3 «хороших» вопроса.

По*правилу сложения комбинаций*:способами можно выбрать благоприятствующую для сдачи экзамена комбинацию 3 вопросов(без разницы с двумя или тремя «хорошими» вопросами).

По классическому определению:– вероятность того, что студент сдаст экзамен.

**Ответ**:

Популярная игра для самостоятельного исследования:

**Задача 14**

Игроку вПОКЕРсдаётся 5 карт. Найти вероятность того, что он получит:

а) пару десяток и пару валетов;б) флеш (5 карт одной масти);в) каре (4 карты одного номинала).

Какую из перечисленных комбинаций вероятнее всего получить?

**Справка**: в покер традиционно играют 52-карточной колодой, которая содержит карты 4 мастей номиналом от «двоек» до тузов.

ПОКЕР– игра самая что ни на есть математическая (кто играет, тот знает), в которой можно обладать заметным преимуществом перед менее квалифицированными соперниками.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Геометрическое определение вероятности**

Классическое определение вероятности оказывается эффективным для решения целого спектра задач, но с другой стороны, обладает и рядом недостатков. Даже правильнее сказать, не недостатков, а ограничений. Одним из таких ограничений является тот факт, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. Простейший пример:

На отрезокнаудачу бросаетсяточка. Какова вероятность того, что она попадёт в промежуток?

Простейший пример на геометрическое определение вероятности

Поскольку на отрезке бесконечно много точек, то здесь нельзя применить формулу(ввиду бесконечно большого значения «эн»)и поэтому на помощь приходит другой подход, называемый**геометрическим определением вероятности**.

Всё очень похоже: вероятность наступления некоторого события*A*в испытании равна отношению, гдеG–геометрическая мера, выражающая общее числовсех возможныхиравновозможныхисходов данного испытания, аg–мера, выражающая количество благоприятствующих событию*A*исходов. На практике в качестве такой геометрической меры чаще всего выступает длина или площадь, реже – объём.

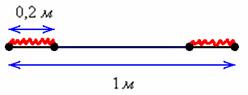
Рассмотрим событие:*A*– брошенная на отрезок точка, попала в промежуток. Очевидно, что общее число исходов выражается длиной большего отрезка:*L=1-0=1ед*, а благоприятствующие событию*А*исходы – длиной вложенного отрезка:*l=0,7-0,4=0,3 ед.*По геометрическому определению вероятности:.

Слишком просто? Как и в случае склассическим определением, это обманчивое впечатление. Обстоятельно и добросовестно разбираемся в практических примерах:

**Задача 1**

Метровую ленту случайным образом разрезают ножницами. Найти вероятность того, что длина обрезка составит не менее 80 см.

**Решение**: «чего тут сложного? Вероятность равна 1/5-й». Это автоматическая ошибка, которую допускают по небрежности. Да, совершенно верно – длина обрезка составит не менее 80 см, если от ленты отрезать не более 20 сантиметров. Но здесь часто забывают, что искомый разрез можно сделать**как с одного**конца ленты,**так и с другого:**



Рассмотрим событие:*А*– длина обрезка составит не менее 0,8 м.

Поскольку ленту можно разрезать где угодно, то общему числу исходов соответствует её длина:*L= 1 м*. Благоприятствующие событию*А*участки разреза отмечены на рисунке волнистой линией и их суммарная длина равна:*l=0,2+0,2=0,4 м*. По геометрическому определению:.

**Ответ**: 0,4

При оформлении задач следует обязательно указывать размерность(единицы, метры, квадратные единицы, квадратные метры и т.д.). Кстати, обратите внимание, что на финальном этапе вычислений геометрическая мера сокращается. Так в рассмотренном примере, сократились метры, в результате чего получилась привычная безразмерная вероятность.

**Задача 2**

После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошёл между 50-м и 55-м километрами линии?

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

Значительно чаще встречаются примеры, в которых фигурируют площади:

**Задача 3**

В треугольник со сторонами*a = 9, b = 13, c =16*вписан круг. Точка*M*произвольно ставится в треугольник. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг.

Напоминаем, что вписанный круг лежит внутри треугольника и касается его сторон в 3 точках

**Решение**: поскольку точка ставится в треугольник, а круг лежит внутри, то общему числу исходов соответствует площадь треугольника, а множеству благоприятствующих исходов – площадь вписанного круга. Ищем площади:

Если даны длины сторон треугольника, то его площадь удобно найти поформуле Герона:, где*a, b, c*– длины сторон треугольника, а*p*– полупериметр.

Сначала вычислим полупериметр треугольника:

, а затем его площадь:.

Площадь вписанного круга найдём по формуле, где– его радиус.

Итак, площадь вписанного круга:.

По геометрическому определению:– вероятность того, что точка*M*попадёт во вписанный круг.

**Ответ**:

Более простой пример для самостоятельного решения:

**Задача 4**

В круге радиуса 10 см находится прямоугольный треугольник с катетами 12 и 7 см. В круг наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что она не попадёт в данный треугольник.

Следует отметить, что в этой задаче треугольник вовсе не обязан как-то касаться окружности, он просто расположен внутри круга и всё. Будьте внимательны!

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

А теперь рассмотрим широко известную задачу о встрече:

**Задача 5**

Две грузовые машины могут подойти на погрузку в промежуток времени от 19.00 до 20.30. Погрузка первой машины длится 10 минут, второй – 15 минут. Какова вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой?

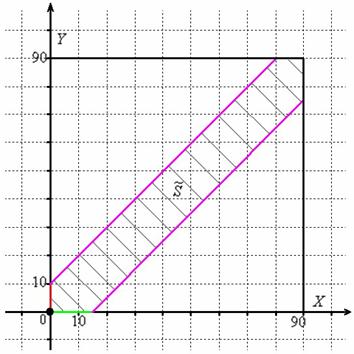
Давайте немного осмыслим условие. Во-первых, автомобили могут подойти на погрузку в любом порядке, а во-вторых – в любые моменты времени в течение полутора часов.

**Решение**:сначала выясняем длительность временно́го промежутка, на котором может состояться встреча. В данном случае, как уже отмечено выше, это полтора часа или 90 минут. При этом здесь не имеют особого значения фактические временны́е рамки – погрузка автомобилей, может состояться, например, утром с 8.30 до 10.00, и решение будет точно таким же.

Вычисления допустимо проводить как в долях часа, так и в минутах.

На первом шаге изобразимпрямоугольную систему координат, где в подходящем масштабе построим квадрат размером 90 × 90 единиц; при этом одна из вершин квадрата совпадает с началом координат, а его смежные стороны лежат на координатных осях.

Общему множеству исходов будет соответствовать площадь данного квадрата:. Далее по оси*OX*от начала координат откладываем время погрузки одного автомобиля, а по оси*OY*– время погрузки другого автомобиля*(можно наоборот, это не повлияет на решение)*:

Теперь из правого конца отрезка на оси ОХ и из верхнего конца отрезка на оси ОYпод углом 45 градусов проводим две линии внутри квадрата.Множеству благоприятствующих исходов (когда автомобили «пересекутся» во времени) соответствует площадь заштрихованной фигуры. Найдём площади двух прямоугольных треугольников с помощью формулы

,

где *a, b*– длины катетов. Обратите внимание, что в общем случае эти треугольники**не равны**. У нас: верхний треугольник имеет катеты длиной по 80 единиц, нижний треугольник – по 75 единиц. Таким образом, суммарная площадь треугольников составляет:.

Наконец, из площади квадрата вычитаем площади треугольников, получая тем самым благоприятствующую площадь:

По геометрическому определению:

– вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой.

**Ответ**:

В заключение следует отметить, что геометрическое определение вероятности тоже обладает своими недостатками. Один из них заключается в своеобразном парадоксе, давайте вспомним демонстрационный пример с отрезком, на который случайным образом падает точка. Возможно ли, что точка попадёт, например, на самый край отрезка? Да, такое событие возможно, но по геометрическому определению, его вероятность равна нулю! И то же самое можно сказать о любой точке отрезка! Дело в том, что с позиций геометрии размеры отдельно взятой точки равны нулю, и поэтому геометрическое определение вероятности здесь не срабатывает.

# ****Относительная частота события и статистическое определение вероятности****

Вероятность наступления события*А*в некотором испытании – есть отношение, где:

*n*– общее число всехравновозможных,элементарныхисходов этого испытания, которые образуютполную группу событий;

*m*– количество элементарных исходов, благоприятствующих событию*A*.

О некоторых недостатках*классического определения вероятности*заходила речь в теме*Геометрическое определение вероятности*, но это только верхушка айсберга, и сейчас данный вопрос получит интереснейшее продолжение. Начнём опять же с бесхитростных примеров:

– вероятность того, что в результате броска монеты***выпадет***«орёл»;

– вероятность того, что в результате броска игральной кости***выпадет***5 очков;

– вероятность того, что из колоды***будет извлечена***трефа.

Внимательный читатель заметил, что все комментарии о вероятностях сформулированы в***будущем времени***. И это не случайность –*классическое определение*, как правило, оценивает вероятность**ДО**проведения испытаний и даже без их фактического проведения. То есть, монета ещё не подброшена, а вероятность появления орла мы уже прекрасно знаем. Можно дать зарок никогда не брать в руки кубик либо колоду карт, однако, вероятности событийбеспроблемно рассчитываются и без этого.

**Примечание**: однако, в отсутствии информации о результате испытания фразу «Вероятность того, что монета***упала***орлом» (например) всё же нельзя признать некорректной. То есть классическое определение может оценивать вероятность и после реального опыта.

Почему такое возможно? Такое возможно потому, что**все**элементарные исходы известны и подсчитаны заранее:

орёл и решка– итого 2 элементарных исхода;

1, 2, 3, 4, 5, 6– 6 элементарных исходов;

6, 7, 8, 9, 10, В, Д, К, Т каждой масти– всего 36 карт.

Кроме того, для применения**классического определения вероятности**необходимаравновозможностьэлементарных исходов. Равновозможность выпадения граней монеты либо кубика обуславливается симметрией и несмещённым центром тяжести, колода же карт должна быть полной, некраплёной и хорошо перемешанной.

И всё было бы ладно, но в реальной жизни подобные модели встречаются нечасто. В большинстве ситуаций элементарные исходы перечислить затруднительно или невозможно, и ещё труднее обосновать их равновозможность. Простой пример:

Штирлиц пошёл в лес за грибами. Найти вероятность того, что он найдёт подберёзовик.

Совершенно понятно, что все грибы в лесу(общее количество элементарных исходов)пересчитать практически невозможно, а значит, классическое определение вероятности не срабатывает. И даже если группа разведчиков учтёт все грибы в небольшой роще, классифицирует их по видам, то препятствием станет неравновозможность исходов. Почему? Поляна мухоморов намного заметнее, чем замаскировавшиеся подберёзовики.

Вновь обратим внимание на шаблонные формулировки стандартных задач:

«Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8»;«Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке составляет 0,05».

Возникает вопрос, откуда взялись эти значения? И ответ здесь один: данные вероятности могли получиться***только на основе ранее проведённых опытов***.

**Относительной частотой**события*A*называют отношение числа испытаний*m*, в которых данное событие появилось, к общему числу*n*фактически проведённых испытаний:, или короче:.

**Относительная частота**наряду с**вероятностью**является одним из ключевых понятий теории вероятностей, но если*классическое*либо*геометрическое определение вероятности*не требуют проведения испытаний, то относительная частота рассчитывается исключительно ПОСЛЕ опытов на основе фактически полученных данных.

В том случае, если серии испытаний проводятся внеизменных условиях, то относительная частота обнаруживает свойство**устойчивости**, то есть колеблется около определённого значения.

Пусть некий профессиональный стрелок произвёл 100 выстрелов по мишени и попал 83 раза. Тогда относительная частота поражения цели составит:

Предположим, что тот же самый стрелок в точно такой же «форме» и в приблизительно таких же условиях снова провёл серию из 100 выстрелов. Вероятно ли, что он снова попадёт 83 раза? Не очень. Но количество попаданий вряд ли будет сильно отличаться от предыдущего результата. Пусть, например, стрелок попал 79 раз. Тогда относительная частота поражения цели составит:

В третьей серии из 100 выстрелов, проведённой при похожих обстоятельствах, данный стрелок попал 81 раз,и т.д.

Иногда могут случаться блестящие серии более 90 попаданий, иногда «провалы», но среднее количество попаданий будет варьироваться около 80. И когда количество фактически проведённых испытаний станет достаточно большим, то речь зайдёт о**статистической вероятности**. Если в одинаковых (примерно одинаковых) условиях проведено достаточно много испытаний, то за**статистическую вероятность события**принимают относительную частоту данного события либо близкое число.

Предположим, что на протяжении нескольких лет наш спортсмен, сохраняя стабильный уровень подготовки, совершил 10000 выстрелов и попал 8037 раз. Относительная частота поражения цели составит:и за статистическую вероятность его результативности целесообразно принять*p*=0,8, которая становится теоретической оценкой, например, перед грядущими соревнованиями.

Аналогичная история с утверждением«Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке равна 0,05». Эту оценку невозможно получить с помощью*классического определения вероятности*– она следует только из практики! Если на станке произведены десятки тысяч деталей и на каждую, скажем, тысячу выпущенных деталей, приходится в среднем 50 бракованных, то в качестве статистической вероятности брака принимается значения*p*=0,05.

# ****Теоремы сложения и умножения вероятностей****

**Теорема сложения вероятностей несовместных событий**: вероятность появления одного из двух**несовместных**событий*A*или*B*(без разницы какого), равна сумме вероятностей этих событий:

Аналогичный факт справедлив и для бо́льшего количества несовместных событий, например, для трёх несовместных событий*А, В*и*С*:

Вспомним*алгебру событий*: сложение событий означает появление***хотя бы одного***из суммируемых событий, и, поскольку события в данном случае НЕсовместны, то***одного и только одного***из этих событий (безразлично какого).

Следует отметить, что длясовместныхсобытий равенство

будет***неверным***.

Рассмотрим игральный кубик с*полной группой событий*, которые состоят в том, что при его броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков соответственно.

Рассмотрим событие– в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков. Данное событие состоит в двух несовместных исходах:(выпадет 5***или***6 очков). По теореме сложения вероятностей несовместных событий:– вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Рассмотрим событие, состоящее в том, что выпадет не более 4 очков и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

По той же теореме, вероятность того, что выпадет нечётное число очков:

и так далее.

С помощью рассматриваемой теоремы можно решить некоторые задачи, которые нам встретились в теме «Классическое определение вероятности» (задача № 13): «Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3 вопросов?»

Но здесь вместо*правила сложений комбинаций*в ходу и другая схема рассуждений. Рассмотрим два несовместных события:*А*– студент ответит на два вопроса из трёх;*В*– студент ответит на все три вопроса.

Возможно, некоторые читатели ещё не до конца осознали**суть**несовместности. Вдумаемся ещё раз: студент не может ответить на 2 вопроса из 3***и в то же самое время***ответить на все 3 вопроса. Таким образом, события*А*и*В*– несовместны.

Теперь, пользуясь*классическим определением*, найдём их вероятности:

Факт успешной сдачи экзамена выражается суммой*A+B*(ответ на 2 вопроса из 3***или***на все вопросы). По теореме сложения вероятностей несовместных событий:– вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Этот способ решения совершенно равноценен, выбирайте, какой больше нравится.

**Задача 1**

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

**Решение**:всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.

По классическому определению: – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада; – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

По теореме сложения несовместных событий:

- вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

**Ответ**: 0,55

**Задача 2**

В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

## *****Зависимые и независимые события*****

События являются**независимыми**, если вероятность наступления**любого из них**не зависитот появления/непоявления остальных событий рассматриваемого множества (во всех возможных комбинациях).

**Теорема умножения вероятностей независимых событий**: вероятность совместного появления независимых событий*А*и*В*равна произведению вероятностей этих событий:

Рассмотрим пример с монетами.Подбрасываются две монеты, тогда события:– на 1-й монете выпадет орёл;– на 2-й монете выпадет орёл.

Найдём вероятность события(на 1-й монете появится орёл**и**на 2-й монете появится орёл). Вероятность выпадения орла на одной монете никак не зависит от результата броска другой монеты, следовательно, событияинезависимы. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

.

Аналогично:– вероятность того, что на 1-й монете выпадет решка**и**на 2-й решка;

– вероятность того, что на 1-й монете появится орёл**и**на 2-й решка;

– вероятность того, что на 1-й монете появится решка**и**на 2-й орёл.

Заметьте, что события,образуют**полную группу**и сумма их вероятностей равна единице:

.

Теорема умножения очевидным образом распространяется и на бо́льшее количество независимых событий, так, например, если события*А, В, С* независимы, то вероятность их совместного наступления равна:

.

**Задача 1**

В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

**Решение**: вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях. Рассмотрим следующие независимые события:

– из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;– из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;– из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению:

– соответствующие вероятности.

Интересующее нас событие(из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь***и***из 2-го стандартная***и***из 3-го стандартная)выражается произведением.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

– вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

**Ответ**: 0,504

**Задача 2**

В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: а) все три шара будут белыми; б) все три шара будут одного цвета.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

***Зависимые события***

Событие*X*называют**зависимым**, если его вероятность*P(X)*зависитот одного или бо́льшего количества событий, которые уже произошли. За примерами далеко ходить не надо – достаточно до ближайшего магазина:

*X*– завтра в 19.00 в продаже будет свежий хлеб.

Вероятность этого события зависит от множества других событий: завезут ли завтра свежий хлеб, раскупят ли его до 7 вечера или нет и т.д. В зависимости от различных обстоятельств данное событие может быть как достоверным*P(X)=1*, так и невозможным*P(X)=0*. Таким образом, событие*X*является**зависимым**.

*В*– на экзамене студенту достанется простой билет.

Если идти не самым первым, то событие*В*будет зависимым, поскольку его вероятность*P(B*) будет зависеть от того, какие билеты уже вытянули однокурсники.

### ***Как определить зависимость/независимость событий?***

Иногда об этом прямо сказано в условии задачи, но чаще всего приходится проводить самостоятельный анализ. Какого-то однозначного ориентира тут нет, и факт зависимости либо независимости событий вытекает из естественных логических рассуждений.

**Задача 3**

Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) только один стрелок попадёт в мишень;б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

**Решение**: вероятность попадания/промаха одного стрелка, очевидно, не зависит от результативности другого стрелка.

Рассмотрим события:– 1-й стрелок попадёт в мишень;– 2-й стрелок попадёт в мишень.

По условию:

Найдём вероятности противоположных событий– того, что соответствующие стрелки промахнутся:

.

а) Рассмотрим событие:*B*– только один стрелок попадёт в мишень. Данное событие состоит в двух несовместных исходах:

1-й стрелок попадёт**и**2-й промахнётся**или**1-й промахнётся**и**2-й попадёт.

На языкеалгебры событийэтот факт запишется следующей формулой:

.

Сначала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий, затем – теорему умножения вероятностей независимых событий:

– вероятность того, что будет только одно попадание.

б) Рассмотрим событие:*C*– хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Прежде всего, вдумаемся – что значит условие«*хотя бы один*»? В данном случае это означает, что попадёт или 1-й стрелок (2-й промахнётся)**или**2-й (1-й промахнётся)**или**оба стрелка сразу – итого 3 несовместных исхода.

***Способ первый***: учитывая готовую вероятность предыдущего пункта, событие*C*удобно представить в виде суммы следующих несовместных событий:

попадёт кто-то один(событие*B*, состоящее в свою очередь из 2 несовместных исходов)**или**попадут оба стрелка – обозначим данное событие буквой*D*.Таким образом:*C=B+D*

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

– вероятность того, что 1-й стрелок попадёт**и**2-й стрелок попадёт.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

– вероятность хотя бы одного попадания по мишени.

***Способ второй***: рассмотрим противоположное событие:– оба стрелка промахнутся.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

.

В результате:.

Особое внимание обратите на второй способ – в общем случае он более рационален.

Способ третий: событиясовместны, а значит, их суммавыражает событие «хотя бы один стрелок попадёт в мишень» (см.*алгебру событий*). По***теореме сложения вероятностей совместных событий***и теореме умножения вероятностей независимых событий:

Выполним проверку: события(0, 1 и 2 попадания соответственно)образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей должна равняться единице:, что и требовалось проверить.

**Ответ**: а) 0,44; б) 0,92.

**Задача 4**

Для сигнализации о возгорании установлены два независимо работающих датчика. Вероятности того, что при возгорании датчик сработает, для первого и второго датчиков соответственно равны 0,5 и 0,7. Найти вероятность того, что при пожаре:а) оба датчика откажут; б) оба датчика сработают; в) пользуясьтеоремой сложения вероятностей событий, образующих полную группу, найти вероятность того, что при пожаре сработает только один датчик. Проверить результат прямым вычислением этой вероятности(с помощью теорем сложения и умножения).

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Задача 5**

Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8. Вероятность того, что цель не поражена после выполнения первым и вторым стрелками по одному выстрелу равна 0,08. Какова вероятность поражения цели вторым стрелком при одном выстреле?

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Задача 6**

Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле только из первого орудия равна 0,7, из второго – 0,6, из третьего – 0,8. Найти вероятность того, что: 1) хотя бы один снаряд попадет в цель; 2) только два снаряда попадут в цель; 3) цель будет поражена не менее двух раз.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Задача 7**

Стрелок попадает в цель с одной и той же вероятностью при каждом выстреле. Какова эта вероятность, если вероятность хотя бы одного попадания при трех выстрелах равна 0,973.

**Решение**: обозначим через*p*– вероятность попадания в мишень при каждом выстрелеи через*q=1-p*– вероятность промаха при каждом выстреле.

Распишем события:*A*– при 3 выстрелах стрелок попадёт в мишень хотя бы один раз;– стрелок 3 раза промахнётся.

По условию, тогда вероятность противоположного события:.

С другой стороны, по теореме умножения вероятностей независимых событий:.Таким образом:, тогда – вероятность промаха при каждом выстреле.

В результате:– вероятность попадания при каждом выстреле.

**Ответ**: 0,7

В рассмотренной задаче можно поставить дополнительные вопросы о вероятности только одного попадания, только двух попаданий и вероятности трёх попаданий по мишени. Схема решения будет точно такой же, как и в двух предыдущих примерах:

Однако принципиальное содержательное отличие состоит в том, что здесь имеют место*повторные независимые испытания*, которые выполняются последовательно, независимо друг от друга и с одинаковой вероятностью исходов.

# *****Зависимые события и условная вероятность*****

Кратко повторим, что такое независимость событий: события*А*и*В*являются *независимыми*, если вероятность любого из них**не зависит**

от появления либо непоявления другого события. Простейший пример – подбрасывание двух монет. Вероятность выпадения орла либо решки на одной монете никак не зависит от результата броска другой монеты.

Понятие зависимости событий вам тоже знакомо. И так, сначала рассмотрим традиционный набор, состоящий из двух событий: событие*В*является**зависимым**, если помимо случайных факторов его вероятность зависит от появления либо непоявления события*А*. Вероятность события*В*, вычисленная в предположении того, что событие*А****уже произошло***, называется**условной вероятностью**наступления события*В*и обозначается через. При этом события*A*и*B*называют**зависимыми событиями**(хотя, строго говоря, зависимо только одно из них).

**Задача 1**

Из колоды в 36 карт последовательно извлекаются 2 карты. Найти вероятность того, что вторая карта окажется червой, если до этого:

а) была извлечена черва;

б) была извлечена карта другой масти.

**Решение**: рассмотрим событие:*B*– вторая карта будет червой. Совершенно понятно, что вероятность этого события зависит от того, черву или не черву вытянули ранее.

а) Если сначала была извлечена черва (событие*A*), то в колоде осталось 35 карт, среди которых теперь находится 8 карт червовой масти. По*классическому определению*:– вероятность того, что вторая карта окажется червой***приусловии***, что до этого тоже была извлечена черва.

б) Если же сначала была извлечена карта другой масти (событие), то все 9 черв остались в колоде. По*классическому определению*:– вероятность того, что вторая карта окажется червой***приусловии***, что до этого была извлечена карта другой масти.

Всё логично – если вероятность извлечения червы из полной колоды составляет, то при извлечении следующей карты аналогичная вероятность изменится: в первом случае – уменьшится(т.к. черв стало меньше), а во втором – возрастёт:(т.к. все червы остались в колоде).

**Ответ**: а)б) .

Зависимых событий, разумеется, может быть и больше. В условиях предыдущей задачи, добавим ещё одно:*С*– третьей картой будет извлечена черва. Предположим, что произошло событие*А*, а затем событие*В*; тогда в колоде осталось 34 карты, среди которых 7 черв. По*классическому определению:*– вероятность наступления события*С****при условии***, что до этого были извлечены две червы.

Для самостоятельной тренировки:

**Задача 2**

В конверте находится 10 лотерейных билетов, среди которых 3 выигрышных. Из конверта последовательно извлекаются билеты. Найти вероятности того, что:

а) 2-й извлечённый билет будет выигрышным, если 1-й был выигрышным;

б) 3-й будет выигрышным, если предыдущие два билета были выигрышными;

в) 4-й будет выигрышным, если предыдущие билеты были выигрышными.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

А теперь обратим внимание на один принципиально важный момент: в рассмотренных примерах требовалось найти лишь условные вероятности, при этом***предыдущие события считались достоверно состоявшимися***. Но ведь в действительности и они являются случайными! Так, в предыдущей задаче извлечение червы из полной колоды – есть событие случайное, вероятность которого равна.

На практике гораздо чаще требуется отыскать вероятность***совместного появления*** зависимых событий. Как, например, найти вероятность события, состоящего в том, что из полной колодыбудетизвлечена черва**и**затем ещё одна черва? Ответ на этот вопрос даёт**теорема умножения вероятностей зависимых событий**:

*Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло*:

В нашем случае:– вероятность того, что из полной колоды будут извлечены 2 червы подряд.

Аналогично:– вероятность того, что сначала будет извлечена карта другой масти**и**затем черва.

Вероятность событияполучилась заметно больше вероятности события, что, в общем-то, было очевидно безо всяких вычислений.

И, само собой, не нужно питать особых надежд, что из конверта с десятью лотерейными билетами(Задача 2)вы вытяните 3 выигрышных билета подряд:

Да, совершенно верно – теорема умножения вероятностей зависимых событий естественным образом распространяется и на бо́льшее их количество.

Закрепим материал несколькими типовыми примерами:

**Задача 3**

В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу один за другим извлекают два шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что:

а) оба шара будут белыми;

б) оба шара будут чёрными;

в) сначала будет извлечён белый шар, а затем – чёрный.

Обратите внимание на уточнение «не возвращая их обратно». Этот комментарий дополнительно подчёркивает тот факт, что события зависимы. Действительно, а вдруг извлечённые шары возвращают обратно? В случае возвратной выборки вероятности извлечения чёрного и белого шара меняться не будут, а в такой задаче уже следует руководствоваться*теоремой умножения вероятностей независимых событий*.

**Решение**: всего в урне: 4 + 7 = 11 шаров:

а) Рассмотрим события*А*– первый шар будет белым,*В*– второй шар будет белым и найдём вероятность события, состоящего в том, что 1-й шар будет белым**и**2-й белым.

По классическому определению вероятности:. Предположим, что белый шар извлечён, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых, поэтому:– вероятность извлечения белого шара во 2-м испытании при условии, что до этого был извлечён белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

– вероятность того, что оба шара будут белыми.

б) Найдём вероятность события, состоящего в том, что 1-й шар будет чёрным**и**2-й чёрным

По классическому определению:– вероятность того, что в 1-м испытании будетизвлечён чёрный шар. Пусть извлечён чёрный шар, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 6 чёрных, следовательно:

– вероятность того, что во 2-м испытании будет извлечён чёрный шар при условии, что до этого был извлечен чёрный шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

– вероятность того, что оба шара будут чёрными.

в) Найдём вероятность события(сначала будет извлечён белый шар**и**затем чёрный).

После извлечения белого шара (с вероятностью) в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых и 7 чёрных, таким образом:– вероятность того, что во 2-м испытании будет извлечён чёрный шар при условии, что до этого был извлечен белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:– искомая вероятность.

**Ответ**:а) ; б) ; в) .

И сразу же проверьте, насколько хорошо вы усвоили изложенный материал:

**Задача 4**

Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут извлечены два туза подряд?

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Задача 5**

В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно извлекают три шара. Найти вероятность того, что

а) третий шар окажется белым, если до этого был извлечён черный и красный шар;

б) первый шар окажется черным, второй – красным и третий – белым.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

Наверное, все заметили, что зависимые события возникают в тех случаях, когда осуществляется некоторая цепочка действий. Однако сама по себе последовательность действий ещё не гарантируют зависимость событий. Пусть, например, студент наугад отвечает на вопросы какого-нибудь теста – данные события хоть и происходят одно за другим, но незнание ответа на один вопрос никак не зависит от незнания других ответов или совсем простой пример с неоднократным подбрасыванием монеты – этот процесс даже так и называется:*повторные независимые испытания.*

**Задача 6**

Из урны, в которой находится 6 белых и 4 черных шара, извлекаются наудачу один за другим три шара. Найти вероятность того, что:

а) все три шара будут черными;

б) будут не меньше двух шаров черного цвета.

**Решение**:всего: 6 + 4 = 10 шаров в урне.

а) Рассмотрим событие:*А*– все три шара будут черными.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

б) Рассмотрим событие:*C*– будет не меньше двух шаров черного цвета. Данное событие состоит в 2 несовместных исходах: либо все шары будут чёрными (событие*A*) либо 2 шара будут чёрным и 1 белым – обозначим последнее событие буквойB.

Событие*B*включается в себя 3 несовместных исхода:

в 1-м испытании извлечён белый**и**во 2-м**и**в 3-м испытаниях – чёрные шары**или**в 1-м испытании извлечён ЧШ**и**во 2-м – БШ**и**в 3-м – ЧШ**или**в 1-м испытании извлечён ЧШ**и**во 2-м – ЧШ**и**в 3-м – БШ.

По теоремам*сложения вероятностей несовместных*и умножения вероятностей зависимых событий:

– вероятность того, что среди трёх последовательно извлеченных шаров будет 2 чёрных и 1 белый шар.

По*теореме сложения вероятностей несовместных событий*:

– вероятность того, что среди трёх последовательно извлеченных шаров будет не менее двух черных.

**Ответ**:а) ; б) .

**Задача 7**

Из 20 экзаменационных билетов 3 содержат простые вопросы. Пять студентов по очереди берут билеты. Найти вероятность того, что хотя бы одному из них достанется билет с простыми вопросами

А почему бы и нет? Ситуация более чем реалистичная: представьте, начался экзамен, в аудиторию пригласили 5 человек. Проведите самостоятельное исследование – какова вероятность того, что хоть кому-то из этих пяти добровольцев повезёт с билетом?

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Задача 8**

В первой урне содержится 12 шаров, из них 7 белых, во второй – 6 шаров, из них 3 белых. Из первой урны во вторую наудачу перекладывают один шар, а затем из второй урны наудачу извлекают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

**Решение**:по условию, из первой урны во вторую наудачу перекладывают один шар, и, очевидно, он может быть как белым, так и чёрным. В этой связи необходимо рассмотреть 2 несовместные**гипотезы**:

– из 1-й урны во 2-ю будет переложен белый шар;– из 1-й урны во 2-ю будет переложен чёрный шар.

Обозначим через*A*зависимое событие – из 2-й урны будет извлечён белый шар.

Несовместные исходы удобно расписать по пунктам:

1) По классическому определению:– вероятность того, что из 1-й урны во вторую будет переложен белый шар. Пусть гипотезаосуществилась, тогда во второй урне стало 7 шаров, среди которых теперь 4 белых шара. Таким образом:– вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар при условии, что туда был переложен белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

– вероятность того, что во 2-ю урну будет переложен белый шар**и**после этого из 2-й урны будет извлечён белый шар.

2) По классическому определению:– вероятность того, что из 1-й урны во вторую будет переложен чёрный шар. Пусть гипотезаосуществилась, тогда во второй урне стало 7 шаров, среди которых по-прежнему 3 белых. Таким образом:– вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар при условии, что туда был переложен чёрный шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

– вероятность того, что из 1-й урны во 2-ю будет переложен чёрный шар**и**после этого из 2-й урны будет извлечён белый шар.

Подводим итог. По*теореме сложения вероятностей несовместных событий*:– вероятность того, что из 2-й урны будет извлечён белый шар.

**Ответ**:.

**Задача 9**

В первой урне находится 3 белых и 2 черных шара, во второй – 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую наудачу перекладывают 2 шара. Найти вероятность того, что из второй урны будет извлечён белый шар.

Для решения задания нужно рассмотреть 3 несовместные гипотезы, привлечь на помощь*комбинаторику*и воспользоваться типовой задачей на*классическое определение вероятности.*

А в заключение этой темы мы разберём прелюбопытнейшую задачу, даже не разберём, а проведём небольшое практическое исследование. Выкладки в общем виде будут слишком громоздкие, поэтому рассмотрим конкретный пример:

Петя сдаёт экзамен по теории вероятностей, при этом 20 билетов он знает хорошо, а 10 плохо. Предположим, в первый день экзамен сдаёт часть группы, например, 16 человек, включая нашего героя. В общем, ситуация до боли знакома: студенты один за другим заходят в аудиторию и тянут билеты.

Очевидно, что последовательное извлечение билетов представляет собой цепь зависимых событий, и возникает насущный**вопрос**: в каком случае Пете с бо́льшей вероятностью достанется «хороший» билет – если он пойдёт «в первых рядах», или если зайдёт «посерединке», или если будет тянуть билет в числе последних? Когда лучше заходить?

Сначала рассмотрим «экспериментально чистую» ситуацию, в которой Петя сохраняет свои шансы постоянными – он не получает информацию о том, какие вопросы уже достались однокурсникам, ничего не учит в коридоре, ожидая своей очереди, и т.д.

Рассмотрим событие:– Петя зайдёт в аудиторию самым первым и вытянет «хороший» билет. По классическому определению вероятности:.

Как изменится вероятность извлечения удачного билета, если пропустить вперёд отличницу Настю? В этом случае возможны две несовместные гипотезы:

– Настя вытянет «хороший» (для Пети) билет;– Настя вытянет «плохой» билет, т.е. увеличит шансы Пети.

Событие же(Петя зайдёт вторым и вытянет «хороший» билет) становитсязависимым.

1) Предположим, что Настя с вероятностью«увела» у Пети один удачный билет. Тогда на столе останутся 29 билетов, среди которых 19 «хороших». По классическому определению вероятности:.

2) Теперь предположим, что Настя с вероятностью«избавила» Петю от 1-го «плохого» билета. Тогда на столе останутся 29 билетов, среди которых по-прежнему 20 «хороших». По классическому определению:.

Используя теоремы сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей зависимых событий, вычислим вероятность того, что Петя вытянет «хороший» билет, будучи вторым в очереди:

Вероятность… осталась той же! Хорошо, рассмотрим событие:– Петя пойдёт третьим, пропустив вперёд Настю и Лену, и вытащит «хороший» билет.

Здесь гипотез будет побольше: дамы могут «обокрасть» джентльмена на 2 удачных билета, либо наоборот – избавить его от 2 неудачных, либо извлечь 1 «хороший» и 1 «плохой» билет. Если провести аналогичные рассуждения, воспользоваться теми же теоремами, то… получится такое же значение вероятности!

И так далее.

Таким образом, чисто с математической точки зрения, без разницы, когда идти – первоначальные вероятности останутся неименными.**НО**. Это только усреднённая теоретическая оценка, так, например, если Петя пойдёт последним, то это вовсе не значит, что ему останутся на выбор 10 «хороших» и 5 «плохих» билетов в соответствии с его изначальными шансами. Данное соотношение может варьироваться в лучшую или худшую сторону, однако всё же маловероятно, что среди билетов останется «одни хорошие», или наоборот – «одни плохие». Хотя «уникальные» случаи не исключены – всё-таки тут не 3 миллиона лотерейных билетов с практически нулевой вероятностью крупного выигрыша. Поэтому «невероятное везение» или «злой рок» будут слишком преувеличенными высказываниями.

Математика и «чистый эксперимент» – это хорошо, но какой стратегии и тактики всё же выгоднее придерживаться**в реальных условиях**? Безусловно, следует принять во внимание субъективные факторы, например, «скидку» преподавателя для «храбрецов» или его усталость к концу экзамена. Зачастую эти факторы могут быть даже решающими, но в заключительных рассуждениях не нужно сбрасывать со счетов и дополнительные вероятностные аспекты:

Если Вы готовы к экзамену хорошо, то, наверное, лучше идти «в первых рядах». Пока билетов полный комплект, постулат ***«маловозможные события не происходят»*** работает на Вас гораздо в бо́льшей степени. Согласитесь, что намного приятнее иметь соотношение «30 билетов, среди которых 2 плохих», чем «15 билетов, среди которых 2 плохих». А то, что два неудачных билета**на отдельно взятом экзамене*(***а не по средней теоретической оценке!)так и останутся на столе – вполне и вполне возможно.

Теперь рассмотрим «ситуацию Пети» – когда студент готов к экзамену достаточно хорошо, но с другой стороны, и «плавает» тоже неплохо. Иными словам, «больше знает, чем не знает». В этом случае целесообразно пропустить вперёд 5-6 человек, и ожидать подходящего момента вне аудитории. Действуйте по ситуации. Довольно скоро начнёт поступать информация, какие билеты вытянули однокурсники(снова зависимые события!**)**, и на «заигранные» вопросы можно больше не тратить силы – учите и повторяйте другие билеты, повышая тем самым первоначальную вероятность своего успеха. Если «первая партия» экзаменующихся «избавила» вас сразу от 3-4 трудных (лично для Вас) билетов, то выгоднее как можно быстрее попасть на экзамен – именно сейчас шансы значительно возросли. Постарайтесь не упускать момент – всего несколько пропущенных вперёд человек, и преимущество, скорее всего, растает. Если же наоборот, «плохих» билетов вытянули мало – ждите. Через несколько человек эта «аномалия» опять же с большой вероятностью, если не исчезнет, то сгладится в лучшую сторону. В «обычном» и самом распространённом случае выгода тоже есть: расклад «24 билета/8 плохих» будет лучше соотношения «30 билетов/10 плохих». Почему? Трудных билетов теперь не десять, а восемь! С удвоенной энергией штудируем материал!

Если Вы готовы неважно или плохо, то само собой, лучше идти в «последних рядах»(хотя возможны и оригинальные решения, особенно, если нечего терять). Существует небольшая, но всё же ненулевая вероятность, что Вам останутся относительно простые вопросы + дополнительная зубрёжка + шпаргалки, которые отдадут отстрелявшиеся сокурсники.

Какой можно сделать вывод? Субъективный оценочный принцип «кто идёт раньше, тот готов лучше» находит внятное вероятностное обоснование!

# ****Формула полной вероятности и формула Байеса****

Рассмотримзависимое событие*А*, которое может произойти лишь в результате осуществления одной из несовместных**гипотез**, которые образуют*полную группу*. Пусть известны их вероятностии соответствующие условные вероятности,. Тогда вероятность наступления события*A*равна:

Эта формула получила название**формулы полной вероятности**. В учебниках она формулируется теоремой, доказательство которой элементарно: согласно**алгебре событий**,(произошло событие***и***после него наступило событие*A****или***произошло событие***и***после него наступило событие*A****или***произошло событие***и***после него наступило событие*A****или***….произошло событие***и***после него наступило событие*A*). Поскольку гипотезынесовместны, а событие*A*– зависимо, то по*теореме сложения вероятностей несовместных* **событий**(первый шаг)и*теореме умножения вероятностей зависимых событий*(второй шаг)*:*

**Задача 1**

Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные шары. Наудачу выбирается одна урна и из неё наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что этот шар чёрный?

**Решение**: рассмотрим событие*A*– из наугад выбранной урны будет извлечён чёрный шар. Данное событие может произойти в результате осуществления одной из следующих гипотез:– будет выбрана 1-я урна;– будет выбрана 2-я урна;– будет выбрана 3-я урна.

Так как урна выбирается наугад, то выбор любой из трёх урн***равновозможен***, следовательно:.

Обратите внимание, что перечисленные гипотезы образуют**полную группу событий**, то есть по условию чёрный шар может появиться только из этих урн, а например, не прилететь с бильярдного стола. Проведём простую промежуточную проверку:.

В первой урне 4 белых + 7 черных = 11 шаров, по*классическому определению:*– вероятность извлечения чёрного шара***при условии***, что будет выбрана 1-я урна.

Во второй урне только белые шары, поэтому**в случае её выбора**появление чёрного шара становитсяневозможным:.

И, наконец, в третьей урне одни чёрные шары, а значит, соответствующая*условная вероятность*извлечения чёрного шара составит(событие достоверно).

По формуле полной вероятности:

– вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечен чёрный шар.

**Ответ**:.

**Задача 2**

В тире имеются 5 различных по точности боя винтовок. Вероятности попада­ния в мишень для данного стрелка соответственно равны 0,5; 0,55; 0,7; 0,75 и 0,4. Чему равна вероятность попадания в мишень, если стрелок делает один выстрел из слу­чайно выбранной винтовки?

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

В большинстве тематических задач гипотезы, конечно же, не равновероятны:

**Задача 3**

В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятой винтовки.

**Решение**: в этой задаче количество винтовок точно такое же, как и в предыдущей, но вот гипотезы всего две:– стрелок выберет винтовку с оптическим прицелом;– стрелок выберет винтовку без оптического прицела.По*классическому определению вероятности*:

Контроль:.

Рассмотрим событие:*А*– стрелок поразит мишень из наугад взятой винтовки.По условию:.

По формуле полной вероятности:

**Ответ**: 0,85

Следующая задача для самостоятельного решения:

**Задача 4**

Двигатель работает в трёх режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя равна 0,05, при нормальном режиме работы – 0,1, а при форсированном – 0,7. 70% времени двигатель работает в нормальном режиме, а 20% – в форсированном. Какова вероятность выхода из строя двигателя во время работы?

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

## *****Задачи на формулы Байеса*****

Материал тесно связан с содержанием предыдущего параграфа. Пусть событие*А*наступило в результате осуществления одной из гипотез. Как определить вероятность того, что имела место та или иная гипотеза?

**При условии**, что событие*А***уже произошло**, вероятности гипотезпереоцениваютсяпо формулам, которые получили фамилию английского священника Томаса Байеса:

– вероятность того, что имела место гипотеза;

– вероятность того, что имела место гипотеза;

– вероятность того, что имела место гипотеза.

На первый взгляд кажется полной нелепицей – зачем пересчитывать вероятности гипотез, если они и так известны? Но на самом деле разница есть:

– этоаприорные(оцененные**до**испытания) вероятности.

,–этоапостериорные(оцененные**после**испытания) вероятности тех же гипотез, пересчитанные в связи «со вновь открывшимися обстоятельствами» – с учётом того факта, что событие*A***достоверно произошло**.

Рассмотрим это различие на конкретном примере:

**Задача 5**

На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Первая часть**решения**состоит в использовании формулы полной вероятности. Иными словами, вычисления проводятся в предположении, что испытаниеещё не произведенои событие«изделие оказалось стандартным»пока не наступило.

Рассмотрим две гипотезы:– наудачу взятое изделие будет из 1-й партии;– наудачу взятое изделие будет из 2-й партии.

Всего: 4000 + 6000 = 10000 изделий на складе. По*классическому определению*:.

Контроль:

Рассмотрим зависимое событие:*A*– наудачу взятое со склада изделиебудетстандартным.

В первой партии 100% – 20% = 80% стандартных изделий, поэтому:– вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным**при условии**, что оно принадлежит 1-й партии.

Аналогично, во второй партии 100% – 10% = 90% стандартных изделий и– вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным**при условии**, что оно принадлежит 2-й партии.

По формуле полной вероятности:

– вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным.

Часть вторая. Пусть наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Эта фраза прямо прописана в условии, и она констатирует тот факт, что событие*A***произошло**.

По формулам Байеса:

а)– вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 1-й партии;

б)– вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 2-й партии.

Послепереоценкигипотезы, разумеется, по-прежнему образуют*полную групп:* (проверка)

**Ответ**:а) ; б)

Понять смысл переоценки гипотез нам поможет Иван Васильевич, которой снова сменил профессию и стал директором завода. Он знает, что сегодня 1-й цех отгрузил на склад 4000, а 2-й цех – 6000 изделий, и приходит удостовериться в этом. Предположим, вся продукция однотипна и находится в одном контейнере. Естественно, Иван Васильевич предварительно подсчитал, что изделие, которое он сейчас извлечёт для проверки, с вероятностьюбудет выпущено 1-м цехом и с вероятностью– вторым. Но после того как выбранное изделие оказывается стандартным, он восклицает: «Какой же классный болт! – его скорее выпустил 2-й цех».

Таким образом, вероятность второй гипотезы переоценивается в лучшую сторону, а вероятность первой гипотезы занижается:. И эта переоценка небезосновательна – ведь 2-й цех произвёл не только больше изделий, но и работает в 2 раза лучше!

Вы скажете, чистый субъективизм? Отчасти – да, более того, сам Байес интерпретировал *апостериорные* вероятности как **уровень доверия**. Однако не всё так просто – в байесовском подходе есть и объективное зерно. Ведь вероятности того, что изделие будет стандартным *(0,8 и 0,9 для 1-го и 2-го цехов соответственно)* это **предварительные**(априорные) и **средние** оценки. Но, выражаясь философски – всё течёт, всё меняется, и вероятности в том числе. Вполне возможно, что **на момент исследования**более успешный 2-й цех повысил процент выпуска стандартных изделий *(и/или 1-й цех снизил)*, и если проверить бо́льшее количество либо все 10 тысяч изделий на складе, то переоцененные значения, окажутся гораздо ближе к истине.

Кстати, если Иван Васильевич извлечёт нестандартную деталь, то наоборот – он будет больше «подозревать» 1-й цех и меньше – второй. Попробуйте убедиться в этом самостоятельно:

**Задача 6**

На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии 20%, во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось **не**стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Условие отличатся двумя буквами, которые выделены жирным шрифтом. Задачу можно решить с «чистого листа», или воспользоваться результатами предыдущих вычислений.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

Байесовская схема переоценки вероятностей встречается повсеместно, причём её активно эксплуатируют и различного рода мошенники. Рассмотрим ставшее нарицательным АО на три буквы, которое привлекает вклады населения, якобы куда-то их инвестирует, исправно выплачивает дивиденды и т.д. Что происходит? Проходит день за днём, месяц за месяцем и всё новые и новые факты, донесённые путём рекламы и «сарафанным радио», только повышают уровень доверия к финансовой пирамиде*(апостериорная байесовская переоценка в связи с произошедшими событиями!)*. То есть, в глазах вкладчиков происходит постоянное увеличение вероятности того, что*«это серьёзная организация»*; при этом вероятность противоположной гипотезы *(«это очередные аферисты»)*, само собой, уменьшается и уменьшается. Дальнейшее понятно. Примечательно, что заработанная репутация даёт организаторам время успешно скрыться от Ивана Васильевича, который остался не только без партии болтов, но и без копейки.

**Задача 7**

Электролампы изготавливаются на трех заводах. 1-й завод производит 30% общего количества ламп, 2-й – 55%, а 3-й – остальную часть. Продукция 1-го завода содержит 1% бракованных ламп, 2-го – 1,5%, 3-го – 2%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Купленная лампа оказалась с браком. Какова вероятность того, что она произведена 2-м заводом?

Заметьте, что в задачах на формулы Байеса в условии **обязательно** фигурирует некое **произошедшее** событие, в данном случае – покупка лампы.

Алгоритм точно такой же: на первом шаге находим вероятность того, что купленная лампа вообще окажетсябракованной.

Пользуясь исходными данными, переводим проценты в вероятности:– вероятности того, что лампа произведена 1-м, 2-м и 3-м заводами соответственно.Контроль:.

Аналогично:– вероятности изготовления бракованной лампы для соответствующих заводов.

По формуле полной вероятности:

– вероятность того, что купленная лампа окажется с браком.

Шаг второй. Пусть купленная лампа оказалась бракованной (событие произошло)

По формуле Байеса:

– вероятность того, что купленная бракованная лампа изготовлена вторым заводом

**Ответ**:.

Почему изначальная вероятность 2-й гипотезыпосле переоценки увеличилась? Ведь второй завод производит средние по качеству лампы (первый – лучше, третий – хуже). Так почему же возросла *апостериорная*вероятность, что бракованная лампа именно со 2-го завода? Это объясняется уже не «репутацией», а размером. Так как завод №2 выпустил самое большое количество ламп, то на него (по меньшей мере, субъективно) и пеняют:*«скорее всего, эта бракованная лампа именно оттуда»*.

Интересно заметить, что вероятности 1-й и 3-й гипотез, переоценились в ожидаемых направлениях и сравнялись:

Контроль:, что и требовалось проверить.

К слову, о заниженных и завышенных оценках:

**Задача 8**

В студенческой группе 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 19 человек – средний и 3 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,95; 0,7 и 0,4. Известно, что некоторый студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что:

а) он был подготовлен очень хорошо;

б) был подготовлен средне;

в) был подготовлен плохо.

Проведите вычисления и проанализируйте результаты переоценки гипотез.

Задача приближена к реальности и особенно правдоподобна для группы студентов-заочников, где преподаватель практически не знает способностей того или иного студента. При этом результат может послужить причиной довольно-таки неожиданных последствий *(особенно это касается экзаменов в 1-м семестре)*. Если плохо подготовленному студенту посчастливилось с билетом, то преподаватель с большой вероятностью сочтёт его хорошо успевающим или даже сильным студентом, что принесёт неплохие дивиденды в будущем *(естественно, нужно «поднимать планку» и поддерживать свой имидж)*. Если же студент 7 дней и 7 ночей учил, зубрил, повторял, но ему просто не повезло, то дальнейшие события могут развиваться в самом скверном ключе – с многочисленными пересдачами и балансировкой на грани вылета.

Что и говорить, репутация – это важнейший капитал, не случайно многие корпорации носят имена-фамилии своих отцов-основателей, которые руководили делом 100-200 лет назад и прославились своей безупречной репутацией.

Да, байесовский подход в известной степени субъективен, но… так устроена жизнь!

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

Закрепим материал заключительным индустриальным примером.

**Задача 9**

Три цеха завода производят однотипные детали, которые поступают на сборку в общий контейнер. Известно, что первый цех производит в 2 раза больше деталей, чем второй цех, и в 4 раза больше третьего цеха. В первом цехе брак составляет 12%, во втором – 8%, в третьем – 4%. Для контроля из контейнера берется одна деталь. Какова вероятность того, что она окажется бракованной? Какова вероятность того, что извлечённую бракованную деталь выпустил 3-й цех?

**Решение**: в отличие от Задач №№5-8 здесь в явном виде задан вопрос, который разрешается с помощью формулы полной вероятности. Но с другой стороны, условие немного «зашифровано», и разгадать этот ребус нам поможет школьный навык составлять простейшие уравнения. За «икс» удобно принять наименьшее значение:

Пусть*х*– доля деталей, выпускаемая третьим цехом.

По условию, первый цех производит в 4 раза больше третьего цеха, поэтому доля 1-го цеха составляет 4*х*.

Кроме того, первый цех производит изделий в 2 раза больше, чем второй цех, а значит, доля последнего:

Составим и решим уравнение:

Таким образом:– вероятности того, что извлечённая из контейнера деталь выпущена 1-м, 2-м и 3-м цехами соответственно.

Контроль:. Кроме того, будет не лишним ещё раз посмотреть на фразу«Известно, что первый цех производит изделий в 2 раза больше второго цеха и в 4 раза больше третьего цеха»и убедиться, что полученные значения вероятностей действительно соответствуют этому условию.

Из условия находим:– вероятности изготовления бракованной детали для соответствующих цехов.

По формуле полной вероятности:

– вероятность того, что наугад извлеченная из контейнера деталь окажется нестандартной.

Вопрос второй: какова вероятностьтого, что извлечённую бракованную деталь выпустил 3-й цех? Данный вопрос предполагает, что деталь уже извлечена, и она оказалось бракованной. Переоцениваем гипотезу по формуле Байеса:– искомая вероятность. Совершенно ожидаемо – ведь третий цех производит не только самую малую долю деталей, но и лидирует по качеству!

**Ответ**:

# ****Независимые испытания и формула Бернулли****

Что такое**независимые испытания**? Практически всё понятно уже из самого названия. Пусть производится несколько испытаний. Если вероятность появления некоего события*A*в каждом из них**не зависит**от исходов остальных испытаний, тоимеют место **повторныенезависимые испытания**– когда они осуществляются друг за другом.

Простейшие примеры:

– монета подбрасывается 10 раз;

– игральная кость подбрасывается 20 раз.

Совершенно ясно, что вероятность выпадения орла либо решки в любом испытании не зависит от результатов других бросков. Аналогичное утверждение, естественно, справедливо и для кубика.

А вот последовательное извлечение карт из колоды не является серией независимых испытаний – как вы помните, это цепочка*зависимых событий*. Однако если карту каждый раз возвращать обратно, то ситуация станет «такой, какой надо».

**Задача 1**

Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна*p*. Найти вероятность того, что:

а) стрелок попадёт только один раз;

б) стрелок попадёт 2 раза.

**Решение**: условие сформулировано**в общем виде**и вероятность попадания в мишень при каждом выстрелесчитается известной. Она равна*p.*

Коль скоро, мы знаем*p*, то легко найти вероятность промаха в каждом выстреле:, то есть, *q* – это тожеизвестная нам величина.

а) Рассмотрим событие«Стрелок попадёт только один раз»и обозначим его вероятность через(индексы понимаются как «одно попадание из четырёх»). Данное событие состоит в 4 несовместных исходах: стрелок попадёт в 1-й**или**во 2-й**или**в 3-й**или**в 4-й попытке.

По*теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий*:.

Упростим результат с помощью комбинаторной**формулы количества сочетаний**:способами можно выбрать попытку, в которой стрелок попал.

И, поскольку в каждом случае имеет место 1 попадание и 3 промаха, то:– вероятность того, что стрелок попадёт только один раз из четырёх

б) Рассмотрим событие«Стрелок попадёт два раза»и обозначим его вероятность через(«два попадания из четырёх»). Здесь вариантов становится больше, попадания возможны:

в 1-й и 2-й попытках**или**в 1-й и 3-й попытках**или**в 1-й и 4-й попытках**или**во 2-й и 3-й попытках**или**во 2-й и 4-й попытках**или**в 3-й и 4-й попытках.

Таким образом, по тем же**теоремам сложения и умножения вероятностей**:.

Можно ли так решать задачу? Безусловно, можно. Но что делать, если серия состоит из 5, 6 или бо́льшего количества выстрелов? Тут уже будут получаться десятки слагаемых, запись которых отнимет много времени и места. В этой связи рациональнее придерживаться более компактной схемы:

способами(перечислены выше)можно выбрать 2 попытки, в которых произойдут попадания.

И, поскольку в любом исходе ровно 2 попадания и 2 промаха, то:

– вероятность того, что стрелок попадёт 2 раза из 4.

**Ответ**:а) ; б)

Итак – вероятность того, что будет 1 попадание из 4, равна, вероятность того, что будет 2 попадания из 4, равна… не замечаете ли вы закономерности?

Только что на конкретном примере мы повторили путь Якоба Бернулли, который несколько веков назад вывел формулу, названную позже в его честь:

Вероятностьтого, что**вnнезависимых испытаниях**некоторое случайное событие*A*наступит**ровноmраз**, равна:, где:

*p*– вероятность появления события*A*в каждом испытании;*q*=1-*p*– вероятность непоявления события*A*в каждом испытании.

Коэффициентчасто называют**биномиальным коэффициентом**.

**Задача 2**

Найти вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет 3 раза.

**Решение**: сначала немного порассуждаем: всего проводится 10 повторных независимых испытаний. Сколькими способами можно выбрать 3 испытания, в которых выпадет орёл?способами!

Используем формулу Бернулли:, в данном случае:

*n* =10 – всего испытаний;*m* =3 – количество испытаний, в которых должен появиться орёл;– вероятность появления орла в каждом испытании;– вероятность появления решки в каждом испытании.

Таким образом:– вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет ровно 3 раза.

**Ответ**:

Следует отметить, чтоповторный характернезависимых испытаний не являетсянеобходимым условием для применения формулы Бернулли. Рассмотрим похожую задачу:

Найти вероятность того, что при броске 10 монет орёл выпадет на 3 монетах.

Здесь испытания не повторяются, а скорее, производятся одновременно, но, тем не менее, работает та же самая формула:.

Решение будет отличаться смыслом и некоторыми комментариями, в частности:способами можно выбрать 3 монеты, на которых выпадет орёл– вероятность выпадения орла на каждой из 10 монети т.д.

Однако на практике подобные задачи встречаются не столь часто, и, видимо, по этой причине формула Бернулли чуть ли не стереотипно ассоциируется только с повторными испытаниями. Хотя, как только что было показано, повторяемость вовсе не обязательна.

Следующая задача для самостоятельного решения:

**Задача 3**

Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков:

а) не выпадут(выпадут 0 раз);

б) выпадут 2 раза;

в) выпадут 5 раз.

Результаты округлить до 4 знаков после запятой.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

Очевидно, что в рассматриваемых примерах некоторые события более вероятны, а некоторые – менее вероятны. Так, например, при 6 бросках кубика даже безо всяких расчётов интуитивно понятно, что вероятности событий пунктов «а» и «б» значительно больше вероятности того, что «пятёрка» выпадет 5 раз. А теперь поставим задачу найти

### *****Наивероятнейшее число появлений событияAвnнезависимых испытаниях*****

Опять же на уровне интуиции в Задаче №3 можно сделать вывод о том, что наивероятнейшее количество появлений «пятёрки» равно единице – ведь всего граней шесть, и при 6 бросках кубика каждая из них должна выпасть всреднем по одному разу. Желающие могут вычислить вероятностьи посмотреть, будет ли она больше «конкурирующих» значенийи.

**Сформулируем строгий *критерий***: для отыскания наивероятнейшего числапоявлений случайного события*A*в*n*независимых испытаниях(с вероятностью*p*в каждом испытании)руководствуются следующим двойным неравенством:, причём:

1) если значение– дробное, то существует единственное наивероятнейшее число;в частности, если– целое, то оно и есть наивероятнейшее число:;

2) если же– целое, то существуют**два**наивероятнейших числа:и.

Наивероятнейшее число появлений «пятёрки» при 6 бросках кубика подпадает под частный случай первого пункта:.

**Задача 4**

Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадёт в корзину, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при 8 бросках и соответствующую вероятность.

**Решение**: для оценки наивероятнейшего числа попаданий используем двойное неравенство. В данном случае:

*n* =8– всего бросков;*p*=0,3– вероятность попадания в корзину при каждом броске;*q*=1-*p*=1- 0,3=0,7 – вероятность промаха при каждом броске.

Таким образом, наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках находится в следующих пределах:

.

Поскольку левая граница – дробное число(пункт №1), то существует единственное наивероятнейшее значение, и, очевидно, что оно равно.

Используя формулу Бернулли, вычислим вероятность того, что при 8 бросках будет ровно 2 попадания:

**Ответ**:– наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках,– соответствующая вероятность.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

**Задача 5**

Монета подбрасывается 9 раз. Найти вероятность наивероятнейшего числа появлений орла

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

А сейчас весьма любопытная ситуация: предположим, что во всех 9 испытаниях выпал орёл. Это, кстати, не являются каким-то уж сильно невероятным событием:.

**Вопрос**: какая сторона монеты вероятнее всего выпадет в 10-м испытании?

Решка? Глубокое заблуждение!

**Правильный ответ**: вероятности останутся равными! Почему? Причина была сформулирована ещё в самом начале данной темы: поскольку испытания**независимы**, то вероятность выпадения орла либо решкив любом испытании**не зависит от результатов других испытаний**!

Однако игры разума таковы, что у многих людей напрашивается следующий вывод: «раз орёл выпал много раз подряд, то теперь выпадение решки**гораздо (!)**вероятнее». В теории и на практике этот психологический феномен получил название «Ошибка игрока». Если подбрасывать монету тысячи, десятки тысяч раз, то соотношение орлов/решек будет примерно равным. Но в этом процессе неоднократно встретятся эпизоды, когда монету «заклинит» на какой-то одной грани; и КАК ИМЕННО распределятся эти «необычные» случаи на длинной дистанции – никто не знает.

К слову, о «необычности». Любая случайная последовательность девяти орлов/решек**так же вероятна**, как и выпадение 9 орлов! Проверить данный факт легче лёгкого: запишем произвольную последовательность исходов, например:Орёл/Решка/Решка/ Орёл /Решка/ Орёл /Решка/ Орёл /Орёл

По*теореме умножения вероятностей независимых событий*, вероятность появления этой цепочки:, что в точности равно вероятности выпадения девяти орлов!

И здесь мы сталкиваемся со второй иллюзией – человек склонен считать «красивые» комбинации чем-то из ряда вон выходящим и чуть ли не фантастическим. Но на самом деле ничего «необычного», например, в комбинацииО/О/О/Р/Р/Р/О/О/О– нет, и она может запросто появиться в серии испытаний. Вероятность получить, скажем, пиковый «Ройял-флеш» в покересоставляет 1:2598960, однако мало кто задумывается, что**с той же вероятностью**приходит ЛЮБАЯ, в том числе, совершено «мусорная» комбинация из пяти карт! И с этой точки зрения «сверхъестественная» комбинация 10, В, Д, К, Т пикничем не примечательна – встречалась «в истории» наряду с другими очень много раз.

Кстати, к теме нашего разговора относятся и типичные ситуации в карточных играх – когда «карта идёт» и наоборот – когда «постоянно сдают один мусор» или «фатально не везёт». Такие «полосы» бывают у каждого игрока, и никакой мистики в этом нет.

На просторах Интернета часто встречается популярный «секрет выигрыша» в рулетку, также известный под названием «Мартингейл». Примерная суть состоит в следующем:«Ставьте на красное. Если выпало чёрное, удваивайте ставку и снова ставьте на красное. Если снова выпало чёрное, то ещё раз удваивайте ставку и снова ставьте на красное и т.д.». Казалось бы – вот оно, золотое дно, ведь красных секторов целых 18 из 37(18 черных и 1 зеро в европейской рулетке)! И уж «красное» должно выпасть если не на 5-й, то на 10-й раз точно, что позволит отыграть всё ранее поставленное с прибылью!

Ничего подобного! Вероятность выпадения красного сектора в любом испытаниипостояннаи никак не зависит от результатов предыдущих испытаний. Постоянна –**и проигрышна**(т.к. поставленные на «красное» деньги с вероятностьюпроигрываются, а в случае успеха – всего лишь удваиваются). Длинные серии «чёрного» вполне вероятны, и, кроме того, чтобы отыграть маленькую первоначальную ставку, игрок часто рискует куда более значительными суммами. Результат предсказуем. Поэтому данный «секрет», как и все остальные системы игры в рулетку – не работает. Заведению даже не надо как-то «подкручивать алгоритмы» или ограничивать игроков в размере ставок(хотя, как правило, существует ограничение на размер депозита).

После увлекательного отступления рассмотрим ещё несколько задач.

**Задача 6**

Среди изделий, произведенных на станке-автомате, в среднем бывает 60% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет:

а) от 2 до 4 изделий первого сорта;

б) не менее 5 изделий первого сорта;

в) хотя бы одно изделие более низкого сорта.

Вероятность производства первосортного изделия не зависит от качества других выпущенных изделий, поэтому здесь идёт речь о независимых испытаниях.

**Решение**: вероятность зашифрована под проценты, которые, нужно разделить на сто:– вероятность того, что выбранное изделие будет 1-го сорта.Тогда:– вероятность того, что оно не будет первосортным.

а) Событие«Среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта»состоит в трёх несовместных исходах:

среди*n*=6 изделий будет 2 первосортных**или**3 первосортных**или**4 первосортных.

Трижды используем формулу Бернулли:

По*теореме сложения вероятностей несовместных событий*:

– вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта.

б) Событие «Среди 6 наудачу отобранных изделий будет не менее 5 изделий первого сорта»состоит в 2 несовместных исходах: первосортных изделий будет пять**или**шесть.

По*теореме сложения вероятностей несовместных событий*:

– искомая вероятность.

в) Вероятность того, что«Среди 6 наудачу отобранных изделий будет хотя бы одно изделие более низкого сорта»удобно найти через***вероятность противоположного события***(«Все изделия будут первосортными»), которая уже известна:– вероятность того, что среди шести отобранных изделий окажется хотя бы одно низкосортное.

**Ответ**:а) б) в)

**Задача 7**

Производится 8 выстрелов по цели, в каждом из которых вероятность попадания равна 0,1. Найти вероятность того, что цель будет поражена хотя бы два раза.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Задача 8**

Для нормальной работы вычислительного центра необходима безотказная работа в течение дня, как минимум, 5 компьютеров. Сколько компьютеров нужно устано­вить, чтобы с вероятностью, не меньшейобеспечить нормальную работу центра, если вероятность отказа компьютера в течение дня равна 0,05?

**Решение**: из условия легко найти, что вероятность безотказной работы любого компьютера в течение дня составляет. Однако сам вопрос поставлен нетривиально – сколько компьютеров нужно установить? Иными словами, в формуле Бернуллинам не известно значение *n*.

Поскольку для нормальной работы центра необходима безотказная работа,***как минимум, 5 компьютеров***, то может быть пяти и хватит?

1) Если в вычислительном центре установить*n*=5 компьютеров, то в течение дня безотказно должны работать они все. По формуле Бернулли:

Но по условию нормальную работу центра нужно обеспечить**с*вероятностью, не меньшей, чем*!**А полученная нами вероятностьбезотказной работы всех пяти компьютеров – заметно меньше. Значит, необходимо увеличить количество машин:

2) Предположим, что в вычислительном центре установлено*n*=6 компьютеров. Тогда для нормальной его работы в течение дня безотказно должны работать 5 или 6 компьютеров.

По*теореме сложения вероятностей несовместных событий*:

– вероятность того, что в течение дня безотказно будут работать, как минимум, 5 компьютеров из шести.

Данное значение нас тоже не устроит, так как оно меньше требуемой надёжности работы вычислительного центра:.

Таким образом, шести компьютеров тоже не достаточно. Добавляем ещё один:

3) Пусть в вычислительном центре*n*=7 компьютеров. Тогда безотказно должны работать 5, 6 или 7 компьютеров. Используя формулу Бернулли и*теорему сложения вероятностей несовместных событий*, найдём вероятность того, что в течение дня безотказно будут работать, как минимум, 5 компьютеров из семи:

Требуемый уровень надёжности достигнут.

Можно, конечно, поставить и бо́льшее количество компьютеров, но зачем переплачивать?

**Ответ**: чтобы обеспечить нормальную работу вычислительного центра в течение дня с вероятностью, не меньшей, нужно установить не менее семи компьютеров.

**Асимптотические формулы в схеме Бернулли**

Формула Бернулли очень удобна, но с другой стороны, обладает и рядом недостатков. Так, например, при достаточно больших значениях *n* и *m* её применение затруднено ввиду огромных значений факториалов. В этом случае используют**теоремы Лапласа.** Другая распространённая на практике ситуация – когда вероятность*p*некоторого события в отдельно взятом испытании достаточно мала, а количество испытаний*n*велико. Вопрос разрешается с помощью**формулы Пуассона**.

***Формула Пуассона***

, где

Эта формула дает удовлетворительное приближение для и . События, для которых применима формула Пуассона, называютредкими, так как вероятность их осуществления очень мала (обычно порядка 0,001-0,0001). Функция затабулирована, т.е. имеет таблицу значений (см. ПРИЛОЖЕНИЕ 2).

Рассмотрим примеры решения задач с использованием формулы Пуассона:

**Задача 1**

Пусть известно, что при изготовлении некоторого препарата брак (количество упаковок, не соответствующих стандарту) составляет 0,2%. Оценить приближенно вероятность того, что среди 1000 наугад выбранных упаковок окажутся три упаковки, не соответствующие стандарту.

**Решение:** Выбор каждой очередной упаковки можно рассматривать как независимое испытание. Из условий задачи следует, что *n*=1000 (т.е. велико) а p=0,002 (т.е. мало) следовательно, А можно считать редким событием. λ=np=1000•0,002=2<10.

Воспользуемся приближенной формулой Пуассона или таблицей.

По таблице: находим ячейку пересечения столбца λ=2 и строки *m*=3.

**Ответ:**

**Задача 2**

Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути 0,004. Найти вероятность того, что в пути повреждено меньше трех изделий.

**Решение:**По условию дано:.

По теореме сложения вероятностей:

**Ответ:**

**Задача 3**

Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит более двух разбитых бутылок.

**Решение:**По условию дано:.

Получаем:

**Ответ:**

Формула Пуассона нашло широкое применение в **теории массового обслуживания**для вероятностной характеристики простейшегопотока событий. Более подробно:

Пусть в некоторую систему поступают заявки (телефонные звонки, приходящие клиенты и т.д.). Поток заявок называют простейшим, если он удовлетворяет условиям стационарности, отсутствия последствий и ординарности. Стационарность подразумевает то, что интенсивность заявок постояннаи не зависит от времени суток, дня недели или других временных рамок. Иными словами, не бывает «часа пик» и не бывает «мёртвых часов». Отсутствие последствий означает, что вероятность появления новых заявок не зависит от «предыстории». И, наконец, свойство ординарности характеризуется тем, что за достаточно малый промежуток времени *практически невозможно*появление двух или большего количества заявок.

Итак, пусть в некоторую систему поступает простейший поток заявок со средней интенсивностьюзаявок в минуту (в час, в день или в произвольный промежуток времени). Тогда вероятность того, что за данный промежуток времени, в систему поступит ровно*m*заявок, равна:

**Пример 4**

Звонки в диспетчерскую такси представляет собой простейший пуассоновский поток со средней интенсивностью 30 вызовов в час. Найти вероятность того, что: а) за 1 мин. поступит 2-3 вызова, б) в течение пяти минут будет хотя бы один звонок.

**Решение**: используем формулу Пуассона:

а) Учитывая стационарность потока, вычислим среднее количество вызовов за 1 минуту:вызова – в среднем за одну минуту.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:– вероятность того, что за 1 минуту в диспетчерскую поступит 2-3 вызова.

б) Вычислим среднее количество вызов за пять минут:

По формуле Пуассона:– вероятность того, что в течение 5 минут не будет ни одного звонка.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

– вероятность того, что в течение 5 минут будет хотя бы один вызов.

**Ответ**: а), б)

Заметьте, что, несмотря наконечноеколичество возможных звонков (а оно в принципе конечно), здесь имеет место именно распределение Пуассона, а не какое-то другое.

Для самостоятельного решения:

**Пример 5**

Среднее число автомобилей, проходящих таможенный досмотр в течение часа, равно 3. Найти вероятность того, что: а) за 2 часа пройдут досмотр от 7 до 10 автомобилей; б) за полчаса успеет пройти досмотр только 1 автомобиль.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

# *****Локальная и интегральная теоремы Лапласа*****

Локальная и интегральная теоремы Лапласа (Муавра-Лапласа) решают аналогичную с формулой Бернулли задачу с тем отличием, что они применимы к достаточно большому количеству независимых испытаний. Рассмотрим демонстрационный пример:

Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет 200 раз.

По характерным признакам здесь следует применить*формулу Бернулли*.

Применительно к нашей задаче:

*n* =400 – общее количество испытаний;

*m*= 200 – количество бросков, в которых должен выпасть орёл;

*p*= 0,5– вероятность выпадения орла в каждом броске;

q = 0,5 – вероятность выпадения решки.

Таким образом, вероятность того, что в результате 400 бросков монеты орёл выпадет ровно 200 раз:

.

И сразу возникает вопрос: как вычислить это выражение? Не всякий микрокалькулятор справится с 400-й степенью и такими факториалами. Поэтому пользоваться формулой Бернулли в данном примере не рационально. На помощь придёт:

## *****Локальная теорема Лапласа*****

Если вероятность*p*появления случайного события*A*в каждом испытании постоянна, то вероятностьтого, что в*n*испытаниях событие*A*наступит ровно*m*раз, приближённо равна:

Функция называется функцией Гаусса. Ее значения давно вычислены и занесены в таблицу, которой можно пользоваться даже на контрольных работах и экзаменах (см. ПРИЛОЖЕНИЕ 3).

Функция Гаусса обладает двумя свойствами, которые следует учитывать при работе с таблицей значений:

*φ(−x) = φ(x)* — функция Гаусса — четная;

При больших значенияхxимеем:*φ(x) ≈ 0*.

При этом, чем больше*n*, тем рассчитанная вероятностьбудет лучше приближать точное значению, полученное(хотя бы гипотетически)по формуле Бернулли. Рекомендуемое минимальное количество испытаний – примерно 50-100, в противном случае результатможет оказаться далёким от истины. Кроме того, локальная теорема Лапласа работает тем лучше, чем вероятность*p*ближе к 0,5, и наоборот – даёт существенную погрешность при значениях*p*, близких к нулю либо единице. По этой причине ещё одним критерием эффективного использования формулы

является выполнение неравенства.

Вернёмся к решению примера.

**Задача 1**

Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:а) 200 раз;б) 225 раз.

а) Найдём вероятность того, что в серии из 400 бросков орёл выпадет ровно*m*= 200 раз. Ввиду большого количества испытаний используем локальную теорему Лапласа:

На первом шаге вычислим требуемое значение аргумента:

Далее находим соответствующее значение функции: по таблице значений (см. ПРИЛОЖЕНИЕ 3):

На заключительном этапе применим формулу

:– вероятность того, что при 400 бросках монеты орёл выпадет ровно 200 раз.

б) Найдём вероятность того, что в серии из 400 испытаний орёл выпадет ровно*m*= 225 раз. Используем локальную теорему Лапласа:

– искомая вероятность.

**Ответ**: а)

Следующая задача для самостоятельного решения.

**Задача 2**

Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно: а) 40 мальчиков, б) 50 мальчиков, в) 30 девочек.

Результаты округлить до 4 знаков после запятой.

Интересно тут звучит словосочетание «независимые испытания». Кстати, реальнаястатистическая вероятностьрождения мальчика во многих регионах мира колеблется в пределах от 0,51 до 0,52.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

Отметим, что числа получаются достаточно малыми, и это не должно вводить в заблуждение – ведь речь идёт о вероятностях отдельно взятых,локальныхзначениях (отсюда и название теоремы). А таковых значений много, и, образно говоря, вероятности «должно хватить на всех». Правда, многие события будут*практически невозможными*.

Всё вышесказанное можно проиллюстрировать на примере с монетами: в серии из четырёхсот испытаний орёл теоретически может выпасть от 0 до 400 раз, и данные события образуют*полную группу*:

Однако бо́льшая часть этих значений представляет собой сущий мизер, так, например, вероятность того, что орёл выпадет 250 раз – уже одна десятимиллионная:.

С другой стороны, не следует недооценивать и скромные результаты: еслисоставляет всего около 0,00175, то вероятность того, орёл выпадет, скажем,от 220 до 250 раз, будет весьма заметна.

А теперь задумаемся: как вычислить данную вероятность? Не считать же по*теореме сложения вероятностей несовместных событий*сумму:

Гораздо проще эти значенияобъединить. А объединение чего-либо, как вы знаете, называется*интегрированием*:

## *****Интегральная теорема Лапласа*****

Если вероятность*p*появления случайного события*A*в каждом испытании постоянна, то вероятностьтого, что в*n*испытаниях событие*A*наступит**не менееи не болеераз**(отдораз включительно), приближённо равна:

При этом количество испытаний, разумеется, тоже должно быть достаточно большими вероятность*p*не слишком мала/велика(ориентировочноnpq>10), иначе приближение будет плохим.

Функцияназывается**функцией Лапласа**, и её значения опять же сведены в стандартную таблицу (см. ПРИЛОЖЕНИЕ 4).

Функция Лапласа*нечётна*:, и

**Задача 1**

Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

**Решение**: в данной задаче речь идёт о*повторных независимых испытаниях*, причём их количество достаточно велико. По условию требуется найти вероятность того, что мишень будет поражена не менее 65, но и не более 80 раз, а значит, нужно использовать интегральную теорему Лапласа:

Запишем исходные данные задачи:

*n=100*– всего выстрелов;

– минимальное число попаданий;

– максимальное число попаданий;

*p=0,7*– вероятность попадания в мишень при каждом выстреле;

*q=1-p=0,3*– вероятность промаха при каждом выстреле.

, следовательно, теорема Лапласа даст хорошее приближение.

Вычислим значения аргументов:

Значения функциинайдём по таблице*:(см. ПРИЛОЖЕНИЕ 4)*

– вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

**Ответ**:

Для самостоятельного решения:

**Задача 2**

В здании имеется 2500 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что вечером будет включено не менее 1250 и не более 1275 ламп.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

**Задача 3**

В институте обучается 1000 студентов. В столовой имеется 105 посадочных мест. Каждый студент отправляется в столовую на большой перемене с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что в обычный учебный день:

а) столовая будет заполнена не более чем на две трети;

б) посадочных мест на всех не хватит.

Обратим внимание на существенную оговорку «в ОБЫЧНЫЙ учебный день» – она обеспечивает относительную неизменность ситуации. После праздников в институт может прийти значительно меньше студентов, а на «День открытых дверей» нагрянуть голодная делегация. То есть, в «необычный» день вероятности будут заметно отличаться.

**Решение**: используем интегральную теорему Лапласа

,

В данной задаче:*n=1000*– всего студентов в институте;

*p=0,1*– вероятность того, что студент отправится в столовую на большой перемене;*q=1-p=1-0,1=0,9*– вероятность противоположного события.

а) Вычислим, сколько посадочных мест составляют две трети от общего количества:мест.

Найдём вероятность того, что в обычный учебный день столовая будет заполнена не более чем на две трети. Что это значит? Это значит, что на большой перемене придут от 0 до 70 человек. То, что никто не придёт или придут всего несколько студентов – есть события*практически невозможные*, однако в целях применения интегральной теоремы Лапласа эти вероятности все равно следует учесть. Таким образом:

Вычислим соответствующие аргументы:

В результате:– вероятность того, что в обычный учебный день столовая будет заполнена не более чем на две трети.

**Напоминание**: прифункцию Лапласа считаем равной.

б) Событие«Посадочных мест на всех не хватит»состоит в том, что в столовую на большой перемене придут обедать от 106 до 1000 человек. Понятно, что высокая посещаемость невероятна, но тем не менее:

.

Рассчитываем аргументы:

Таким образом, вероятность того, что посадочных мест на всех не хватит:

**Ответ**:а) , б)

Пример для самостоятельного решения:

**Задача 4**

В обычный учебный день вероятность присутствия студента на лекции равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 студентов на лекции будут присутствовать:

а) 85-90%;б) половина студентов;в) не менее 72 студентов.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

## ****Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности****

Вероятность того, что вnнезависимых испытанияхотносительная частотасобытия*A*отклонится от вероятности*p*(появления данного события в каждом испытании)не более чем наε, приблизительно равна:

где–*функция Лапласа*.

Собственно, эта формула и выведена из*интегральной теоремы Лапласа*.

Итак, имеется вероятность*p*наступления события*A*, которая предварительно получена с помощью классического/геометрического определения или посредством серьёзной статистической оценки. Планируется провести*n*независимых испытаний, в которых событие*A*может наступить некоторое количество раз, причём значение*m*, разумеется, предсказать нельзя. Полученная относительная частотаможет оказаться как больше, так и меньше вероятности*p*(поэтому нужен знак модуля).

Требуется найти вероятность того, что в серии из*n*независимых испытаний, расхождение между относительной частотой и теоретической вероятностью, будет не больше, чем заранее заданное число, например, не больше, чем(один процент).

**Задача 1**

В некотором регионе в результате многолетнего статистического исследования установлена вероятность рождения мальчика*p=0,52*. С какой вероятностью можно утверждать, что среди следующей тысячи новорожденных, относительная частота появления мальчика отклонится от соответствующей вероятности не более чем на 0,02?

**Решение**: используем формулу

По условию:*p=0,52, n=1000, ε=0,02*

Таким образом:

– искомая вероятность. (Значения функции Лапласа находим в соответствующей таблице в ПРИЛОЖЕНИИ 4).

**Ответ**:.

Каков смысл полученного результата? Если рассмотреть достаточно много групп по 1000 новорожденных в каждой, то примерно в 79,6% этих групп доля мальчиков будет находиться в пределах:

Или, умножая все три части на тысячу: от 500 до 540 мальчиков.

На самом деле рассмотренная задача эквивалентна следующей:«Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных будет от 500 до 540 мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,52». А эта задача как раз и решается через известную вам*интегральную теорему Лапласа*.

Задачи для самостоятельного решения:

**Задача 2**

Производится некоторый опыт, в котором случайное событие*А*может появиться с вероятностью 0,6. Опыт повторяют в неизменных условиях 800 раз. Определить вероятность того, что в 800 независимых испытаниях относительная частота появления события*А*отклонится от вероятности не более чем: а) на 0,05, б) на 0,03

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

**Задача 3**

Вероятность выигрыша в лотерею равна 0,3. Продано 600000 билетов. Найти вероятность того, что относительная частота выигрыша отклонится от вероятности выигрыша не более чем на ε=0,001.*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

**Задача 4**

Вероятность выигрыша в лотерею равна 0,3. Сколько билетов должно участвовать в розыгрыше, чтобы с вероятностью не меньшей чем γ=0,99, можно было ожидать, что относительная частота выигрыша отклонится от теоретической вероятности не более чем на ε=0,001?

**Решение**: используем ту же формулу.

В нашем распоряжении находятся следующие величины:

По условию, требуется найти такое количество билетов*n*, чтобы с вероятностьюне меньшейчемразницасоставила не более чем. А так как по условию задачи вероятность должна быть «не меньшей», то получим нестрогое неравенство:.

Подставляем известные значения:, откуда .

Потаблице значений функцииФ(х) по известному значению функцииФ(х)=0,495 находим соответствующий аргумент:*х=2,58*. Таким образом:.Возведём обе части в квадрат:, тогда

И окончательно:

**Ответ**: для того, чтобы с вероятностью не меньшей чем, можно было ожидать, что, в розыгрыше должно участвовать**не менее 1397844 билетов**.

Задача для самостоятельного решения;

**Задача 5**

Проводится некоторый опыт, в котором случайное событие*А*может появиться с вероятностью 0,4. Определить, сколько опытов нужно провести, чтобы с вероятностью большей, чем 0,9 можно было ожидать отклонения относительной частоты появления события*А*от*р=0,4*не более чем на 0,05

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

# ****РАЗДЕЛ II****

# ****Случайные величины. Дискретная случайная величина.****

**Случайной** называют величину, которая в результате испытания примет **одно и только одно**числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают**черезX, Y, Z.

Примеры:

*X*– количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет***одна и только***грань, какая именно – не предсказать(фокусы не рассматриваем); при этом случайная величина*Х*может принять одно из следующий значений: 1,2,3,4,5,6.

*Y*– количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться: 0,1,2,3 …9, либо 10 мальчиков –***один и только один***из перечисленных вариантов.

*Z*– дальность прыжка в длину(в некоторых единицах).Её не в состоянии предугадать даже мастер спорта.Случайная величина*Z*может принятьбесконечно многозначений из некоторого промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы:**

1) Дискретная(прерывная)случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значенийконечнолибо бесконечно, но счётно.

2) Непрерывная случайная величина – принимает**все**числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

**Примечание**: в учебной литературе популярны аббревиатуры ДСВ и НСВ

## *Закон (ряд) распределения дискретной случайной величины*

– этосоответствиемежду возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *….* | *xn* |
| *p1* | *p2* | *p3* | *…* | *pn* |

Так как случайная величина*Х*обязательнопримет**одно из значений:** *x1, x2,x3,… xn* то соответствующие события образуют **полную группу**и сумма вероятностей их наступления равна единице:*p1+ p2+ p3+…+ pn=1*или

Так, например, ряд распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *pi* |  |  |  |  |  |  |

**Пример 1**

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | -5 | 2,5 | 10 |
| *pi* |  |  |  |

Найти.

**Решение**: так как случайная величина*X*может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуютполную группу, а значит, сумма их вероятностей равна единице:

*p1+ p2+ p3=10,5+ p2+ 0,1=1p2=1-0,6=0,4*

**Ответ**:0,4.

**Пример 2**

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины*X*– размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

**Решение**: как вы заметили, значения случайной величины принято располагать впорядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно*x1=0* рублей.

Всего таковых билетов 50 – 12 = 38, и по**классическому определению**:

– вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша*x2=100* рублей составляет:. И для*x3=1000*

Проверка:*p1+ p2+ p3=0,76+0,2+0,04=1.*

**Ответ**: искомый закон распределения выигрыша:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 100 | 1000 |
| *pi* |  |  |  |

Следующее задание для самостоятельного решения:

**Пример 3**

Вероятность того, что стрелок поразит мишень, равна*p=0,7*. Составить закон распределения случайной величины*X*– количества попаданий после 2 выстрелов.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно (а иногда и полезнее) знать лишь некоторые её**числовые характеристики**.

## Числовые характеристики дискретной случайной величины

## *Математическое ожидание дискретной случайной величины*

Математическое ожидание – это среднеожидаемое значениепри многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина *Х*принимает значения*x1, x2,x3,… xn*с вероятностями*p1, p2,p3…,pn*соответственно. Тогда математическое ожидание *М(Х)*данной случайной величины равносумме произведенийвсех её значений на соответствующие вероятности:

Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины*X*– количества выпавших на игральном кубике очков:

очка.

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, тосреднее значениевыпавших очков будет близко к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе.

Теперь вспомним нашу гипотетическую игру:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | -5 | 2,5 | 10 |
| *pi* |  |  |  |

Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру? …У кого какие впечатления? Так ведь «навскидку» и не скажешь! Но на этот вопрос можно легко ответить, вычислив математическое ожидание, по сути –средневзвешенныйпо вероятностям выигрыш:

, таким образом, математическое ожидание данной игры***проигрышно***.

Да, здесь можно выиграть 10 и даже 20-30 раз подряд, но на длинной дистанции нас ждёт неминуемое разорение. (Таким образом решать Вам: играть или не играть!)

Из всего вышесказанного следует, что математическое ожидание – это уже НЕ СЛУЧАЙНАЯ величина.

Творческое задание для самостоятельного исследования:

**Пример 1**

Мистер Икс играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины *X*– его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько в среднемпроигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

**Справка**: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

Существует много других систем игры в рулетку, для которых можно составить свои таблицы вероятностей. Но этот тот случай, когда нам не нужны никакие законы распределения и таблицы, ибо доподлинно установлено, что математическое ожидание игрока будет точно таким же. От системы к системе меняется лишь **дисперсия**, о которой мы узнаем чуть позже.

**Пример 2**

Случайная величина *Х*задана своим законом распределения вероятностей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | -1 | 0 |  | 5 |
| *pi* |  |  |  |  |

Найти, если известно, что*M*(X)=1,9. Выполнить проверку.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

***Свойства математического ожидания***

1. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной:
2. Математическое ожидание от алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме математических ожиданий от слагаемых:
3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий от сомножителей:
4. Постоянный сомножитель можно вынести за знак математического ожидания:

**Пример 3**

Найти математическое ожидание случайной величины , если известны математические ожидания случайных величин *Х* и *Y*: .

**Решение**:Используя свойства математического ожидания получим

# *****Дисперсия дискретной случайной величины.*****

# *****Среднее квадратическое отклонение*****

Ранее мы выяснили, насколько полезно знать **математическое ожидание**, однако только этой характеристики ещё не достаточно для исследования случайной величины. Представим двух стрелков, которые стреляют по мишени. Один стреляет метко и попадает близко к центру, а другой… просто развлекается и даже не целится. Но что забавно, его среднийрезультат будет точно таким же, как и у первого стрелка! Эту ситуацию условно иллюстрируют следующие случайные величины:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | -1 | 1 |
|  | 0,5 | 0,5 |
|  | -100 | 100 |
|  | 0,5 | 0,5 |

«Снайперское» математическое ожидание равно

, однако и у «интересной личности»:– оно тоже нулевое!

Таким образом, возникает потребность количественно оценить, насколько далекорассеяныпули (значения случайной величины) относительно центра мишени (математического ожидания). Ну арассеяниес латыни переводится не иначе, как**дисперсия**, которая обозначается *D(X).*

***Дисперсией*** дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:.

Из определения следует, что дисперсия случайной величины является неотрицательной константой.

При расчетах дисперсии ее определение оказывается очень неудобным в силу большого числа вычислений. Поэтому удобнее пользоваться другой формой для ее вычисления:дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом е математического ожидания:

Посмотрим, как определяется эта числовая характеристика на одном из выше рассмотренных примеров:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | -5 | 2,5 | 10 |
| *pi* |  |  |  |

Там мы нашли неутешительное математическое ожиданиеэтой игры, и сейчас нам предстоит определить её дисперсию.

Для удобства расчетов оформим вычисления в виде таблицы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | -5 | 2,5 | 10 |
| *pi* |  |  |  |
|  | 25 | 6,25 | 100 |
|  | 12,5 | 2,5 | 10 |

Таким образом, .

Не кажется ли вам, что на фоне выигрышейрезультат получился великоватым? Всё верно – мы возводили в квадрат, и чтобы вернуться в размерность нашей игры, нужно извлечь квадратный корень.Данная величина называется**средним квадратическим отклонением**и обозначается греческой буквой «сигма»:.

Иногда это значение называют**стандартным отклонением**.

В чём его смысл? Если мы отклонимся от математического ожиданиявлево и вправо на среднее квадратическое отклонение:

– на этом интервале будут «сконцентрированы» наиболее вероятные значения случайной величины. Что мы, собственно, и наблюдаем:

Однако так сложилось, что при анализе рассеяния почти всегда оперируют понятием дисперсии. Давайте разберёмся, что она означает применительно к играм. Если в случае со стрелками речь идёт о «кучности» попаданий относительно центра мишени, то здесь дисперсия характеризует две вещи:

Во-первых, очевидно то, что при увеличении ставок, дисперсия тоже возрастает. Так, например, если мы увеличимв 10 раз, то математическое ожидание увеличится в 10 раз, а дисперсия – в 100 раз(коль скоро, это квадратичная величина). Но, заметьте, что сами-то правила игры не изменились! Изменились лишь ставки, грубо говоря, раньше мы ставили 10 рублей, теперь 100.

Второй, более интересный момент состоит в том, что дисперсия характеризует стиль игры. Мысленно зафиксируем игровые ставкина каком-то определённом уровне, и посмотрим, что здесь к чему:

Игра с низкой дисперсией – это осторожная игра. Игрок склонен выбирать самые надёжные схемы, где за 1 раз он не проигрывает/выигрывает слишком много. Например, система «красное/чёрное» в рулетке.

Игра с высокой дисперсией. Её часто называютдисперсионнойигрой. Это авантюрный или агрессивный стиль игры, где игрок выбирает «адреналиновые» схемы, в таких играх на кону оказываются суммы, на порядки превосходящие «тихую» игру предыдущего пункта.

Задания для самостоятельного решения:

**Пример 1**

Дискретная случайная величина задана своим законом распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 12 | 16 | 21 | 26 | 30 |
| *pi* |  |  |  | *а* |  |

Найти:

Замечание: Вычисления математических характеристик случайных величин удобно производить в редакторе EXCEL*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

# *****Свойства дисперсии*****

1. Дисперсия постоянной равна нулю:
2. Постоянный сомножитель можно вынести за знак дисперсии под знаком возведения в квадрат:
3. Дисперсия суммы случайных независимых величин равно сумме дисперсий слагаемых:
4. Дисперсия разности двух случайных независимых величин равна сумме дисперсий слагаемых:

**Пример 2**

Найти дисперсию случайной величины , если известны дисперсии случайных величин *Х* и *Y*: .

**Решение**:Используя свойства дисперсии получим

# ****Многоугольник и функция распределениядискретной случайной величины****

Дискретная случайная величина *Х*задана своим законом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *….* | *xn* |
| *p1* | *p2* | *p3* | *…* | *pn* |

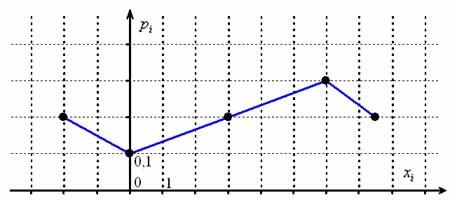
**Многоугольником**распределения вероятностейданной величины называют ломаную, звенья которой соединяют соседние точки.

**Пример 1**

Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины*X*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *-2* | *0* | *3* | *6* | *7,5* |
|  | *0,2* | *0,1* | *0,2* | *0,3* | *0,2* |

**Решение**: чертимпрямоугольную систему координат, в которой по оси абсцисс отсчитываются– значения случайной величины, а по оси ординат– их вероятности. Отмечаем на чертеже точки, в данном случае их пять, и соединяем соседние точки отрезками:



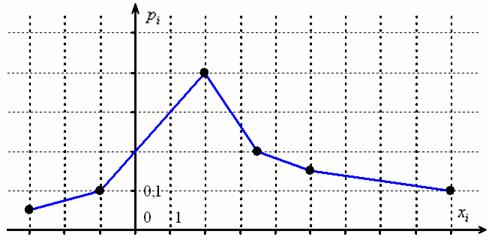
При выполнении чертежа от руки по возможности придерживайтесь следующего масштаба:

горизонтальная ось: 1 ед. = 2 тетрадные клетки (1 см); вертикальная ось: 0,1 = 2 тетрадные клетки.

Если значениядостаточно велики, то ось абсцисс можно «разорвать» (не чертить её кусочек после единицы), и справа продолжить нумерацию, например, с 20.

**Пример 2**

Дискретная случайная величина Х задана своим многоугольником



Записать закон распределения данной случайной величины.

Это задание для самостоятельного решения.

Иногда вместо «многоугольника» говорят о**полигоне** распределения вероятностей, но этот вариант больше применим в **математической статистике**.

Помимо многоугольника распределения случайную величину можно задать с помощью**функции распределения случайной величины**.Стандартное **обозначение**:.

И для дискретной, и длянепрерывной (которая будет рассмотрена далее)случайной величины она определяется одинаково:

, где– вероятность того, что случайная величина*X*примет значение, меньшее, чемпеременная*x*, которая «пробегает» вседействительные значения(от «минус» до «плюс» бесконечности).

Смысл функции распределения хорошо иллюстрирует наша любимая игра:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | -5 | 2,5 | 10 |
| *pi* |  |  |  |

Чему, например, равно значениеF(-20)? Это вероятность того, что выигрыш будет меньше, чем–20. И этоневозможное событие:. Совершенно понятно, чтои для всех «икс» из интервала,а также дляx= -5. Почему? По определению функции распределения:

– вы согласны? Функцияозначает вероятность того, что в точкех=-5выигрыш будет строго меньше «минус» пяти.Таким образом:, если.

На интервалефункция, посколькулевеелюбой точки этого интервала есть только одно значениеслучайной xвеличины, которое появляется с вероятностью 0,5. Кроме того, сюда же следует отнести точку, так как:– очень хорошо осознайте этот момент!

Таким образом, если, то.

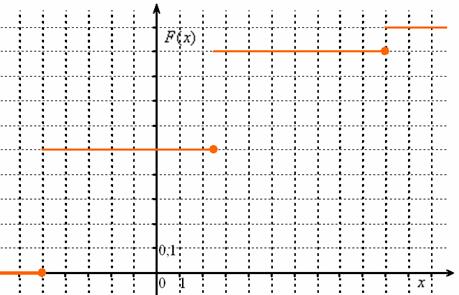
Далее рассматриваем промежуток. строго левеелюбой точки этого промежутка находятся два выигрыша, поэтому:

И, наконец, если, то, ибовсезначенияслучайной величиныXлежат строго левеелюбойточки

Заметим, что функция характеризует вероятность, то она может принимать значения лишь из промежутка

Итак, функция распределения вероятностей ДСВ является кусочнойи записывается в виде:

График данной функции имеетразрывный«ступенчатый» вид:



Причём, функцияили её график однозначно определяют сам закон распределения:

– в точке«скачок» разрываравен 0,5– и это в точности вероятностьэтого значения;

– в точке«скачок» составляет;

– и для выигрыша«высота ступеньки» равна.

Таким образом, функция распределения вероятностей – этоещё один способзадать случайную величину.

Сейчас мы освоим технические моменты решения типовой задачи:

Пример 3

Построить функцию распределения случайной величиныX

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | -2 | 0 | 3 | 7 |
| *pi* |  |  |  |  |

Найти вероятности того, что случайная величина примет значение из следующих промежутков:

**Решение**: рассмотрим формальный алгоритм построения функции распределения.

Сначала берём первое значениеи составляемнестрогоенеравенство. На этом промежутке.

На промежутке*(междуи)*:

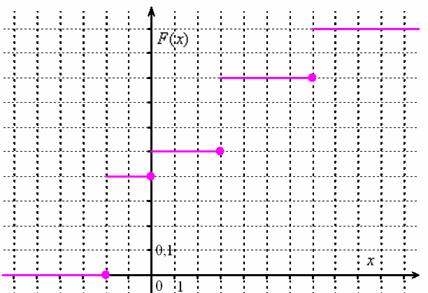
На промежутке*(междуи)*:

На промежутке 3*(междуи)*:

И, наконец, если, то:

Легко заметить, что с увеличением «икс» идёт накопление (суммирование) вероятностей, и поэтому функциютакже называют*интегральной*функцией распределения.В практических задачах проведённые выше действия нужно выполнять в уме, а результат сразу записывать под единую скобку:

Выполним чертёж:

  
Переходим ко второй части задания.

Найдём– вероятность того, что случайная величинаXпримет значение из интервала.

*Примечание*: если оба конца а и bпромежуткане «попадают»в точки разрыва функции, то следующие вероятности:,можно найти по единой формуле:.

В данном случае концы интервала (–1 и 5) находятся в области непрерывности функции распределения поэтому:

И действительно, на данном интервале находятся значения, вероятности появления которых:

Вычислим вероятность. Оба конца этого промежутка не «попадают» в точки разрыва, поэтому:

И в самом деле – на нём находится единственное значение , которое может появиться с вероятностью 0,2.

Аналогично –левый конец промежутка равен «минус» бесконечности:– самостоятельно проанализируйте, какие значенияxi, и с какими вероятностями располагаются на полуинтервале.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда хотя бы одиниз концов а и bпромежутка«попадает»в точку разрыва функции, то указанную выше формулу можно использовать лишь в одном случае из четырёх:

Примечание: если, то левое неравенство становится строгим, но формула тоже применима.

Найдём. Как быть? – под правило не подходит! Вспоминаем теоремы теории вероятностей. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:– вероятность того, что случайная величинаXпримет значение из отрезка. И действительно, этот отрезок включает в себя два значения, которые появляются с вероятностями.

Тут же рассмотрим три других ситуации:, т.к. на интерваленет значений случайной величины.

.

И для 2-го полуинтервала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий:.

, поскольку там нет значений случайной величины. Однако в случае нестрогонеравенства или .

И, наконец, типовая вероятность– того, что значение случайной величиныXотклонится от своегоматематического ожиданияне более чем насреднее квадратическое отклонение. Как вы догадываетесь, их нужно предварительно вычислить:. Раскрываеммодульи пользуемся

Напомним, что в типичном случае на интервалеи вблизи него «сконцентрированы» наиболее вероятные значения случайной величины. Так сказать, «центр событий».

**Пример 4**(для самостоятельного решения)

В билете три задачи. Вероятность того, что студент правильно решит первую задачу, равна 0,9, вторую – 0,8, третью – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете, вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что студент сдаст зачёт, если для этого нужно правильно решить не менее двух задач.

# *(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

# ****Основные виды дискретных распределений****

# *****Геометрическое распределение вероятностей*****

Пусть проводится серия испытаний, в каждом из которых случайное событие*А* может появиться с вероятностью *p*; причём, испытания заканчиваются при первом же появлении данного события. Тогдаслучайная величина*X*, характеризующая количество совершённых попыток, как раз и имеет геометрическое распределение.

Рассмотрим, например, такое событие:*A*–при подбрасывании монеты выпадет орёл.

Начинаем подбрасывать монету. Совершенно понятно, что вероятность появления орла в любом испытании равна, и наша задача заключается в том, чтобы проанализировать – как скоро появится первый орёл (после чего серия закончится). Составим закон распределения случайной величиныX–количества проведённых бросков.

Если , то это означает, что орёл выпал в первой же попытке. Вероятность этого события равна:.

Если, то в первой попытке выпала решка (вероятность), а во второй – орёл. Потеореме умножения вероятностей зависимых событий:.

Если, то в первых двух испытаниях появились решки, а в третьем – орёл. По той же теореме:.

Если, то первый орёл появился лишь в четвёртом испытании:.

…сколько же можно подбрасывать монету? Теоретически – до бесконечности!

И перед нами примердискретной случайной величины, которая принимает бесконечное исчётноеколичество значений. В общем виде её закон распределения записывается следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 1 | 2 | 3 | 4 | … | *n* | … |
| *pi* |  |  |  |  | … |  | … |

Вероятности*pi*представляют собойбесконечно убывающую геометрическую прогрессиюс первым членом*p*и основанием*q*. Отсюда и название – геометрическое распределение вероятностей. Как известно, сумма такой прогрессии равна:, что полностью соответствует вероятностному смыслу задачи.

Однако жизнь такова, что всё когда-то заканчивается, и поэтому в практических задачах количество испытаний почти всегда ограничивается.

**Задача**

Стрелок производит несколько выстрелов в цель до первого попадания, имея всего 4 патрона. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найти закон распределения случайной величины*X*, математическое ожидание, дисперсию, где*X*– количество произведённых выстрелов. Построить многоугольник и функцию распределения данной случайной величины. Найти.

**Решение**: по условию, вероятность попадания в каждом испытании равна. Тогда вероятность промаха:.

Составим закон распределения случайной величины*X*:

- это означает, что стрелок попал с 1-й попытки и на этом испытания закончились:

- – в первом испытании промах, во втором – попадание. Потеореме умножения вероятностей зависимых событий:

– попадание с третьей попытки:.

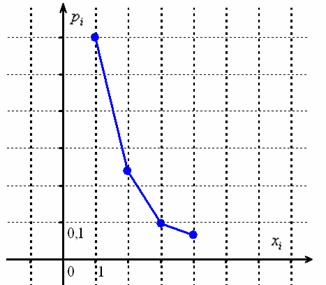
И, наконец:. Здесь стрелок может промахнуться или попасть, но испытания заканчиваются в любом случае. Вместе с патронами. По теоремамумножения вероятностей зависимыхисложения несовместных событий:

Таким образом, искомый закон распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *pi* |  |  |  |  |

**Обязательно**выполняем проверку:, что и требовалось проверить.

Построиммногоугольник распределения:



Вычислими. Для геометрического распределения существуют специальные формулы нахожденияматематического ожиданияидисперсии:и, но нам ими воспользоваться не удастся – по той причине, что количество испытаний не бесконечно. Поэтому придётся использовать общий алгоритм. Заполним расчётную таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 1 | 2 | 3 | 4 | Суммы |
| *pi* | 0,6 | 0,24 | 0,096 | 0,064 | 1 |
| *xi pi* | 0,6 | 0,48 | 0,288 | 0,256 | 1,624 |
| *pi* | 0,6 | 0,96 | 0,864 | 1,024 | 3,448 |

Математическое ожидание готово:– это среднеожидаемоеколичество выстрелов(при многократном повторении таких серий из 4 выстрелов).

Дисперсию вычислимпо формуле:– этомера рассеянияколичества выстрелов относительно математического ожидания.

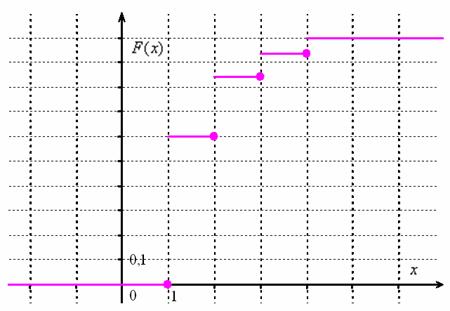
Очевидно, что чем ниже квалификация стрелка (значение*p*), тем больше будут эти значения. И, наоборот – с увеличением*p*математическое ожидание приближается к единице, а дисперсия к нулю, ибо снайпер в подавляющем большинстве случаев выбивает цель с первой попытки да с малой погрешностью относительно «центра мишени».

Этот факт хорошо виден из теоретических формул для бесконечного количества выстрелов. Вычислим числовые характеристики для бесконечного числа выстрелов и

Ну что же, значения нашей «реальной» задачи весьма близки к этим результатам.

Составим функцию распределения вероятностей:

Выполним чертёж:



Найдём– вероятность того, что значение случайной величины отклонится от математического ожидания не более чем на.

Сначала вычислим среднее квадратическое отклонение:

затем – требуемую вероятность:.

Посмотрим как изменится ряд распределения, если *X*–будетуже количество промахов.

В этом случае закон распределения вероятностей примет следующий вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *pi* |  |  |  |  |  |

Здесь– вероятность того, что будет 3 промаха(в 4-й попытке попадание);– вероятность того, что стрелок совершит 4 промаха.

Естественно, что все числовые характеристики и содержательный выводы будут другими, однако сам закон распределения сохранит свой «геометрический» характер.

# *****Биномиальное распределение вероятностей*****

Или биномиальный закон распределения вероятностей.

Пусть проводится *n*независимых испытаний(не обязательно повторных), в каждом из которыхслучайное событие*A*может появиться с вероятностью*p*. Тогдаслучайная величина*X*–число появлений событияAв данной серии испытаний, имеет биномиальное распределение.

Совершенно понятно, что эта случайная величина может принять одно из следующих значений:.

Например: монета подбрасывается 5 раз. Тогда случайная величина*X*–количество появлений орлараспределена по биномиальному закону. Орёл обязательно выпадет:илираз, или, или, или, или, илираз.

Соответствующие вероятности определяются:, где:

*n*– количество независимых испытаний;

*p*– вероятность появления события*A*в каждом испытании;

*q=1-p*– вероятность непоявления события*A*в каждом испытании;

– сколько раз может появиться событие*A*в данной серии испытаний (список всех возможных значений).

Сведём этот закон распределения в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | … |  |  |
|  |  |  |  | … |  |  |

Вероятностипредставляют собой членыбинома Ньютона, благодаря чему распределение и получило своё название. По формуле бинома:

.

В нашем примере с монеткой:

– вероятность того, что в 5 испытаниях орёл не выпадет вообще ();

– вероятность того, что в 5 испытаниях орёл выпадет ровнораз;

– вероятность того, что в 5 испытаниях орёл выпадет ровнораза;

– вероятность того, что в 5 испытаниях орёл выпадет ровнораза;

– вероятность того, что в 5 испытаниях орёл выпадет ровнораза;

– вероятность того, что в 5 испытаниях орёл выпадет ровнораза;

Таким образом, закон распределения числа выпавших орлов:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Контроль:

Легко видеть, что процесс нахождения биномиального ряда распределения достаточно трудоёмкий, поэтому вычисления целесообразно автоматизировать в Excel с помощью его стандартной функции:

=БИНОМРАСП(m; n; p; 0), где*m*количество успехов в*n*испытаниях, а*p*– вероятность успеха в каждом испытании.

**Задача**

Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины*X*– числа попаданий в цель при четырех выстрелах. Вычислитьи. Построить многоугольник и функцию распределения. Найти.

**Решение**: Очевидно, что испытания независимы, и случайная величина*X*распределена по биномиальному закону.

Составим ряд распределения данной случайной величины. Используемформулу Бернулли:для – всех возможных результатов рассматриваемой серии.

– вероятность того, что в 4 выстрелах не будет попаданий;

– вероятность того, что в 4 выстрелах будет ровно 1 попадание;

– вероятность того, что в 4 выстрелах будет ровно 2 попадания;

– вероятность того, что в 4 выстрелах будет ровно 3 попадания;

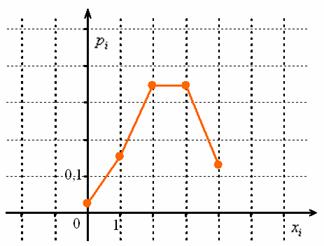
– вероятность того, что в 4 выстрелах будет ровно 4 попадания;

Таким образом, искомый закон распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 0,0256 | 0,1536 | 0,3456 | 0,3456 | 0,1296 |

Проверка: 0,0256+0,1536+0,3456+0,3456+0,1296=1.

Построим многоугольник распределения:



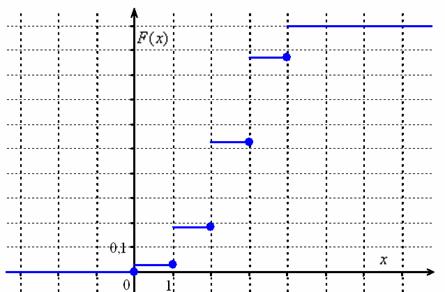
Для вычисления

математического ожидания и дисперсии при биномиальном распределении случайной величины можно воспользоваться готовыми формулами:и .

– среднеожидаемое количество попаданий;

–рассеяниеколичества попаданий относительно математического ожидания.

Составим функцию распределения вероятностей:



Найдём– вероятность того, что значение случайной величины*X*отклонится от своегоматематического ожиданияне более чем на односреднее квадратическое отклонение.

Среднее квадратическое отклонение:и искомая вероятность:.

# *****Распределение Пуассона*****

Пусть проводится *n*независимых испытаний, в каждом из которыхслучайное событие*A*может появиться с вероятностью*p*.Требуется найти вероятность того, что в данной серии испытаний событиеA появится ровно*m*раз.Задача с точно таким же условием была уже рассмотрена в теме о биномиальном распределении вероятностей, но в случае, если количество испытаний *n*велико(сотни и тысячи), эту вероятность обычно рассчитывают приближённо – с помощьюлокальной теоремы Лапласа:

.

Однако и тут есть «слабое звено» – теорема Лапласа даёт большую погрешность, если вероятность *p*меньше, чем 0,1 (и чем меньше, тем погрешность больше). Поэтому здесь используют другой метод, и именно распределение Пуассона.

Итак, ***если количество испытаний nдостаточно велико, а вероятность p появления события Aв отдельно взятом испытании весьма мала***(0,05-0,1 и меньше), то вероятность того, что в данной серии испытаний событие***A***появится ровно*m*раз, можно приближенно вычислить***по формуле Пуассона***:, где .

Напомним, что 0!=1, а значит, формула имеет смысл и для *m=0*.

Итак, случайная величина*X* распределённая по этому закону, принимает бесконечное исчётноеколичество значений, вероятности появления которых определяются формулой:, где

Или, если расписать подробно:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | … | *n* | … |
|  |  |  |  |  | … |  | … |

Используя разложение экспоненты в ряд, легко убедиться, что:

В теории установлено, чтоматематическое ожиданиепуассоновской случайной величины равноидисперсия– тому же самому значению:.

**Пример 1**

Случайная величина*X*подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием. Найти вероятность того, что данная случайная величина*X*примет значение, меньшее, чем ее математическое ожидание.

**Решение**: случайная величина*X*принимает значенияс вероятностями:

По условию,, и тут всё просто: событиесостоит в трёхнесовместных исходах: - вероятность того, что случайная величина*X*примет значение, меньшее, чем ее математическое ожидание.

**Ответ**:

**Пример 2**

Случайная величина*X*подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием. Найти вероятность того, что данная случайная величина примет положительное значение.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

# *****Гипергеометрическое распределение вероятностей*****

Пусть в совокупности из *N*объектов содержатся*M*объектов, обладающие некоторым признаком. Из этой совокупности случайным образом и без возвращения извлекается*n*объектов. Тогдаслучайная величина*X*–количество «особых» объектов в выборке– распределена по гипергеометрическому закону.

**Пример 1**

В ящике находится*N=20*деталей, среди которых*M=5*бракованных. Наудачу извлекаются*n=2*детали. Найти вероятность того, что:

а) обе детали будут качественными;

б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной;

в) обе детали бракованы.

**Решение**: По сути дела, здесь фигурируетслучайная величина*X*–количество бракованных деталей в выборке.Найдём закон распределения этой случайной величины, которая, очевидно, может принять одно из следующих значений:.Соответствующие вероятностиопределяютсяправилами и формулами комбинаторики и классическим определением вероятности.

Сначала вычислим количествовсех возможных наборовиз 2 деталей. Две детали можно выбратьспособами.

(в выборке нет бракованных деталей), способами можно извлечь 2 качественные детали.Поклассическому определению:– вероятность того, среди 2 извлечённых деталей не будет бракованных.

способами можно извлечь 1 качественную детальи1 бракованную.По тому же определению:– вероятность того, среди 2 извлечённых деталей будет 1 бракованная.

способами можно извлечь 2 бракованные детали – вероятность того, что обе извлечённые детали будут бракованными.

Таким образом, закон распределения количества бракованных деталей в выборке:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

Контроль:

Следует отметить, что «зеркальная» случайная величинаX–количество качественных деталей в выборке, тоже имеет гипергеометрическое распределение.

**Пример 2**

Из ящика с 19 стандартными и 1 нестандартной деталью, наудачу извлекается 2 детали. Составить закон распределения случайной величиныX– количества стандартных деталей в выборке.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1)*

**Пример 3**

Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, случайным образом и без возвращения извлекают 3 шара.

**Примечание**: оговорка «без возвращения» является важной, но её часто опускают, подразумевая этот факт по умолчанию.

Составить функцию распределения случайной величины*Х*– числа черных шаров среди взятых. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить многоугольник и функцию распределению. Вычислить вероятность того, что в выборке будет не менее двух чёрных шаров. Вычислить .

**Решение**: поскольку в условии речь идёт овыборкеобъектов изсовокупностии о количестве «особенных» объектов в этой выборке, то предложенная случайная величина имеет гипергеометрическое распределение вероятностей.

Обозначим исходные данные стандартными буквами:

– размер совокупности;

– количество черных шаров в совокупности («особенный» признак);

*n*- размер выборки.

Очевидно, что случайная величина *Х*(кол-во чёрных шаров в выборке)принимает следующие значения:.

Для вычисления гипергеометрических вероятностей существует формула,

Сначала вычислим знаменатель дроби:

способами можно выбрать 3 шара из 10. Данное значение нам потребуется при вычислении каждой вероятности

:

(в выборке нет чёрных шаров)

способами можно выбрать 0 чёрных и 3 белых шара.

По классическому определению::– вероятность того, что в выборке будет 0 черных шаров.

способами можно выбрать 1 чёрный и 2 белых шара.

:– вероятность того, что в выборке окажется 1 чёрный шар.

способами можно выбрать 2 чёрных и 1 белый шар.

– вероятность того, что в выборке окажется 2 чёрных шара.

способами можно выбрать 3 чёрных и 0 белых шаров.

– вероятность того, что в выборке будет 3 чёрных шара.

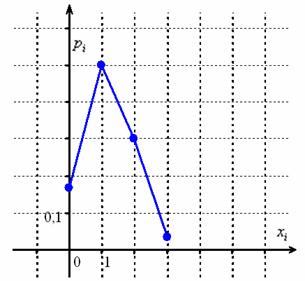
Таким образом, количество чёрных шаров в выборке распределено по следующему закону:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

Контроль:

Примечание: Для вычисления вероятностей гипергеометрического распределения можно использоватьфункцию. =ГИПЕРГЕОМЕТ(x; n; M; N) в Excel.

*Многоугольник распределения:*



Математическое ожиданиеи дисперсиюгипергеометрического распределения можно вычислить в обход общего алгоритма – по специальным формулам:

=1,2 –среднее количествочёрных шаров в выборке (при многократном повторении таких выборок).

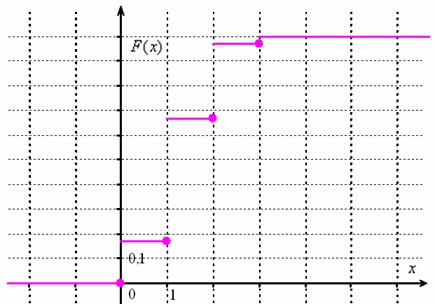
–мера рассеянияколичества чёрных шаров относительно математического ожидания.

Составим функцию распределения вероятностей. Вычислим накопленные частоты:

– десятичные значения нужны для ручного построения графика.

Таким образом, искомая функция:

Строим график:



Вычислим– вероятность того, что в выборке будет не менее двух чёрных шаров. Это можно сделать не единственным способом. Прямым суммированием вероятностейнесовместных исходов:

или с помощьюфункции распределенияи формулы

И, наконец, рассчитываем стандартную вероятность того, что значение случайной величины*X*отклонится от математического ожидания не более чем на одно среднее квадратическое отклонение:

.

# ****Непрерывная случайная величина (НСВ) и её функция распределения****

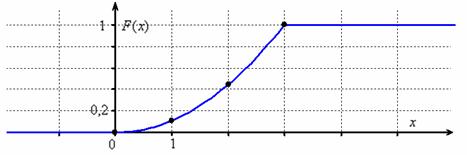
# ****Функция плотности распределения****

В отличие отдискретной случайной величины, НСВ может принять **любое**действительноезначение из некоторого промежутка ненулевой длины, что делает невозможным её представление в виде таблицы (т.к. действительных чисел*несчётно много*). В этой связи непрерывную случайную величину задают функциями двух типов: функцией распределения и функцией плотности.

**Функция распределения**непрерывной случайной величины*X*определяется точно так же, как и функция распределения ДСВ:– вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее, чем переменная*x*, которая «пробегает» все значения от «минус» до «плюс» бесконечности. Таким образом, учитываются все значения, которые в принципе может принять произвольная случайная величина. С увеличением *x*функция распределения «накапливает» (суммирует) вероятности, а значит, является *неубывающей*и изменяется в пределах. По этой причине её иногда называют интегральной функцией распределения.

***Важной особенностью***является тот факт, что функция распределения любой непрерывной случайной величины **всегда и всюду***непрерывна*! Часто её можно встретить вкусочномвиде, например:

А график этой функции имеет вид:



Теперь вернёмся к смыслу функции распределения и рассмотрим некоторые значения *х*.

– вероятность того, что случайная величина*X*примет значение, меньшее, чем –1;

– вероятность того, что случайная величина*X*примет значение, меньшее, чем 4.

Ну, и очевидно, что рассматриваемая случайная величина принимаетслучайные, наперёд неизвестныезначения из отрезка. Если вкладывать в задачу содержательный смысл, то это может быть случайная продолжительность некоего процесса(в секундах, например), или масса либо размер случайно выбранного объекта(например, крупинки песка). И тому подобное – примеров масса.

Вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого промежутка по единой формуле:

Например:– вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка. И точно такими же будут вероятности;

– вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка

– вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала;

## Функция плотности распределения вероятностейилидифференциальнаяфункция распределенияпредставляет собойпроизводнуюфункции распределения:.

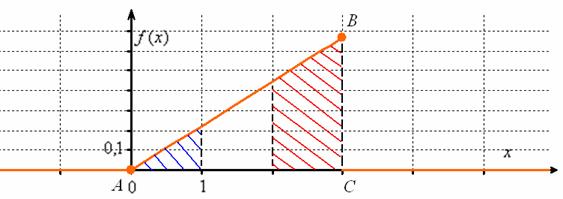
**Примечание**: для дискретной случайной величины такой функции не существует

В нашем примере:

Для функции плотности справедливо, так называемое ***условие нормировки***:

которое позволяет проверить, верно ли найдена функция плотности.

Проверим найденную функцию. Если случайная величина *X*принимает значения изконечногопромежутка, то всё дело сводится к вычислениюопределённого интеграла. В силусвойства аддитивности:

что и требовалось проверить. С вероятностной точки зрения это означает, что случайная величина *X*достовернопримет одно из значений отрезка. Геометрически же это означает, что**площадь**между осью*OX*и графикомравна единице, в данном случае речь идёт о площади треугольника*ABC.*Сторона*AB*является фрагментомпрямой.

Так как функция плотности «собирает под собой» вероятности, то она *неотрицательна.* Следует также отметить, что в общем случае эта функция разрывна.

Теперь разберём весьма любопытный факт: поскольку действительных чисел*несчётно много*, то вероятность того, что случайная величина*X*примет какое-то конкретное значениестремится к нулю. И поэтому вероятности рассчитывают не для отдельно взятых точек, а для целых промежутков(пусть даже очень малых).

(на чертеже- это площадь треугольника – вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка ;

(площадь четырехугольника)– вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка .

По той причине, что отдельно взятые значения можно не принимать во внимание, с помощью этих же интегралов рассчитываются и вероятности по интервалам и полуинтервалам.

**Пример 1**

Непрерывная случайная величина *Х*задана своей функцией распределения:

Найти значения*c, d.*

**Решение**: в силу непрерывности функции распределения:

Таким образом:

**Пример 2**

Непрерывная случайная величина *Х*задана функцией плотности распределения:

Найти значение*A*и составить функцию распределения вероятностей. Вычислить. Построить графики.

**Решение**: найдём константу*A*. Используем свойствонормировки:

В данном случае:

Пользуясьчётностью подынтегральной функции, вычислим:

Отсюда: .

Таким образом, функция плотности распределения имеет вид:

Теперь начинается самое интересное. Функция распределения вероятностей – есть интеграл:

Так как *f(x)*разбита на три участка, то решение разобьётся на 3 шага:

1. На промежутке, поэтому:
2. На интервале,
3. И, наконец, на,

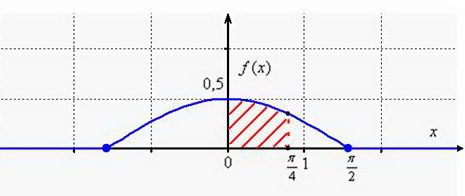
Объединим вычисленные значения функции:

Вычислим вероятность попадания случайной величины *Х* на отрезок с помощью функции распределения:

Вычислим эту же вероятность с помощью функции плотности распределения:

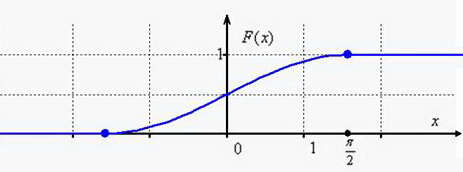
Выполним чертежи.

Графикпредставляет собойкосинусоиду, сжатую вдоль ординатв 2 раза:



Значениечисленно равно заштрихованной площади и вся площадь под «дугой» равна единице, то есть, достоверным является тот факт, что случайная величина примет значение из интервала. Заметьте, что значения, согласно условию,невозможны.

График представляет собой сжатуюв 2 раза вдоль оси ординат синусоиду, сдвинутуюнавверх:



Задания для самостоятельной работы:

**Пример 3**

Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины *Х*:

Требуется:

1) определить коэффициентA;

2) найти функцию распределения*F(x);*

3) построить графики*f(x), F(x);*

4) найти вероятность того, что*X*примет значение из промежутка

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Пример 4**

Непрерывная случайная величина*X*задана плотностью распределения вероятностей:

Найти значение*a*и построить график плотности распределения. Найти функцию распределения вероятностейи построить её график. Вычислить вероятность.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

**Пример 5**

Непрерывная случайная величина *X*задана своей плотностью распределения:

Найти коэффициент*A*и функцию распределения*F(X).* Построить графики.

**Решение**: по условию нормировки функции плотности распределения:

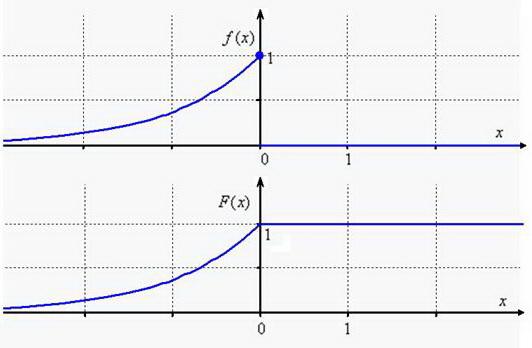
В данной задаче *f(x)*состоит из 2 частей, поэтому:

и функция плотности:

Найдём функцию

1. На промежутке, следовательно:
2. На интервале

что и должно получиться.



# ****Числовые характеристики непрерывной случайной величины****

Математическое ожидание непрерывной случайной величины*Х*определяется, как несобственный интеграл:

где– функция плотности распределения этой случайной величины.

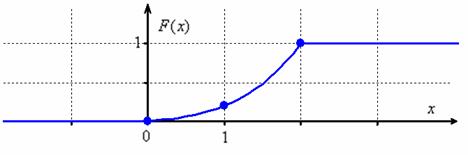
Дисперсиявычисляется по формуле:

Исреднее квадратическое отклонениевычисляется так жекак и у дискретной случайной величины:

**Пример 1**

Непрерывная случайная величина*X*заданафункцией распределения вероятностей:

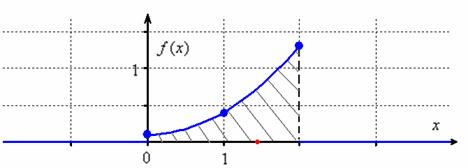
Вычислить. Построить графикии.

**Решение:**начнём с графика функции распределения. При его ручном построении удобно найти промежуточное значениеи построитьчасть кубической параболы:

***Повторим***: функция распределенияописывает вероятность того, что случайная величина*X*примет значение, меньшее, чемпеременная*x*, «пробегающая» все значения . Даннаяфункция изменяется в пределахине убывает(т. к. «накапливает» вероятности), а такжеявляетсянепрерывной(для НСВ).

Очевидно, что случайная величина*X*принимает случайные значения из отрезка, и какие из нихболее вероятны, а какие –менее, наглядно показываетфункция плотности распределения вероятностей:

И снова опорные точки:



**В отличие отфункции распределения**функции плотности может быть разрывнаи может принимать значения большие единицы (как в нашем случае); может, как убывать, так и возрастать и даже иметь экстремумы(на чертеже часть параболы возрастает). Однако, она неотрицательна:и обладает свойством

В силу аддитивностиинтеграла:

– данный результат равен заштрихованной площадии с вероятностной точки зрения означает тот факт, что случайная величина *Xдостоверно*примет одно из значений отрезка. Причём, по чертежу хорошо видно, что значения из правой части отрезка гораздо более вероятны, чем значения слева.

Очевидно, что математическое ожидание(среднеожидаемое значение)случайной величины*X*обязательнонаходится в «живом» отрезкеи смещено ближе к его правому концу. Убедимся в этом аналитически. По формуле вычисления математического ожидания, и в силу того же свойствааддитивности:

Дисперсию(меру рассеяния случайных значений относительно)вычислим по формуле:

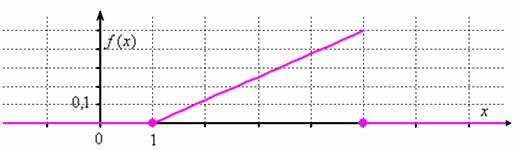
И, наконец, среднее квадратическое отклонение:

**Ответ**:

Следующее задание для самостоятельного решения:

**Пример 2**

Дана функция:



Представитьв аналитическом виде и показать, что она может служить плотностью вероятностей непрерывной случайной величины*X*. Вычислить.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

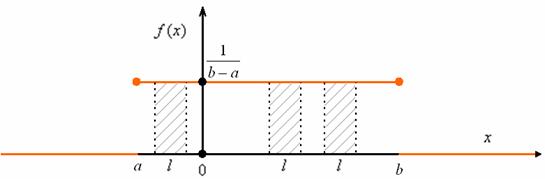
# ****Основные виды непрерывных распределений вероятностей****

# *****Равномерное распределение вероятностей*****

Простейшее из непрерывных распределений, с помощью которого моделируются многие реальные процессы. Например – это график движения общественного транспорта. Предположим, что некий автобус (троллейбус / трамвай)ходит с интервалом в 10 минут, и вы в случайный момент времени подошли к остановке. Какова вероятность того, что автобус подойдёт в течение 1 минуты? Очевидно, 1/10-я. А вероятность того, что придётся ждать 4-5 минут? Тоже. А вероятность того, что автобус придётся ждать более 9 минут? Одна десятая!

Рассмотрим некоторый конечныйпромежуток, пусть для определённости это будет отрезок. Если случайная величинаXобладает постояннойплотностью распределения вероятностейна данном отрезке и нулевойплотностью вне него, то говорят, что она распределенаравномерно. При этом функция плотности будет строго определённой:

И в самом деле, если длина отрезка(см. чертёж)составляет, то значениенеизбежно равно– дабы получилась единичная площадь прямоугольника, и было соблюденоусловие нормировки.



Проверим его формально:

С вероятностной точки зрения это означает, что случайная величина*X*достовернопримет одно из значений отрезка.

Суть равномерности состоит в том, что какой бы внутренний промежутокфиксированной длины*l*мы ни рассмотрели(вспоминаем «автобусные» минуты)– вероятность того, что случайная величина*X*примет значение из этого промежутка будет одной и той же. Рассмотрим типовое задание:

**Пример 1**

Непрерывная случайная величина*X*задана своей плотностью распределения:

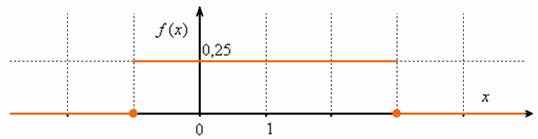
Найти константу*C* вычислитьи составить функцию распределения. Построить графики. Найти .

**Решение**: так как на интервале(конечном промежутке)

, то случайная величина*X*имеет равномерное распределение, и значение *C* можно отыскать по прямой формуле

.

Таким образом, функция плотности:

  
Найдём математическое ожидание, которое, очевидно, должно находиться ровно посередине «событийного» промежутка:

как и предполагалось.

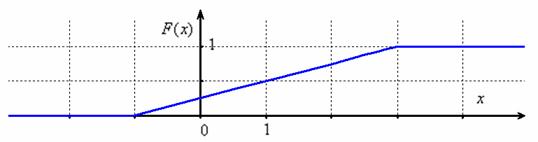
Дисперсию вычислим поформуле:

Составимфункцию распределения

1. если, тои
2. если, тои:
3. и, наконец, при, поэтому:

В результате:

Выполним чертёж:



Требуемую вероятность можно вычислить двумя способами, с помощью найденной функции распределения:

либо с помощью определённого интеграла от плотности:

Для вычисленияматематического ожидания и дисперсии равномерной случайной величины существуют специальные формулы, выведем их:

Для

Таким образом,

**Пример 2**

Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что погрешности округлений распределены равномерно, найти вероятность того, что при очередном измерении она не превзойдёт 0,04.

**Решение**: Для лучшего понимания **решения**представим, что это какой-нибудь механический прибор со стрелкой, например, весы с ценой деления 0,2 кг, и нам предстоит взвесить кота в мешке. Но не в целях выяснить его упитанность – сейчас будет важно, где между двумя соседними делениями остановится стрелка.

Рассмотрим случайную величину *Х* – расстояние стрелки от ближайшеголевого деления. Или от ближайшего правого, это не принципиально.

Составим функцию плотности распределения вероятностей:

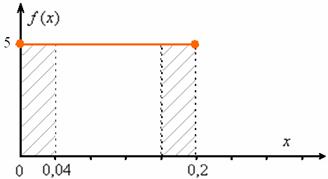
1) Так как расстояние не может быть отрицательным, то на интервале.

2) Из условия следует, что стрелка весов сравной вероятностьюможет остановиться в любом месте между делениями**\***, включая сами деления, и поэтому на промежутке:

**\***Это существенное условие. Так, например, при взвешивании кусков ваты или килограммовых пачек соли равномерность будет соблюдаться на куда более узких промежутках.

3) И поскольку расстояние от ближайшего левого деления не может быть больше, чем 0,2, то при.Таким образом:

Определим, когда погрешность округления до ближайшего деления не превзойдёт 0,04. Это произойдёт тогда, когда стрелка остановится не далее чем на 0,04 от левого делениясправаилине далее чем на 0,04 от правого деления слева. На чертеже заштрихованы соответствующие площади:



Осталось найти эти площадис помощью интегралов (или как площади прямоугольников).

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

– вероятность того, что ошибка округления не превзойдёт 0,04 (40 грамм для нашего примера)

Легко видеть, что максимально возможная погрешность округления составляет 0,1 (100 грамм) и поэтомувероятность того, что ошибка округления не превзойдёт 0,1, равна единице.

**Ответ**: 0,4

**Пример 3**

Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию и интервалом 7 минут. Составить функцию плотности случайной величины T– времени ожидании очередного автобуса пассажиром, который наудачу подошёл к остановке. Найти вероятность того, что он будет ждать автобус не более трёх минут. Найти функцию распределенияи пояснить её содержательный смысл.

Несмотря на то, что время не может быть отрицательным, интервалне имеет особого смысла исключать из рассмотрения, ибо противоречия тут нет – вероятность того, что случайная величина*T*примет невозможное значение, равно нулю.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

# *****Показательное распределение вероятностей*****

Продолжаем изучать особые виды распределений непрерывной случайной величины. **Показательным** или **экспоненциальным**называют распределение, которое характеризуется следующей функцией плотности:

**Задача 1**

Непрерывная случайная величина *X* задана своей функцией распределения:

Требуется:

1) определить коэффициентA;

2) найти плотность распределения вероятностей;

3) схематично построить графики функцийи;

4) вычислить математическое ожидание и дисперсию*X*;

5) определить вероятность того, что*X*примет значение из интервала.

**Решение**:

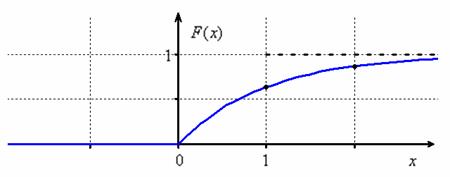
1. В силу непрерывности функции распределения:

– при этом **и только при этом значении**предложенная функция задаёт закон распределения непрерывной случайной величины:

1. Найдём функцию плотности распределения:
2. Для построения графиков вычислим несколько значений

и предел

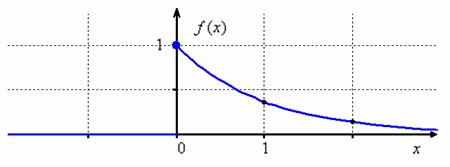
Таким образом, прямая является горизонтальной асимптотойдля графикапри:



Показательное распределение нашло широкое применение в прикладных задачах. Пусть переменная «икс» обозначает времяи в момент времени*х=0*начинает эксплуатироваться некий прибор, например, обычная лампочка. Случайная величина *Х* – время работы лампочки до перегорания. Тогда функцияописывает вероятность того, что лампочка проработает меньше, чем прошедшее время*x*. И по понятным причинам при увеличении*x*эта вероятность стремится к единице, что хорошо иллюстрирует вышеприведённый график.

Кстати, о чём идёт речь в 5-м пункте условия? В контексте рассматриваемого примера, нам нужно найти– вероятность того, что лампочка проработает более 2 тыс. часов(значения, естественно, условные). Вычислим эту вероятность:

Ситуацию наглядно иллюстрирует чертёж плотности распределения вероятностей:



Площадь между графикоми осью абсцисс равна единице, и значительная часть этой площади (а именно,) сосредоточена на промежутке от 0 до 2.

Применительно к нашему примеру, определённый интегралравен вероятности того, что лампочка проработает от 0 до*k*тыс. часов. В частности:

Таким образом, несобственный интеграл– есть вероятность того, что лампочка проработает болееkтыс. часов.

1. Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Для решения этого пункта задачи выведем общие формулы для показательного распределения:

применим формулу интегрирования по частям:

Дисперсию вычислим по формуле:

В данном случае:

(При вычислении интеграла воспользовались найденным выше несобственным интегралом)

Таким образом, получили формулы:

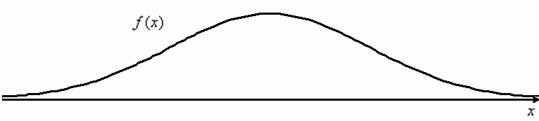
С использованием полученных формул:

Показательное распределение нашло широкое применение,в большом числе случаев оно описывает время безотказной работы прибора, при этом число λ интерпретируется как интенсивность отказа. Это распределение находит также широкое применение в демографии.

Экспоненциальное распределение оказывается весьма полезным в деловых приложениях, особенно при моделировании производства и систем массового обслуживания. Оно широко используется в теории расписаний (очередей) для моделирования промежутков времени между двумя запросами, которые могут представлять собой приход клиента в банк или ресторан быстрого обслуживания, поступление пациента в больницу, а также посещение Web-сайта.

# *****Нормальный закон распределения вероятностей*****

Без преувеличения его можно назвать философским законом. Наблюдая за различными объектами и процессами окружающего мира, мы часто сталкиваемся с тем, что чего-то бывает мало, и что бывает норма:



На чертеже изображен принципиальный вид функции плотностинормального распределения вероятностей.

Какие можно привести примеры? Это, например, рост, вес людей (и не только), их физическая сила, умственные способности и т.д. Существует «основная масса» (по тому или иному признаку)и существуют отклонения в обе стороны.Это различные характеристики неодушевленных объектов (те же размеры, вес).

Непрерывная случайная величина *Х*, распределённая по нормальному закону(закону Гаусса), имеет функцию плотности

*- функция Гаусса*

и**однозначно**определяется параметрами*а* и σ (σ>0).

*Примечание: Функция Гаусса и портрет самого ученого были изображены на купюре в 10 марок.*



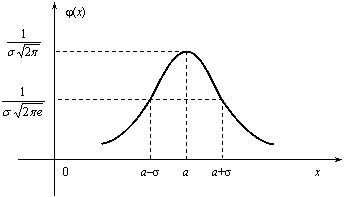
Термин «нормальный» не совсемудачный. Многие признаки подчиняются нормальному закону, например, рост человека, дальность полетаснаряда и т.п. Но если какой-либопризнак подчиняется другому, отличному от нормального, законураспределения, то это вовсе не говорит о «ненормальности» явления,связанного с этим признаком.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределённой случайной величины соответственно равны параметрам а и σ из функции Гаусса, т.е:

График функции плотности случайной величины, подчинённой нормальному закону распределения *f(x)* называется *нормальной кривой* или кривой нормального распределения.

Методами дифференциального исчисления можно установить, что:

1. кривая симметрична относительно прямой *х*=*a;*
2. функция имеет максимум при *х*=*af(a)=*;
3. по мере удаления х от точки *a* функция убывает и при х→∞ кривая приближается к оси *Ох*;
4. кривая выпукла вверх при х є (*a*–σ; *a*+σ) ивыпукла вниз при х є (–∞;*a*– σ) и х є (*a*+σ;+∞).



*Рис. Кривая нормального распределения.*

**Замечание.** Форма кривой изменяется с изменением параметра σ. С возрастанием σ кривая *f(x)* становится более пологой и растянутой вдоль оси *Ох*.

Значениям случайной величины, близким к математическому ожиданию, соответствует большая плотность вероятности, то есть малые отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания встречаются чаще, чем большие.

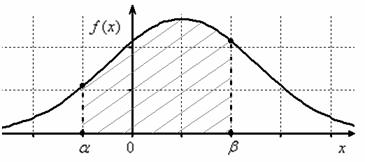
***Свойства нормального распределения***

1. Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина *Х* примет значение, принадлежащее интервалу (α*;* β), находится по формуле:

*Р*(α < Х < β) = Ф—Ф,

где Φ(х)  – функция Лапласа (функция распределения вероятностей нормального распределения).

Геометрически эта вероятность равна площадимежду нормальной кривой и осью абсцисс на соответствующем участке:



Функция Лапласа табулирована, т.е. её значения можно найти в специальных таблицах (*см. ПРИЛОЖЕНИЕ 4*).

Функция Лапласа нечетна, т.е. и при

1. Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ находится по формуле:

*Р*(<δ)=2Ф().

В частности при *a*=0 справедливо равенство:

*Р*(<δ)= 2Ф().

1. **Правило «3 σ»**

Для нормально распределенной случайной величины велика вероятность того, что при однократном испытании отклонение величины от ее математического ожидания не превышает среднего квадратического отклонения.

Преобразуем формулу Р(<δ)=*2Ф*(), положив *δ=σ·t*. В итоге получим

Р(<σ·t)=*2Ф(t).*

Если t=3 и, следовательно, σ·t=3σ, то <=, то есть вероятность того, что отклонение от математического ожидания по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973. Это и есть правило «3 σ».

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027.

Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти, что значения нормально распределенной случайной величины выйдут за пределы интервала (a–3σ; a+3σ). Такие события, исходя из принципа невозможности маловероятных событий, можно считать практически невозможным. В этом и состоит сущность правила трех сигм.

**Пример 1**



Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины Х равны соответственно 11 и 4. Найти вероятность того, что в результате испытания Х примет значение, заключенного в интервале (19;23).

**Решение:** Воспользуемся формулой:

Р(α<Х<β)=Ф—Ф.

По условию, α = 19; β = 23; а = 11; σ = 4, тогда

Р(19<Х<23)=Ф – Ф= Ф(3) – Ф(2).

По таблице ПРИЛОЖЕНИЯ 4 находим: Ф(3)=0,49865, Ф(2)=0,4772.

Найдем искомую вероятность (вероятность того, что в результате испытания Х примет значение, заключенное в интервале (19;23)):

Р(19<Х<23)=0,49865 – 0,4772=0,02145.

**Пример 2**

Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины Х равно 5 и среднее квадратическое отклонение равно 2. Написать плотность вероятности Х.

**Решение:** Плотность нормально распределённой случайной величины Х имеет вид:

*f(x)=*.

Подставив *a*=5 и σ=2, получим:

*f(x)=.*

**Пример 3**

Случайная величина*X*ошибки взвешивания распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением 3 грамма. Найти вероятность того, что очередное взвешивание будет проведено с ошибкой, не превышающей по модулю 5 грамм.

**Решение:** По условию,и сразу заметим, что при очередном взвешиваниимы почти 100% получим результат с точностью до 9 грамм. Но в задаче фигурирует более узкое отклонениеδ=5 и по формуле

*Р*(<δ)= 2Ф()

*Р*(< 5)= 2Ф()– вероятность того, что очередное взвешивание будет проведено с ошибкой, не превышающей 5 грамм.

Самостоятельно решите обратную задачу:

**Пример 4**

Диаметр валика – случайная нормально распределенная случайная величина, среднее квадратическое отклонение ее равномм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностьюпопадет длина диаметра валика.

*(Решение и ответы смотрите в ПРИЛОЖЕНИИ 1).*

### ****Понятие о центральной предельной теореме****

которую также называют теоремой Ляпунова. Её суть состоит в том, что если случайная величина *Х* является суммойочень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то*X*имеет распределение, близкое к нормальному.

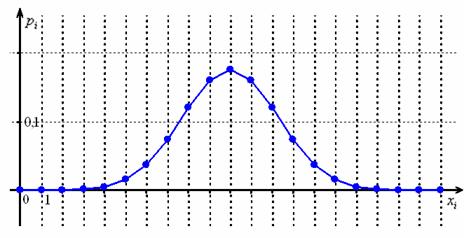
В окружающем мире условие теоремы Ляпунова выполняется очень часто, и поэтому нормальное распределение (близкое к нему) и встречается буквально на каждом шагу.

Так, например, молекул воздуха очень и очень много, и каждая из них своим движением оказывает ничтожно малое влияние на всю совокупность. Поэтому скорость молекул воздуха распределена нормально.

Большая популяция некоторых особей. Каждая из них (или подавляющее большинство) оказывает несущественное влияние на жизнь всей популяции, следовательно, продолжительность жизни этих особей тоже распределена по нормальному закону.

Теперь вернёмся к знакомой задаче, где проводится *n*независимых испытаний, в каждом из которых некое событие*A*может появиться с постоянной вероятностью*p*. Эти испытания можно считать попарно независимым случайными величинами, и при достаточно большом значении *n*биномиальное распределениеслучайной величины*X*–числа появлений событияAвnиспытаниях– очень близко к нормальному.

Уже при*n=20*ивмногоугольникебиномиального распределения хорошо просматривается нормальная кривая:



И чем больше*n*, тем ближе будет сходство. Вероятность*p*может быть и другой, но не слишком малой.

Именно этот факт мы и использовали втеоремах Лапласа– когда приближали биномиальные вероятности соответствующими значениями функций нормального распределения.

**Раздел III**

**Элементы математической статистики**

**Введение**

Математическая статистика — раздел математики, разрабатывающий методы регистрации, описания и анализа данных наблюдений и экспериментов с целью построения вероятностно-статистических моделей случайных явлений.

Целью математической статистики является описание, объяснение и предсказание явлений действительности на основе установленных законов.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий) по результатам наблюдений (статистическим данным).

Задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Рассмотрим схему исследований при решении задачи математической статистики. Эти исследования делятся на два этапа.

1. На первом этапе, который называют описательной статистикой (descriptivestatistics), путем наблюдений и экспериментов собираются, регистрируются статистические данные, затем они упорядочиваются, представляются в компактной, наглядной или функциональной форме. Вычисляются различные средние величины, характеризующие статистические данные.
2. На втором этапе на основе вычислений на предшествующем этапе необходимо получить достаточно обоснованные выводы о свойствах исследуемого случайного явления, используя методы оценивания и проверки гипотез.

Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых наблюдений, испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) позволяет принимать решения в условиях неопределенности.

*Краткая историческая справка.* Слово «статистика» происходит отлатинского слова «status» (состояние, государство) означает определенное положение вещей. Термин «статистика» впервые ввел немецкий ученый Г. Ахенвалль в 1749 г., в своей книге о «государствоведении». Несмотря на это, статистический учёт вёлся намного раньше: проводились переписи населения в Древнем Китае, осуществлялось сравнение военного потенциала государств, вёлся учёт имущества граждан в Древнем Риме и тому подобного.

Математическая статистика возникла в XVII в. и развивалась вместе с теорией вероятностей. Основоположниками науки являются Я. Бернулли, К.Гаусс, П. Лаплас. В XIX в. большой вклад внесли российские математики П. Чебышев, А. Марков, А. Ляпунов. В XX в. важные результаты были получены советскими математиками В.И. Романовским, Е.Е. Слуцким, А.Н. Колмогоровым, Н.В. Смирновым, английскими учеными Э. Пирсоном, У. Го́ссе (Стьюдентом), Р. Фишером, Г. Крамером, американскими учеными Ю. Нейманым, А. Вальдом, Р. Мизесом и другими учеными.

**Генеральная совокупность и выборка**

Рассмотрим абстрактный эксперимент, в результате его проведения мы наблюдаем или измеряем значение ***х*** изучаемой случайной величины***Х*** (это может быть в действительности величина инфляции, параметр детали при массовом производстве, цена на жилье в отдельных районах столичных городах, любой общий количественный признак определенного множества объектов).

*Генеральной совокупностью* называется множество возможных значений изучаемой случайной величины ***Х*** с законом распределения ***F(X)***. Возможные значения генеральной совокупности ***Х*** называются ее *элементами*. Закон распределения ***F(X)*** называется *генеральным законом* распределения, а числовые характеристики ***Х*** – *генеральными числовыми характеристиками.*

Генеральная совокупность может быть конечной (множество значений случайной величины ***Х*** конечно) или бесконечной. Например, 1) ***Х*** – число детей, родившихся в городе за определенный промежуток времени. Генеральная совокупность это множество неотрицательных чисел {0,1,2,…} с некоторым законом распределения. 2) ***Х*** – величина отклонения детали от заданного размера при массовом производстве. Генеральная совокупность это множество действительных чисел с некоторым законом распределения.

Иногда из всей генеральной совокупности случайно отбирают ограниченное число объектов и подвергают их изучению, по свойствам которой судят о свойствах генеральной совокупности.

*Выборочной совокупностью* или *выборкой*называется совокупность случайно отобранных элементов их генеральной совокупности. *Объемом выборки* называется число ее элементов.

Выборку нельзя составить как попало. Выборка должна быть репрезентативной (представительной) и однородной. Репрезентативность обеспечивается простым случайным выбором:

1. Выбор является случайным.
2. Каждый элемент генеральной совокупности может быть выбран.
3. Каждый элемент выбирается независимо от остальных.
4. Все элементы выборки получаются в равных условиях.

Однородность означает, что условия проведения экспериментов для получения выборки не должны меняться. Но на практике простой случайный выбор не всегда осуществим (он является эталонным), применяются различные виды выбора: *механический выбор* (измерения проводят через равные промежутки времени, контролируется каждая m деталь, выбирается каждый s человек по списку); *серийный выбор* (контролируется не одна таблетка, а вся упаковка, не один человек группы, а вся группа); *типический выбор* (урожайность участка, социологический опрос, зарплата в отрасли); *выбор с помощью случайных независимых измерений* (температура среды, загрязненность воды, величина тока) и другие. Все виды выборов могут комбинироваться между собой. В математической статистике применяется только простой случайный выбор.

После того как сделана выборка, все ее элементы обследуют по отношению к генеральной совокупности и в результате получают наблюдаемые данные. Далее они упорядочиваются, представляются в компактной, наглядной или функциональной форме. Вычисляются различные средние величины, характеризующие статистические данные.

**Вариационный и статистические ряды**

Обычно выборка представляет собой множество чисел, расположенных в беспорядке. Для дальнейшего изучения выборку подвергают обработке.

Наблюдаемые значения выборки называются *вариантами*. Последовательность всех вариант, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*.

***Пример 1.*** Взята выборка наименьших цен в тысячах рублях за 1 м2 на новое жилье в городах России на май 2016 г. (http://www.rosrealt.ru/):

Архангельск – 59, Барнаул – 45, Белгород – 56.5, Владивосток – 94, Волгоград – 48, Воронеж -48, Екатеринбург – 70, Казань – 64, Калининград – 60.5, Киров -47, Магнитогорск – 31, Майкоп – 36.5, Москва – 211.5, Рязань – 47, Самара – 65, Сочи – 83.5, Томск – 52, Тула – 52, Ярославль – 47.

Построим вариационный ряд.

Элемент выборки 211.5 является аномальным, что объясняется исключительным положением города. Этот элемент следует исключить из выборки. Тогда вариационный ряд примет вид:

**31, 36.5, 45, 47, 48, 52, 56.5, 59, 60.5, 64, 65, 70, 83.5, 94.**

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка: варианта ***х1***наблюдалась ***n1*** раз, варианта ***х2*** – ***n2*** раз, …, варианта ***хk*** – ***nk*** раз и *n1* + +*n2+…+ nk=n –* ***объем выборки****.* Числа вариантов *n1*, *n2*,…,*nk*называются***частотами***. Отношения частот к объему выборки , где *i=1,2,…,k*, называются относительными частотами.

***Статистическим рядом***называется вариационный ряд с указанием соответствующих частот или относительных частот.

В общем случае статистический ряд представляют в виде таблиц.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Варианты **xi** | ***х1*** | ***х2*** | *…* | ***хk*** |
| Частоты **ni** | ***n1*** | ***n2*** | *…* | ***nk*** |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Варианты **xi** | ***х1*** | ***х2*** | *…* | ***хk*** |
| Относительные частоты |  |  | *…* |  |

***Пример 2.*** Преобразуем выборку из примера 1 в статистический ряд частот.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***xi*** | 331 | *336.5* | 445 | *447* | *448* | *552* | *556.5* | *559* | *660.5* | *664* | *665* | *770* | *883.5* | *994* |
| ***ni*** | 11 | 11 | 11 | 33 | *22* | *22* | *11* | *11* | *11* | *11* | *11* | *11* | *11* | *11* |

Объем выборки *n=18****.***

Статистический ряд относительных частот.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***xi*** | 331 | *336.5* | 445 | *447* | *448* | *552* | *556.5* | *559* | *660.5* | *664* | *665* | *770* | *883.5* | *994* |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Статистический ряд можно изобразить графически в виде ***полигона частот*** или ***полигона относительных частот***, что позволяет получить наглядное представление о закономерности варьирования наблюдаемых значений случайной величины. В прямоугольной системе координат наносят точки с координатами (***xi***,***ni***) или (***xi***, ), полученные точки соединяют отрезками, полученную ломанную называют полигоном.

Для примера 2 полигон частот можно представить в виде рисунка 1.

**Рисунок 1.**

Статистический ряд графически можно изобразить в виде ***кумулятивной кривой*** (кривой сумм — *кумуляты*). При построении кумуляты дискретного вариационного ряда на оси абсцисс откладывают варианты ***xi***, а по оси ординат соответствующие им накопленные частоты . Соединяя точки с координатами (***xi***) отрезками прямых, получаем ломаную (кривую), которую называют кумулятой. Для получения накопительных частот и дальнейшего построения точек (***xi***) составляется расчетная таблица.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Варианты **xi** | ***х1*** | ***х2*** | *…* | ***хk*** |
| Относительные частоты |  |  | *…* |  |
| Накопительные относительные частоты  **=** |  |  | *…* |  |

График кумуляты дает представление о графике функции распределения ***F(X)*** генеральной совокупности.

***Пример 3.*** Для статистического ряда примера 2 составим расчетную таблицу для накопительных частот и построим кумуляту (Рисунок 2).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***xi*** | 331 | *336.5* | 445 | *447* | *448* | *552* | *556.5* | *559* | *660.5* | *664* | *665* | *770* | *883.5* | *94* |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Рисунок 2.**

**Интервальный статистический ряд**

Если выборка получена из непрерывной генеральной совокупности, объем наблюдаемых значений случайной величины большой, то вариационный и статистические ряды будут трудно обозримыми множествами и строят интервальный статистический ряд. Для построения такого ряда весь интервал варьирования наблюдаемых значений случайной величины разбивают на ряд частичных интервалов и подсчитывают частоту попадания значений величины в каждый частичный интервал.

Пусть , , ..., — результаты независимых наблюдений над генеральной совокупностью *Х*. Если количество наблюдений *n* достаточно большое (**), то результаты наблюдений сводят в интервальный статистический ряд, который формируется следующим образом.

Вычисляют размах варьирования *R* признака *Х*, как разность между наибольшим  и наименьшим  значениями признака, то есть

. Размах *R* варьирования признака *Х* делится на ***k*** разных частей и таким образом определяется число интервалов в таблице. Величину *k*выбирают, пользуясь следующими правилами:

1), (30≤ *n*≤ 1000; при *n*=40 *k*=6; при *n*=100 *k*=8; при *n*=200 *k*=10, при *n*=400 *k*=12; при *n*=1000 *k*=17);

2)*k =* 1 +3,3*lgn* (формула Стерджеса).

3) 6 ≤ *k* ≤10.

Длина ***h*** каждого частичного интервала определяется по формуле . Величину *h* обычно округляют до некоторого значения *d*. Например, если результаты  признака *Х* — целые числа, то *h* округляют до целого значения, если  содержат десятичные знаки, то *h* округляют до значения *d*, содержащего такое же число десятичных знаков. Затем подсчитывается частота *ni*, с которой попадают значения  признака *Х* в *i*-ый интервал. Значение , которое попадает на границу интервала относятся к левому. За начало  первого интервала рекомендуется брать величину

,

конец .

Промежуточные интервалы получают прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала *h*:

, , …, .

Сформированный интервальный вариационный ряд записывают в виде таблицы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | |
| Варианты-интервалы |  |  | ... |  |
| Частоты **ni** | **n1** | **n2** | ... | **nk** |

Интервальный вариационный ряд изображают геометрически в виде гистограммы частот ***ni*** или гистограммы относительных частот.

***Гистограммой***называется ступенчатая фигура, для построения которой по оси *Ox* откладывают отрезки, изображающие частичные интервалы ( варьирования признака *Х*, и на этих отрезках, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами, равными частотам или относительным частотам соответствующих интервалов.

Построение интервального статистического ряда рассмотрим на примере.

**Пример 4**. В результате независимых измерений получены данные:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,1 | 2,3 | 4,2 | 3,7 | 5,5 | 5,3 | 3,4 | 4,7 | 4,4 | 2,6 |
| 4,3 | 4,3 | 5,6 | 4,5 | 4,8 | 5,2 | 4,8 | 4,3 | 3,4 | 4,3 |
| 4,5 | 2,2 | 3,4 | 4,5 | 4,5 | 3,4 | 3,6 | 4,1 | 3,2 | 2,8 |
| 4,3 | 3,5 | 5,3 | 4,6 | 3,9 | 3,5 | 5,7 | 5,1 | 4,2 | 5,8 |
| 2,7 | 4,2 | 4,8 | 3,6 | 3,8 | 5,9 | 3,7 | 2,4 | 4,1 | 5,1 |

1)Объем выборки *n*=50. Для построения интервального ряда возьмем *k*=6.

2)Просматривая приведенные результаты наблюдений, находим наименьшее значение выборки , наибольшее значение выборки . Размах варьирования .

3)Длина частичного интервала , *h*округлим до*d*=0,7.

4) Вычислим= 2,1-0,5∙0,63≈1,8,

получим интервалы

[1,8; 2,5), [2,5; 3,2), [3,2; 3,9), [3,9; 4,6), [4,6; 5,3), [5,3; 6,0].

5)Просматривая результаты наблюдений, определим количество значений признака в каждом полученном интервале. Это можно выполнить в виде таблицы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п**  ***i*** | **Интервалы** | **Рабочее поле** | **Частота *ni*** | **Относительная частота** |
| 1 | [1,8; 2,5) | 1111 | 4 | 0,08 |
| 2 | [2,5; 3,2) | 111 | 3 | 0,06 |
| 3 | [3,2; 3,9) | ~~11111111~~ 11 | 12 | 0,24 |
| 4 | [3,9; 4,6) | ~~111111111111~~ 1 | 16 | 0,32 |
| 5 | [4,6; 5,3) | ~~1111~~ 111 | 8 | 0,16 |
| 6 | [5,3; 6,0] | ~~1111~~ 11 | 7 | 0,14 |
| **Сумма** |  |  | **50** | **1** |

При вычислении относительных частот округление результатов следует проводить таким образом, чтобы общая сумма относительных частот была равна 1.

Построим гистограмму частот интервального статистического ряда.

**Статистические характеристики выборки**

Для дальнейшего изучения изменения значений случайной величины служат числовые характеристики выборки. Эти характеристики вычисляются по статистическим данным, т.е. данным, полученным в результате наблюдений, поэтому их называют статистическими.

Среди статистических характеристик выделяют характеристики положения выборки (медиана, мода, средняя величина), характеристики рассеяния элементов выборки относительно средних величин (дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации).

Пусть выборка объема *n*представлена в виде статического ряда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Варианты***xi*** | ***х1*** | ***х2*** | … | ***хk*** |
| Частоты***ni*** | ***n1*** | ***n2*** | … | ***nk*** |

***МодойМо*** называют варианту, которая имеет наибольшую частоту.

Например, для данного статистического ряда*Мо*=14

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 4 | 8 | 14 | 19 |
| *ni* | 3 | 4 | 6 | 5 |

***МедианойMe***называют варианту, которая делит статистический ряд на равные части.

При нечетном объеме выборки  (нечетном числе столбцов в дискретном статистическом ряде) медиана равна серединному члену статистического ряда. Например, для статистического ряда

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 3 | 5 | 8 | 12 | 15 |
| *пi* | 6 | 2 | 4 | 5 | 8 |

*Me*=8.

При четном объеме выборки  (четном числе столбцов в дискретном статистическом ряде) медиана находится по формуле

.

Здесь — варианта, которая находится слева от середины статистического ряда, а  — слева от нее. Например, для выборки

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 14 |
| *ni* | 3 | 4 | 8 | 2 | 3 | 6 |

.

*Выборочное среднее*.(средний показатель выборки).

***Выборочная дисперсия*** или

.

При малом объеме выборки (*п≤30*) пользуются исправленной выборочной дисперсией .

Существующий недостаток дисперсии, которая является именованной величиной, – несоответствие ее размерности и размерности отдельных единиц числового ряда. Если варианты выражены в метрах, то дисперсия дает квадратные метры; если варианты в килограммах, то дисперсия дает квадрат этой меры, и т.д. Указанного недостатка лишено среднеквадратическое отклонение.

***Выборочное среднее квадратическое отклонение*** или (степень рассеяния значений изучаемого признака относительно средней величины).

Для интервального статистического ряда за *xi* принимают середины каждого интервала (, а за *ni* - соответствующую интервальную частоту. Все статистические характеристики статистического ряда вычисляются по выше приведенным формулам.

***Коэффициент вариации*** представляет собой процентное отношение среднеквадратического отклонения к среднему арифметическому:



Коэффициент вариации позволяет оценивать вариабельность (разброс) признака в нормированных границах. Если его значение не превышает 10%, то можно говорить о слабом разбросе. Если коэффициент вариации находится в пределах 10-20%, разброс средний, если превышает 20%, то разброс вариант считают большим.

Для вычисления статистических характеристик выборки можно использовать готовые компьютерные программы (например, [Microsoft Office](https://ru.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Office) Excel).

***Пример 5***. Определим статистические характеристики для выборки из примера 4.

Представим интервальный статистический ряд в виде дискретного ряда, заменив каждый интервал на соответствующую середину.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п *i* | Интервалы | Середины интервалов  *xi* | Частота *ni* | Относительная частота |
| 1 | [1,8; 2,5) | 2,15 | 4 | 0,08 |
| 2 | [2,5; 3,2) | 2,85 | 3 | 0,06 |
| 3 | [3,2; 3,9) | 3,55 | 12 | 0,24 |
| 4 | [3,9; 4,6) | 4,25 | 16 | 0,32 |
| 5 | [4,6; 5,3) | 4,95 | 8 | 0,16 |
| 6 | [5,3; 6,0] | 5,65 | 7 | 0,14 |
| Сумма |  |  | 50 | 1 |

Вычисления можно оформить в виде таблицы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | *xi* | *ni* | *xi ni* | *xi ni xi =* |
| 1 | 2,15 | 4 | 8,6 | 18,49 |
| 2 | 2,85 | 3 | 8,55 | 24,3675 |
| 3 | 3,55 | 12 | 42,6 | 151,23 |
| 4 | 4,25 | 16 | 68 | 289 |
| 5 | 4,95 | 8 | 39,6 | 196,02 |
| 6 | 5,65 | 7 | 39,55 | 223,4575 |
| Сумма |  | **50** | **206,9** | **902,565** |

Вычислим статистические характеристики для выборки, используя полученные значения:

мода *Мо*=4,25 (т.к. наибольшая частота *n4*=16),

медиана ,

выборочное среднее ,

выборочная дисперсия

среднее квадратическое отклонение .

**Точечная оценка параметров генеральной совокупности**

Любая выборочная характеристика, используемая в качестве приближенного значения генеральной характеристики и получаемая вычислением одного числа (точки), называется ***точечной статистической оценкой*.**

При избрании способа получения точечных оценок учитывается, что они должны обладать свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности.

***Состоятельной оценкой*** называется точечная оценка, которая при неограниченном увеличении объема выборки приближается (сходится) к истинному значению оцениваемой генеральной характеристики. Выборочную среднюю можно считать состоятельной точечной оценкой генерального среднего.

***Несмещенной оценкой*** называется точечная оценка, лишенная систематической ошибки.

*Выборочная средняя* – несмещенная оценка генеральной средней.

*Выборочная оценка дисперсии – смещенная оценка.* Для определения генеральной дисперсии по выборочным данным используют формулу:



и получают смещенную точечную оценку генеральной дисперсии.

Для получения несмещенной точечной оценки генеральной дисперсии из выборочных данных используют формулу расчета исправленной дисперсии:



При больших объемах выборки смещенная и несмещенная (исправленная) дисперсия отличаются незначительно. На практике пользуются исправленной дисперсией, если число наблюдений не превышает 30 вариант , поскольку при большем числе наблюдений влияние становится несущественным.

***Эффективной оценкой*** называют такую точечную оценку, которая гарантирует наименьшее отклонение выборочной оценки от такой же оценки генеральной совокупности.

В расчетах используются исправленное среднеквадратическое отклонение (стандартное отклонение): 

и ошибка выборочной средней (стандартная ошибка среднего или ошибка репрезентативности) .

**Интервальные оценки параметров генеральной совокупности**

***Интервальной оценкой*** называется числовой интервал, который определяется двумя числами – границами интервала, содержащего неизвестный параметр генеральной совокупности.

***Доверительным интервалом*** называется интервал, в котором с той или иной заранее заданной вероятностью находится неизвестный параметр генеральной совокупности.

***Доверительная вероятность*** – вероятность, что событие вероятности  можно считать невозможным,  – уровень значимости. В качестве доверительных вероятностей используют вероятности, близкие к 1 (например, 0,95; 0,99; 0,999).

Для малых выборок  нормально распределенного количественного признака Х доверительный интервал имеет вид*:*

*,*

*где*  – коэффициент Стьюдента, значение которого определяется величиной доверительной вероятности  и числом степеней свободы *(Приложение 4)*.

Для больших выборок  нормально распределенного количественного признака Х доверительный интервал имеет вид:

*,*

*где*  – коэффициент Стьюдента, значение которого определяется величиной доверительной вероятности  и числом степеней свободы *(ПРИЛОЖЕНИЕ5)*.

**Пример 6** Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 63, 77, 68, 77, 77, 71, 104, 102, 93, 83, 81, 72, 74, 74, 79, 79, 82, 82, 84, 84, 85, 85, 84, 85, 85, 87, 87, 86, 95, 95, 86, 86, 88, 88, 88, 91,91, 91, 96, 96. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1. выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения, выбрав *n=40*его значений (согласно своему варианту);
2. составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на интервалов;
3. построить гистограмму распределения;
4. найти числовые характеристики выборочной совокупности (моду, медиану, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, коэффициент вариации);
5. по результатам обработки выборочных данных выдвинуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, например, по виду гистограммы, и выполнить ее проверку, используя правило «»;
6. построить кривую нормального распределения по опытным данным, приняв в формуле Гаусса математическое ожидание  и ;
7. найти доверительный интервал для генеральной средней . Принять уровень значимости 

**Решение:**

1. Выполним ранжирование выборочных данных:



Таким образом, имеем: .

1. Для построения равноинтервального вариационного ряда:

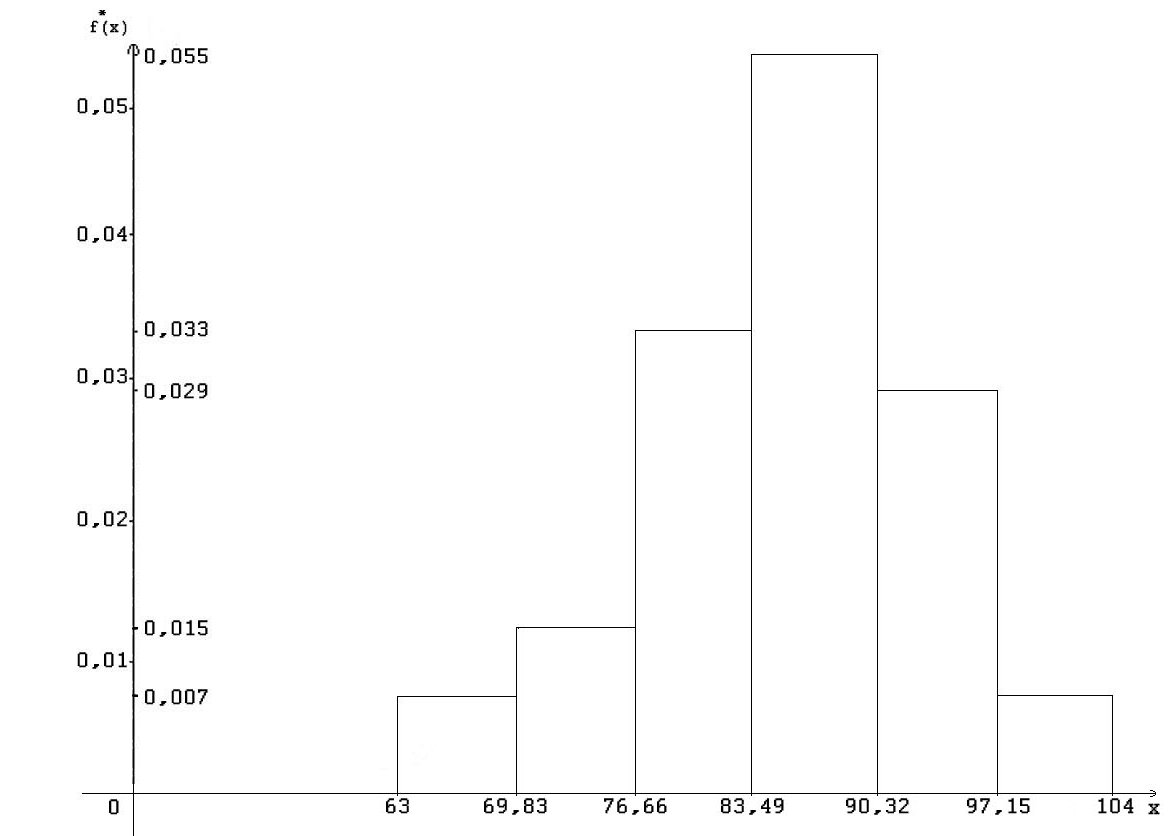
– найдем по формуле Стерджеса число интервалов (обратите внимание, что число интервалов – целое число) : ;

– вычислим ширину интервала ;

– вычисления границ интервалов и пр. выполним в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Границы интервалов | [63;69,83) | [69,83;76,66) | [76,66;83,49) | [83,49;90,32 | 90,32;97,15) | [97,15;104] |  |
| Число попаданий в интервал, | 2 | 4 | 9 | 15 | 8 | 2 | 40 |
| Относительная частота, | 0,05 | 0,1 | 0,225 | 0,375 | 0,2 | 0,05 | 1 |
| Плотность относительной частоты, | 0,007 | 0,015 | 0,033 | 0,055 | 0,029 | 0,007 | –  – |
| Середина интервала, | 66,415 | 73,245 | 80,085 | 86,905 | 93,735 | 100,575 | –  – |

3) Гистограмма распределения представлена на рисунке 1.



*Рис 1. Гистограмма распределения величины Х*

1. вычислим основные числовые характеристики выборки:

* моду: ;
* медиану: ;
* выборочную среднюю:
* 
* выборочную дисперсию:
* 
* выборочное среднеквадратическое отклонение: 
* коэффициент вариации: ,

значение коэффициента вариации означает, что разброс значений признака слабый.

5) Вид гистограммы позволяет выдвинуть гипотезу, о том, что данная выборка принадлежит нормально распределенной генеральной совокупности.

Для проверки выдвинутой гипотезы воспользуемся правилом «трех сигм», согласно которому при нормальном распределении признака все его значения принадлежат интервалу (), а значит .

Проверим это:

;

.

Таким образом, при уровне значимости принимаем выдвинутую гипотезу, т.е. выборка принадлежит нормально распределенной генеральной совокупности.

6) Для построения кривой нормального распределения по опытным данным примем в формуле Гаусса математическое ожидание  и .

Кривая распределения представляет собой график функции плотности вероятности.

Плотность вероятности нормального распределения вычисляется по формуле Гаусса:

,

где  – значение варианты, – значение выборочной средней,  – значение выборочной дисперсии,  – выборочное среднеквадратическое отклонение.

Для построения кривой Гаусса достаточно вычислить координаты 7 точек:

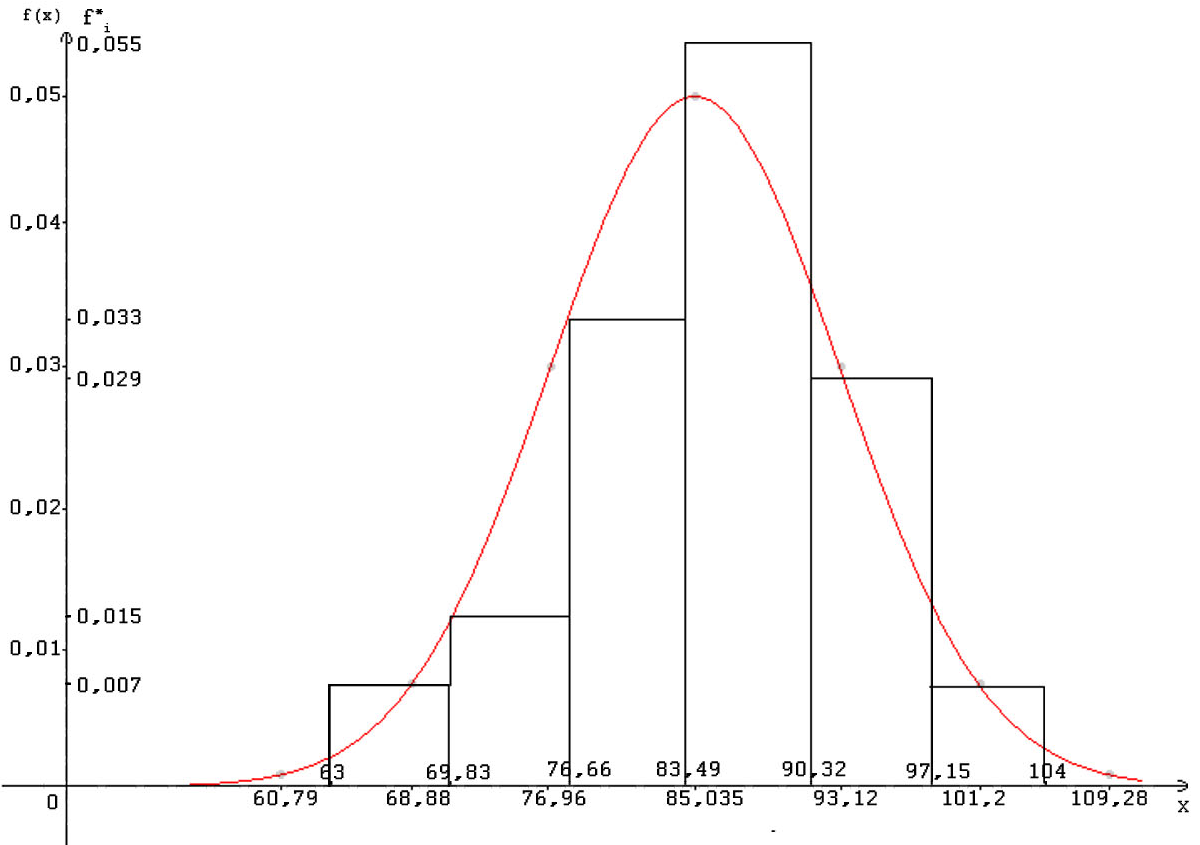
;

;

;

.

Построим график кривой Гаусса на фоне гистограммы (рис 2).



*Рис 2. Кривая Гаусса на фоне гистограммы, построенные по исходным данным*

7) найдем доверительный интервал для генеральной средней. Для этого вычислим:

;

;

,

здесь найдено по заданным значениям и  (или по таблице *ПРИЛОЖЕНИЯ 5.*Таким образом, получаем, что

 или

при уровне значимости .

Т.к. измерения величины Х проводились с точностью до целых, то окончательный результат записываем с точностью до 0.1



# Задачи статистической проверки гипотез

**Статистической гипотезой** называется предположение относительно вида неизвестного распределения или параметров известных распределений наблюдаемой случайной величины.

Ранее рассматривались примеры, где вычислялись выборочные характеристики, были построены полигон или гистограмма. Можно предположить, что данная случайная величина распределена по одному из известных законов. Следующий этап: нужно проверить, что экспериментальные данные соответствуют высказанной гипотезе и принять её. Этот этап называется **проверкой статистической гипотезы**. Алгоритм проверки гипотезы называется **решающим правилом**. Так как гипотеза выдвигалась на основе выборочных данных, то гипотеза будет носить вероятностный характер.

К основным задачам математической статистики относятся:

1. Статистическая проверка гипотез о параметрах распределения. В этом случае предполагается, что закон распределения случайной величины установлен. Пусть совокупность распределена по нормальному закону. Выдвигается гипотеза о математическом ожидании в предполагаемом диапазоне.
2. Статистическая проверка гипотез о законе распределения случайной величины. Гипотезы о виде распределения выдвигаются в условиях недостаточной информации о выборке.

Практически экспериментальные данные при большой выборке приближаются к нормальному закону. Выдвинув такую гипотезу, далее следует найти доверительные интервалы для параметров этого распределения. Проверяемая гипотеза называется **нулевой (основной)**, наиболее правдоподобной по каким-то соображениям, и обозначают её **H0**. Наряду с основной гипотезой рассматривают **альтернативную (конкурирующую)** гипотезу **H1**, противоречащую основной. Выдвинутая нулевая гипотеза нуждается в дальнейшей проверке.

При этом могут быть допущены ошибки двух типов:

1. Ошибка первого рода – отвергнута правильная гипотеза;
2. Ошибка второго рода – принята неправильная гипотеза.

### *Общая схема проверки гипотез*

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближённое распределение которой известно, обозначают её через Z, если она распределена нормально, T – по закону Стьюдента, χ2 – по закону «хи–квадрат». Данная специально подобранная случайная величина называется статистическим критерием или критерием значимости, который в дальнейшем будет обозначаться через Z. Статистический критерий служит для проверки нулевой гипотезы.

Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия принимают отношение исправленных выборочных дисперсий. Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и получают наблюдаемое значение критерия. Наблюдаемым значением критерия Zнабл называют значение критерия, вычисленное по выборкам. Например, если по двум выборкам найдены выборочные дисперсии D1=27; D2=9, то наблюдаемое значение критерия равно отношению большей исправленной дисперсии к меньшей: Zнабл= D1/ D2=27/9=3.

Задачу проверки гипотез можно сформулировать следующим образом.

1. Требуется найти случайную величину Z, которую ещё называют статистикой критерия, удовлетворяющую двум основным требованиям:

а) Значение критерия можно посчитать только на основании выборки.

б) Распределение критерия известно в предположении, что нулевая гипотеза верна.

2. После поиска или выбора статистики находится критическая область. На числовой оси выделяется область, попадание в которую для случайной величины маловероятно. Малая вероятность задаётся, как и в доверительных интервалах, малым числом – α, которое называют уровнем значимости. Вероятность совершить ошибку первого рода (вероятность отвергнуть правильную гипотезу) равна α – уровню значимости.

**Критическойобластью** называют совокупность значений критерия Z, при которых нулевую гипотезу отвергают. Областью принятия гипотез называют совокупность значений критерия Z, при которых нулевую гипотезу принимают.

**Критическимиточками** (границами) – zkp называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают три вида критической области:

* правосторонняя, определяемая неравенством Z > zkp> 0;
* левосторонняя, определяемая неравенством Z < zkp< 0;
* двусторонняя, определяемая неравенством Z < z1< z2< Z.

В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенством ⏐Z⏐> zkp> 0. При отыскании критической области задаются достаточно малой вероятностью – уровнем значимости α и ищут критические точки, исходя из требования, чтобы вероятность того, что критерий Z примет значения, лежащие в критической области, была равна принятому уровню значимости. В результате получают:

* для правосторонней критической области:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | P (Z > zkp) = α; | (1) |

* для левосторонней критической области P (Z < zkp) = α;
* для двусторонней симметричной области P (Z > zkp) = α/2 .

Основной принцип статистической проверки гипотез заключается в следующем:

Если наблюдаемое значение критерия Zнабл, вычисленное по данным выборки, принадлежит критической области, то гипотезу отвергают.

Если наблюдаемое значение не принадлежит критической области, то нет оснований отвергать гипотезу.

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, позволяющие по α найти критические точки zkp, удовлетворяющие требованию (1).

### *Статистическая проверка гипотез о параметрах распределения*

Пусть из генеральной совокупности, распределенной нормально c неизвестной генеральной дисперсией σ20 , извлечена выборка объёма n и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия S2 с k = n – 1 степенями свободы. Требуется установить насколько различаются исправленная выборочная дисперсия и предполагаемая генеральная дисперсия. Нулевую гипотезу можно записать в виде:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | H0: M (S2) = σ20 . | (2) |

В нулевой гипотезе (7.2) принимается, что математическое ожидание исправленной выборочной дисперсии равно предполагаемой генеральной дисперсии.

В качестве статистического критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | χ2набл = (n –1)⋅S2/σ20 . | (3) |

Эта величина случайная, так как в разных опытах S2 принимает различные значения, имеет распределение по закону «Хи – квадрат» χ2 с k = n–1 степенями свободы.

Рассматривается один из возможных случаев.

Нулевая гипотеза:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | H0: σ2 = σ20. | (4) |

Конкурирующая гипотеза:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | H1: σ2>σ20. | (5) |

Для данного случая строится правосторонняя критическая область. При этом ставится условие, чтобы вероятность попадания критерия в эту область будет равна принятому уровню значимости α, с учётом справедливости нулевой гипотезы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | P (χ2>χ2kp (α; k)) = α. | (6) |

Критическую точку χ2kp (α; k) находят по таблице критических точек распределения χ2 (Приложение 3).

Тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством χ2>χ2kp.

Область принятия нулевой гипотезы определяется неравенством χ2<χ2kp. Значение критерия χ2 вычисляется по данным наблюдений по формуле (3) и обозначается χ2набл. Тогда нулевую гипотезу о параметрах распределения:

1. Отвергают при выполнении условия:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | χ2набл>χ2kp. | (7) |

1. Принимают при условии:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | χ2набл<χ2kp. | (8) |

**Пример 1**. Из генеральной совокупности, распределенной нормально, извлечена выборка объёма n = 21 и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия S2 = 25 .

Требуется проверить нулевую гипотезу, которая принимается по (4), предполагая неизвестное значение генеральной дисперсией равным 20.

Нулевая гипотеза: H0: σ2 = σ20 = 20.

Конкурирующая гипотеза принимается по (5). H1: σ2> 20.

Задаётся минимальный уровень значимости α = 0,01.

Таким образом, в задаче дано:

n = 21. S2 = 25. σ20 = 20. α = 0,01.

**Решение:** По формуле (3) можно найти наблюдаемое значение критерия:

χ2набл= (n–1)⋅S2/σ20 =(21–1)∙25/20 = 25.

По таблице критических точек распределения χ2(ПРИЛОЖЕНИЕ 7), зная уровень значимости α = 0,01 и число степеней свободы: k =n–1=20, можно найти критическую точку:

χ2kp (α=0,01; k=20)=37,6.

Так как конкурирующая гипотеза по условию: H1: σ2> 20, то критическая область правосторонняя. Наблюдаемое значение критерия χ2набл=25, критическое значение статистического критерия χ2kp =37,6.

По (7.8), если χ2набл <χ2kp, нулевая гипотеза о параметрах распределения принимается.

В итоге можно сформулировать алгоритм проверки гипотез о параметрах распределения:

1. Выбрать нулевую – H0 и конкурирующую – H1 гипотезы.
2. Задать уровень значимости α.
3. Выбрать статистический критерий χ2.
4. По формуле (7.3) найти χ2набл.
5. Найти критическую точку χ2kp (α; k) по таблице ПРИЛОЖЕНИЯ7.
6. Принять решение по выдвинутой гипотезе.

Решение носит вероятностный характер. Поэтому, если выдвинутая гипотеза не подтверждается, то делают заключение, что данные эксперимента не подтверждают гипотезу H0.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

**ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

**Задача 2**. (Сочетания с повторениями)

**Решение**: используем формулусочетаний с повторениями:формулуспособами можно выбрать 3 монеты из кошелька.

**Ответ**: 20

**Ответы на вопросы:**

1) Да (т.к. количество извлекаемых монет (3 шт.) меньше видов монет (4 вида));

2) Самый «дешёвый» набор содержит 3 рублёвые монеты, а самый «дорогой» – 3 десятирублёвые.

**Задача 2**:(Размещения с повторениями)

**Решение**:способами можно составить цифровую комбинацию автомобильного номера, при этом одну из них (000) следует исключить:.

способами можно составить буквенную комбинацию автомобильного номера.По правилу умножения комбинаций, всего можно составить:

автомобильных номера(**каждая**цифровая комбинация сочетается**с каждой**буквенной комбинацией).

**Ответ**: 1726272

**Задача 4** *(классическое определение вероятности)*

**Решение**: найдём общее число исходов:

способами можно выбрать место, на котором расположена сомнительная цифра **и на каждом**из этих 4 мест могут располагаться 2 цифры (семёрка или восьмёрка). По правилу умножения комбинаций, общее число исходов:

.

Как вариант, в решении можно просто перечислить все исходы (благо их немного):

7555, 8555, 5755, 5855, 5575, 5585, 5557, 5558

Благоприятствующий исход один (правильный пин-код).

Таким образом, по классическому определению:

– вероятность того, что абонент авторизируется с 1-й попытки.

**Ответ***:*

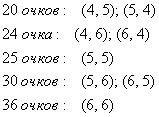
**Задача 6***: (классическое определение вероятности)*

**Решение**: найдём общее количество исходов:

способами могут выпасть цифры на 2 кубиках.

а) Рассмотрим событие: *А*– при броске двух игральных костей произведение очков будет равно семи. Для данного события не существует благоприятствующих исходов, по классическому определению вероятности:, т.е. это событие является невозможным.

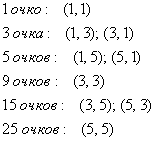
б) Рассмотрим событие:*B*– при броске двух игральных костей произведение очков окажется не менее 20. Данному событию благоприятствуют следующие исходы:



Итого: 8. По классическому определению:

– искомая вероятность.

в) Рассмотрим противоположные события:*C*– произведение очков будет чётным;– произведение очков будет нечётным.Перечислим все исходы, благоприятствующие событию:



Итого: 9 благоприятствующих исходов.По классическому определению вероятности:. Противоположные события образуют полную группу, поэтому:– искомая вероятность.

**Ответ**:а) 0; б) ; в) .

**Задача 8:***(классическое определение вероятности)*

**Решение**: вычислим общее количество исходов:способами могут упасть 10 монет.Другой путь:способами может упасть 1-я монета**и**: способами может упасть 2-я монета**и** … **и**: способами может упасть 10-я монета. По правилу умножения комбинаций, 10 монет могут упасть: способами.

а) Рассмотрим событие: *А*– на всех монетах выпадет орёл. Данному событию благоприятствует единственный исход, по классическому определению вероятности:.

б) Рассмотрим событие:*В*– на 9 монетах выпадет орёл, а на одной – решка.Существуетмонет, на которых может выпасть решка. По классическому определению вероятности:.

в) Рассмотрим событие:*С*– орёл выпадет на половине монет.Существуетуникальных комбинаций из пяти монет, на которых может выпасть орёл. По классическому определению вероятности:

**Ответ**: а) б) в)

**Задача 12***: (классическое определение вероятности)*

**Решение**:всего: 15 + 5 = 20 деталей в ящике. Вычислим общее число исходов:

способами можно извлечь 2 детали из ящика.

а) Рассмотрим событие: *А*– обе извлечённые детали будут качественными.

а) Рассмотрим событие: *А*– обе извлечённые детали будут качественными.

способами можно извлечь 2 качественные детали.

По классическому определению вероятности:

б) Рассмотрим событие:*B*– одна деталь будет качественной, а одна – бракованной.

способами можно извлечь 1 качественную деталь**и**1бракованную.

По классическому определению:.

в) Рассмотрим событие:C– обе извлечённые детали бракованы.

способами можно извлечь 2 бракованные детали.По классическому определению:

**Проверка**: вычислим сумму вероятностей событий, образующих полную группу:, что и требовалось проверить.

**Ответ**:а) ; б) ; в) .

**Задача 14***:(классическое определение вероятности)*

**Решение**: найдём общее число исходов:

способами можно сдать 5 карт.

а)способами можно сдать две десятки;

способами можно сдать двух валетов;

Количество других карт в колоде: 52 – 4 – 4 = 44.

способами можно сдать другую карту.

По правилу умножения комбинаций:способами можно сдать 5 карт, среди которых будет пара десяток и пара валетов.По классическому определению:

б) В колоде: 52 / 4 = 13 карт каждой масти.

способами можно сдать 5 карт какой-то одной из мастей.По правилу сложения комбинаций:способами можно сдать флеш (без разницы какой масти).По классическому определению:

в) Четыре карты одного номинала можно сдать 13 способами (2222, 3333, 4444, …, КККК, ТТТТ). Кроме того, **для каждого**из этих 13 случаев пятую карту можно сдатьспособами. Таким образом, по теореме умножения комбинаций, каре можно сдатьспособами.По классическому определению:

**Ответ**: а) ; б) ; в)

Из перечисленных комбинаций вероятнее всего получить **флеш**.

**Задача 2**:(геометрическое определение вероятности)

***Решение***: используем геометрическое определение вероятности. Общему числу исходов соответствует участок длинойL=70–40=30км, благоприятствующему количеству исходов – участок длинойl = 55-50=5 км. Таким образом:– вероятность того, что обрыв провода произошёл между 50-м и 55-м километрами линии.

**Ответ**: .

**Задача 4**:(геометрическое определение вероятности)

**Решение**: общему количеству исходов соответствует площадь круга:.

Площадь прямоугольного треугольника равна полупроизведению его катетов:. По условию поставленная в круг точка***не***должна попасть в треугольник, поэтому благоприятствующее число исходов выражается разностью. По геометрическому определению:– вероятность того, что поставленная в круг точка не попадёт в треугольник.

**Ответ**:

**Задача 2**:(*теоремы сложения*)

**Решение**:всего: 10 + 6 = 16 пуговиц в коробке способами можно извлечь 2 пуговицы из коробки;

способами можно извлечь 2 красные пуговицы;способами можно извлечь 2 синие пуговицы.По классическому определению:– вероятность того, что из коробки будут извлечены две красные пуговицы;– вероятность того, что из коробки  будут извлечены две синие пуговицы.По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

– вероятность того, что из коробки будут извлечены две одноцветные пуговицы.

**Ответ**: 0,5

**Задача 2**:*(теорема умножения вероятностей)*

**Решение**: рассмотрим события:– из 1-й, 2-й и 3-й урны соответственно будет извлечён белый шар. По классическому определению вероятности:. Тогда вероятности извлечения чёрного шара из соответствующих урн равны:

.

а) Рассмотрим событие:B– из каждой урны будет извлечено по 1 белому шару.Данное событие выражается в виде произведения(из 1-й урны будет извлечён БШ***и***из 2-й урны будет извлечён БШ***и***из 3-й урны будет извлечён БШ).По теореме умножения вероятностей независимых событий:

б) Рассмотрим событие*C*– из каждой урны будет извлечено по 1 чёрному шару.По теореме умножения вероятностей независимых событий:*.* Рассмотрим событие*D*– все три шара будут одного цвета. Данное событие состоит в двух несовместных исходах:D = B+C(будут извлечены 3 белых***или***3 чёрных шара). По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

**Ответ**:а) 0б216; б) 0б28.

**Задача 4**: *(теорема умножения вероятностей)*

**Решение**:рассмотрим следующие события:– при возгорании сработает 1-й датчик;– при возгорании сработает 2-й датчик.По условию:

Вычислим вероятности противоположных событий:

а) Рассмотрим событие:*B*– при пожаре оба датчика откажут.По теореме умножения вероятностей независимых событий:

б) Рассмотрим событие:C– при пожаре оба датчика сработают.По теореме умножения вероятностей независимых событий:

в) Рассмотрим событие:*D*– при пожаре сработает только один датчик.События*B, C, D*образуют полную группу, следовательно:

Проверим результат с помощью прямого вычисления. СобытиеDсостоит в 2 несовместных исходах: 1-й датчик сработает**и**2-й откажет**или**1-й откажет**и**2-й сработает. Таким образом:. По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

**Ответ**:а) 0,15; б) 0,35; в) 0,5.

**Задача 5**: (*теорема умножения вероятностей*)

**Решение**: по условию:– вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле. Тогда вероятность его промаха:. Обозначим через– вероятности попадания и промаха 2-го стрелка.По теореме умножения вероятностей независимых событий:– вероятность того, что оба стрелка промахнутся.По условию, таким образом:. В результате:

**Ответ**: 0,6.

**Задача 6**:*(теорема умножения вероятностей)*

**Решение**: по условию– вероятности попадания в цель из соответствующих орудий. Тогда соответствующие вероятности промаха:

1) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

– вероятность того, что будет три промаха.Тогда:вероятность того, что хотя бы один снаряд попадет в цель.

2) Событие «только два снаряда попадут в цель» состоит в трёх несовместных исходах:попадание из 1-го**и**2-го орудий**и**промах из 3-го**или**попадание из 1-го**и**промах из 2-го**и**попадание из 3-го орудия**или**промах из 1-го**и**попадание из 2-го**и**3-го орудий.По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

– вероятность того, что только два снаряда попадут в цель.

3) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

– вероятность того, что все три снаряда попадут в цель.По теореме сложения вероятностей несовместных событий:– вероятность того, что цель будет поражена не менее двух раз

**Ответ**: 1) 0,976; 2) 0,452; 3) 0,788.

**Задача 2**: *(условная вероятность)*

**Решение**: рассмотрим события:– при 1-й, 2-й, 3-й и 4-й попытках соответственно будет извлечён выигрышный билет.

а) Пусть событиесостоялось. Тогда в конвертеосталось 9билетов, среди которых 2 выигрышных. По классическому определению:

– вероятность того, что 2-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого извлечён выигрышный билет.

б) Если произошли события, то в конвертеосталось 8билетов, среди которых 1 выигрышный. По классическому определению:– вероятность того, что 3-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого было извлечено два выигрышных билета.

в) Если произошли события, то в конверте не осталось выигрышных билетов. По классическому определению:– вероятность того, что 4-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого были извлечены три выигрышных билета.

**Ответ**:а) ; б) ; в) 0.

**Задача 4**:*(условная вероятность)*

***Решение***: всего: 4 туза в колоде. Рассмотрим события*A*– первой картой будет извлечён туз,*B*– 2-й картой будет извлечён туз. По классическому определению вероятности:. В случае осуществления события*A*в колоде останется 35 карт, среди которых 3 туза, поэтому:– вероятность того, что 2-й картой будет извлечён туз, при условии, что до этого был извлечен туз.По теореме умножения вероятностей зависимых событий:– вероятность того, что из колоды в 36 карт будут извлечены два туза подряд.

**Ответ**:*.*

**Задача 5**:*(условная вероятность)*

**Решение**: всего: 6 + 5 + 4 = 15 шаров в урне. Рассмотрим следующие события:A– 1-й шар будет черным;*B*– 2-й шар будет красным;C– 3-й шар будет белым.

а) По условию, событияAиBуже произошли, а значит, в урне осталось 13 шаров, среди которых 4 белых. По классическому определению:– вероятность того, что 3-й шар будет белым при условии, что до этого был извлечён черный и красный шар.

б) По классическому определению:. Предположим, что событие*A*произошло, тогда в урне осталось 14 шаров, среди которых 5 красных. По классическому определению:– вероятность того, что 2-й шар будет красным при условии, что 1-й был чёрным.По теореме умножения вероятностей зависимых событий:–вероятность того, что первый шар окажется черным***и***второй – красным***и***третий – белым

**Ответ**:а) ; б)

**Задача 7**:*(условная вероятность)*

**Решение**: рассмотрим события:A– хотя бы одному из пяти студентов достанется билет с простыми вопросами;– всем пятерым достанутся непростые билеты.Данные события являются противоположными, поэтому.По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

Таким образом:– искомая вероятность.

**Ответ**:

**Задача 9**:*(условная вероятность)*

**Решение**: рассмотрим зависимое событие*A*(после перемещения двух шаров из 2-й урны будет извлечён белый шар) и предшествующие емунесовместные гипотезы:B1– из 1-й урны во 2-ю будут переложены два белых шара;B2– будет переложен белый и чёрный шар;B3– будут переложены два чёрных шара.

способами можно извлечь два шара из первой урны.

1)способами можно извлечь два белых шара из 1-й урны. По классическому определению:– вероятность того, что из первой урны будут извлечены и переложены 2 белых шара. При осуществлении данной гипотезы во 2-й урне станет 6 белых и 4 чёрных шара. По классическому определению:– вероятность того, что из 2-й урны будет извлечен белый шар при условии, что туда переложены 2 белых шара.

2)способами можно извлечь белый и черный шар из 1-й урны. По классическому определению:– вероятность того, что из первой урны будут извлечены и переложены белый и черный шар. При осуществлении данной гипотезы во второй урне станет 5 белых и 5 черных шаров. Таким образом:– вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар при условии, что туда переложены белый и чёрный шар.

3)способом можно извлечь два черных шара из 1-й урны. По классическому определению:– вероятность того, что из первой урны будут извлечены и переложены 2 черных шара. При осуществлении данной гипотезы во второй урне станет 4 белых и 6 черных шаров. Таким образом:– вероятность извлечения белого шара из второй урны при условии, что туда переложено два черных шара.

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей зависимых событий:– вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар.

**Ответ**:.

**Задача 2**:*(формула полной вероятности)*

***Решение***: рассмотрим гипотезы, состоящие в том, что стрелок выберет 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю и 5-ю винтовку соответственно. Выбор любой винтовки равновозможен, следовательно:.

Рассмотрим событие*A*– стрелок попадёт в мишень из наугад взятой винтовки.По условию:

По формуле полной вероятности:=0,58.

**Ответ**: 0,58

**Задача 4**:*(формула полной вероятности)*

**Решение**: из условия находим:– вероятности того, что двигатель работает на холостом ходу, в нормальном и форсированном режимах соответственно.По условию– вероятности выхода из строя двигателя для холостого, нормального и форсированного режима соответственно.По формуле полной вероятности:– вероятность того, что двигатель выйдет из строя.

**Ответ**: 0,215

**Задача 6**:*(формула полной вероятности)*

**Решение**: рассмотрим две гипотезы:

– наудачу взятое изделие будет из 1-й партии;– наудачу взятое изделие принадлежит 2-й партии.Всего: 4000 + 6000 = 10000 изделий на складе. По классическому определению:.

Рассмотрим событие:– наудачу взятое со склада изделие будет нестандартным.Из условия находим:– вероятности того, что изделие из соответствующих партий будет нестандартным.По формуле полной вероятности:

**Примечание**: данную вероятность легко найти, пользуясь результатом Задачи 5:

Пусть событиепроизошло (извлечено нестандартное изделие).

По формулам Байеса:

а)– вероятность того, что выбранное нестандартное изделие принадлежит 1-й партии;

б)– вероятность того, что выбранное нестандартное изделие принадлежит 2-й партии.

**Ответ**:а) ; б)

**Задача 8***:(формула полной вероятности)*

***Решение***: всего: 3 + 19 + 3 = 25 студентов в группе. По классическому определению:– вероятности того, что экзаменующийся студент имеет высокий, средний и низкий уровень подготовки соответственно.Контроль:*.* По условию:– вероятности успешной сдачи экзамена для студентов соответствующих уровней подготовки.По формуле полной вероятности:– вероятность того, что произвольно выбранный студент сдаст экзамен.Пусть студент сдал экзамен.

По формулам Байеса:а)– вероятность того, что студент, сдавший экзамен, был подготовлен очень хорошо. Объективная исходная вероятностьоказывается завышенной, поскольку почти всегданекоторым «середнячкам» везёт с вопросами и они отвечают очень сильно, что вызывает ошибочное впечатление безупречной подготовки.

б)– вероятность того, что студент, сдавший экзамен, был подготовлен средне. Исходная вероятностьоказывается чуть завышенной, т.к. студентов со средним уровнем подготовки обычно большинство, кроме того, сюда преподаватель отнесёт  неудачно ответивших «отличников», а изредка и плохо успевающего студента, которому крупно повезло с билетом.

в)– вероятность того, что студент, сдавший экзамен, был подготовлен плохо. Исходная вероятностьпереоценилась в худшую сторону. Неудивительно.

Проверка:

**Ответ**:а) б)

**Задача 3**:(формула Бернулли)

**Решение**: используем формулу Бернулли:, в данной задаче:

– всего испытаний;– вероятность выпадения «пятёрки» в каждом испытании;– вероятность того, что «пятёрка» не выпадет (для каждого испытания).

а)– вероятность того, что в результате 6 бросков кубика «пятёрка» не появится.

б)– вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 2 раза.

в)– вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 5 раз.

**Ответ**:а) б) .

**Задача 5**:(формула Бернулли)

**Решение**: в данной задаче речь идёт о независимых испытаниях, при этом:– всего испытаний;– вероятность выпадения орла в каждом испытании;– вероятность выпадения решки в каждом испытании.Найдём наивероятнейшее количествопоявлений орла:

Так как– целое число, то существуют два наивероятнейших значения:и . Используя формулу Бернулли, вычислим соответствующие вероятности:

**Ответ**: 4 и 5;.

**Задача 7**:(формула Бернулли)

**Решение**: используем формулу Бернулли: , в данном случае:– всего выстрелов;– вероятность попадания в цель при каждом выстреле;– вероятность промаха при каждом выстреле.По теореме сложения вероятностей несовместных событий:– вероятность того, что в серии из 8 выстрелов будет ни одного**или**1 попадание.Найдём вероятность противоположного события: =0,18689527 – вероятность того, что цель будет поражена хотя бы два раза.

**Ответ**:

**Задача 5**:(формула Пуассона)

**Решение**: предполагая поток простым, используем формулу Пуассона:

а) Вычислим– среднее количество автомобилей, проходящих таможенный досмотр, в течение 2 часов.По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

– вероятность того, что за 2 часа досмотр пройдут от 7 до 10 автомобилей

б) Вычислим– среднее количество автомобилей, проходящих досмотр, за 1/2 часа.По формуле Пуассона:– вероятность того, что за полчаса таможенный досмотр пройдёт только один автомобиль.

**Ответ**: а), б).

## Задача 2:(***Локальная теорема Лапласа*)**

**Решение**:по условию:*n=100*– всего новорожденных;*p=0,52*– вероятность рождения мальчика. Тогда:q=1-p=1-0,52=0,48– вероятность рождения девочки.Используем локальную теорему Лапласа:

а)m=40

**Примечание**: x обычно округляют до 2 знаков после запятой.

.

– вероятность того, что среди 100 новорожденных будет ровно 40 мальчиков.

б)m=50

.

– вероятность того, что среди 100 новорожденных будет ровно 50 мальчиков.

в)*m=50*

.

– вероятность того, что среди 100 новорожденных будет ровно 30 девочек.

**Ответ**: а), б); в) .

**Задача 2**:*(Интегральная теорема Лапласа)*

**Решение**:используем интегральную теорему Лапласа:

В данной задаче:*n=2500*– всего ламп в здании;*m1=1250*– минимальное количество одновременно включенных ламп;*m2 =1275*– максимальное количество одновременно включенных ламп;*p=0,5*– вероятность того, что лампа включена (для каждой из ламп);q=1-p=0,5– вероятность противоположного события.Вычислим аргументы:

Значения функции *Ф(х)* найдём по соответствующей таблице ПРИЛОЖЕНИЯ 4:

– вероятность того, что вечером будет включено не менее 1250 и не более 1275 ламп.

**Ответ**:.

**Задача 4**:*(Интегральная теорема Лапласа)*

**Решение**: в данной задаче:n=100– всего студентов;p=0,8– вероятность присутствия студента на лекции;q=1-p=1-0,8=0,2– вероятность отсутствия студента на лекции.

а) Найдём количество студентов, соответствующее 85 и 90 процентам:

Используем интегральную теорему Лапласа:

В данном случае:

Таким образом:– вероятность того, что на лекции будут присутствовать 85-90% от 100 студентов.

б) Используем локальную теорему Лапласа:

В данном случае

– вероятность того, что на лекции будет присутствовать половина студентов (событие практически невозможно).

в) Используем интегральную теорему Лапласа:

В результате:– вероятность того, что на лекции будут присутствовать не менее 72 студентов.

**Ответ**:а) б) ; в) .

## Задача 2*:(****Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности)***

**Решение***:*используем формулу. В данной задаче:.

а) Если, то:

– вероятность, того, что при 800 испытаниях относительная частота появления события*A*отклонится от вероятности данного события не более чем на 0,05.

Это событие является практически достоверным.

б) Если, то:

– вероятность, того, что при 800 испытаниях относительная частота появления события*A*отклонится от вероятности данного события не более чем на 0,03.

**Ответ**:а) б) .

## Задача 3*:(****Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности)***

**Решение**: используем формулу . В данной задаче: .

Таким образом:

– вероятность, того, что относительная частота выигрыша отклонится от теоретической вероятности не более чем на 0,001.

**Ответ**:

## Задача 5*:(****Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности)***

**Решение**: используем формулу . В данной задаче: .

Таким образом:

.

**Ответ**: необходимо произвести не менее 259 опытов.

**Пример 3**.(*Закон распределения дискретной случайной величины*)

**Решение**: по условиюp=0,7– вероятность попадания в мишень. Тогда:q=1-0,7=0,3– вероятность промаха.

СоставимW– закон распределения попаданий при двух выстрелах:

– ни одного попадания. Потеореме умножения вероятностей независимых событий:.

– одно попадание. Потеоремам сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий:.

– два попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:.

Проверка: 0,09 + 0,42 + 0,49 = 1

**Ответ**:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  | 0,09 | 0,42 | 0,49 |

## Пример 1. (*Математическое ожидание дискретной случайной величины)*

**Решение**: поскольку игрок выигрывает в 18 случаях из 37, то закон распределения его выигрыша имеет следующий вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 200 |
|  |  |  |

Вычислим математическое ожидание:

*.*

**Ответ**:Таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.

## Пример 2. (*Математическое ожидание дискретной случайной величины)*

**Решение**: по определению математического ожидания:

Выполним проверку:

, что и требовалось проверить.

**Ответ**:.

# Пример 1.(***Дисперсия дискретной случайной величины)***

**Решение**:вычислим математическое ожидание:

.

Вычислим дисперсию по определению:

Заполним расчётную таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | 0 | 3 | 7 |
|  | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |
|  | -3,5 | -1,5 | 1,5 | 5,5 |
|  | 12,25 | 2,25 | 2,25 | 30,25 |
|  | 4,9 | 0,225 | 0,675 | 6,05 |

Таким образом:.

**Ответ**:

**Пример 4***.(многоугольник и функция распределения ДСВ)*

**Решение**:найдём вероятности того, что соответствующие задачи будут решены неверно:

Используя теоремы умножения независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины*X*– числа правильно решенных задач в билете:

1)(все задачи решены неверно)

2) (только одна задача из трёх решена верно)

3) (две задачи из трёх решены верно)

(все задачи решены правильно)

.

Таким образом, искомый закон распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 0,006 | 0,092 | 0,398 | 0,504 |

Контроль: 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1

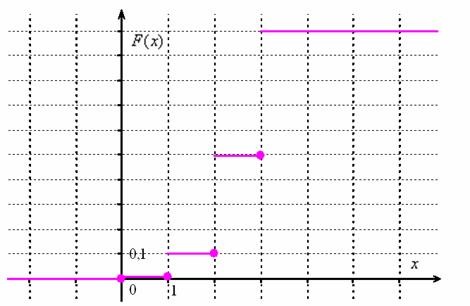
Вычислими. Заполним расчетную таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | Суммы |
|  | 0,006 | 0,092 | 0,398 | 0,504 | 1 |
|  | 0 | 0,092 | 0,796 | 1,512 | 2,4 |
|  | 0 | 0,092 | 1,592 | 4,536 | 6,22 |

Математическое ожидание:.

Дисперсия:.

Составим функцию распределения:



Найдём вероятность– того, что студент сдаст зачёт:

.

**Пример 2***(распределение Пуассона)*

**Решение***:* случайная величина*X* принимает значения с вероятностями . По условию,*a=1*. Найдём вероятность того, что случайная величина примет нулевое значение: . По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

– вероятность того, что случайная величина примет положительное значение

**Ответ**:.

**Пример 2***(гипергеометрическое распределение)*

**Решение***:*способами можно извлечь две детали.Случайная величинаXможет принять одно из следующих значений:.**Примечание**: значениеневозможно, т.к. в ящике только 1 нестандартная деталь.Составим закон распределения этой случайной величины:

1. способами можно извлечь 1 стандартную и 1 нестандартную деталь. По классическому определению:
2. способами можно извлечь 2 стандартные детали.

Контроль:.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 |
|  | 0,1 | 0,9 |

**Ответ**: закон распределения количества стандартных деталей в данной выборке:

**Пример 3**.(***Непрерывная случайная величина (НСВ) и её функция распределения)***

***Решение***:1) По свойству функции плотности распределения:

В данной задаче:

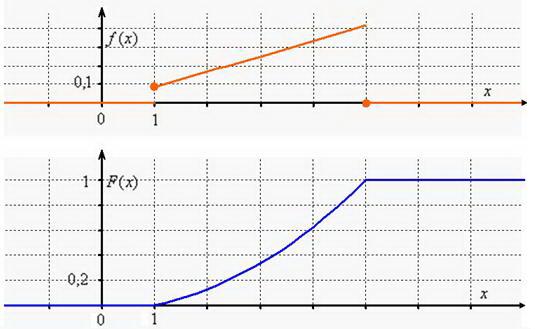
Таким образом, искомая плотность:

1. Функцию распределения найдём с помощью формулы

* На промежутке, поэтому:
* На интервале,
* И, наконец, на,

Объединим вычисленные значения функции:

1. Выполним чертежи:

**

1. Найдём вероятность того, что случайная величинаXпримет значение из промежутка:

*.*

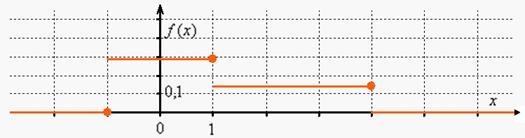
**Пример 4**.(***Непрерывная случайная величина (НСВ) и её функция распределения)***

**Решение**: используем условие нормировки:

В данном случае:

Таким образом, функция плотности распределения:

Выполним чертеж:

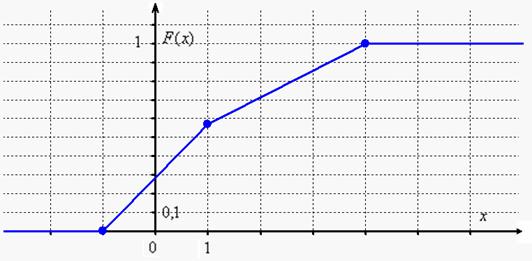
**

Составим функцию распределения вероятностей

* На промежутке, поэтому:
* На интервале,
* На интервале ,
* На интервале

Объединим вычисленные значения функции:

Выполним чертеж:

**

Вычислим*.*– вероятность того, что случайная величинаXпримет значение из интервала.

**Пример 2.**(***Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины)***

**Решение**: представимв аналитическом виде. Составимуравнение прямой по точками:

Таким образом:

Покажем, чтоможет служить плотностью вероятностей НСВX

1) функцияна всей числовой прямой;

Таким образом,может служить плотностью вероятностей непрерывной случайной величиныX

Вычислим математическое ожидание:

Дисперсию вычислим по формуле:

В данном случае:

Среднее квадратическое отклонение:

# Пример 3.(***Равномерное распределение вероятностей****)*****

**Решение**: случайная величинаTимеет равномерное распределение с плотностью:

Вычислим вероятность того, что пассажир будет ожидать автобус не более 3 минут:

Составим функцию распределения:

* На промежутке, поэтому:
* На интервале,
* И, наконец, на,

Объединим вычисленные значения функции:

Функцияописывает вероятность того, что пассажир дождётся очередной автобус за время, МЕНЬШЕЕ, чемt. При увеличенииtот 0 до 7 эта вероятность линейно возрастает нав минуту и по достижениюдостоверным становится тот факт, пассажир автобуса дождался.

**Пример 4** (нормальный закон распределения вероятностей)

**Решение**:используем формулу:*Р*(< δ)=2Ф()=γ.

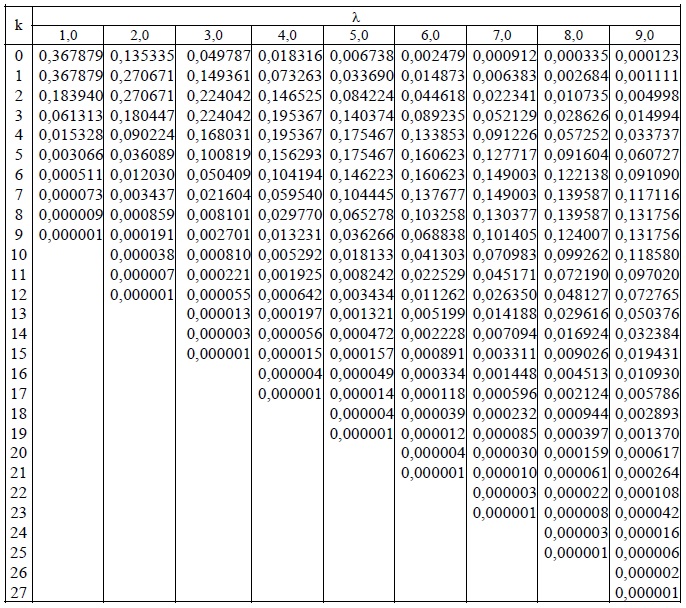
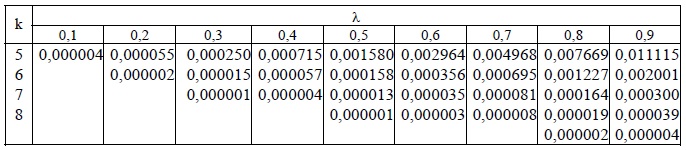
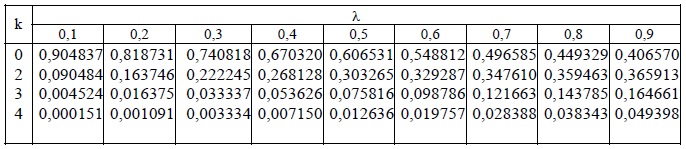
В данной задаче, таким образом:

Длина искомого интервала составляет.

**Ответ**: 20 мм

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2**

***Таблица значений функции Пуассона***ÑÐ¾ÑÐ¼ÑÐ»Ð°



**ПРИЛОЖЕНИЕ 3**

***Таблица значений функции***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0  0,1  0,2  0,3  0,4  0,5  0,6  0,7  0,8  0,9  1,0  1,1  1,2  1,3  1,4  1,5  1,6  1,7  1,8  1,9  2,0  2,1  2,2  2,3  2,4  2,5  2,6  2,7  2,8  2,9  3,0  3,1  3,2  3,3  3,4  3,5  3,6  3,7  3,8  3,9 | 0,3989  3970  3910  3814  3683  3521  3332  3123  2897  2661  0,2420  2179  1942  1714  1497  1295  1109  0940  0790  0656  0,0540  0440  0355  0283  0224  0175  0136  0104  0079  0060  0,0044  0033  0024  0017  0012  0009  0006  0004  0003  0002 | 3989  3965  3902  3802  3668  3503  3312  3101  2874  2637  2396  2155  1919  1691  1476  1276  1092  0925  0775  0644  0529  0431  0347  0277  0219  0171  0132  0101  0077  0058  0043  0032  0023  0017  0012  0008  0006  0004  0003  0002 | 3989  3961  3894  3790  3652  3485  3292  3079  2850  2613  2371  2131  1895  1669  1456  1257  1074  0909  0761  0632  0519  0422  0339  0270  0213  0167  0129  0099  0075  0056  0042  0031  0022  0016  0012  0008  0006  0004  0003  0002 | 3988  3956  3885  3778  3637  3467  3271  3056  2827  2589  2347  2107  1872  1647  1435  1238  1057  0893  0748  0620  0508  0413  0332  0264  0208  0163  0126  0096  0073  0055  0040  0030  0022  0016  0011  0008  0005  0004  0003  0002 | 3986  3951  3876  3765  3621  3448  3251  3034  2803  2565  2323  2083  1849  1626  1415  1219  1040  0878  0734  0608  0498  0404  0325  0258  0203  0158  0122  0093  0071  0053  0039  0029  0021  0015  0011  0008  0005  0004  0003  0002 | 3984  3945  3867  3752  3605  3429  3230  3011  2780  2541  2299  2059  1826  1604  1394  1200  1023  0863  0721  0596  0488  0396  0317  0252  0198  0154  0119  0091  0069  0051  0038  0028  0020  0015  0010  0007  0005  0004  0002  0002 | 3982  3939  3857  3739  3589  3410  3209  2989  2756  2516  2275  2036  1804  1582  1374  1182  1006  0848  0707  0584  0478  0387  0310  0246  0194  0151  0116  0088  0067  0050  0037  0027  0020  0014  0010  0007  0005  0003  0002  0002 | 3980  3932  3847  3726  3572  3391  3187  2966  2732  2492  2251  2012  1781  1561  1354  1163  0989  0833  0694  0573  0468  0379  0303  0241  0189  0147  0113  0086  0065  0048  0036  0026  0019  0014  0010  0007  0005  0003  0002  0002 | 3977  3925  3836  3712  3555  3372  3166  2943  2709  2468  2227  1989  1758  1539  1334  1145  0973  0818  0681  0562  0459  0371  0297  0235  0184  0143  0110  0084  0063  0047  0035  0025  0018  0013  0009  0007  0005  0003  0002  0001 | 3973  3918  3825  3697  3538  3352  3144  2920  2685  2444  2203  1965  1736  1518  1315  1127  0957  0804  0669  0551  0449  0363  0290  0229  0180  0139  0107  0081  0061  0046  0034  0025  0018  0013  0009  0006  0004  0003  0002  0001 |

**ПРИЛОЖЕНИЕ 4**

***Таблица значений функции =***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | *Ф(x)* | *x* | *Ф(x)* | *x* | *Ф(x)* | *x* | *Ф(x)* |
| 0,01  0,01  0,02  0,03  0,04  0,05  0,06  0,07  0,08  0,09  0,10  0,11  0,12  0,13  0,14  0,15  0,16  0,17  0,18  0,19  0,20  0,21  0,22  0,23 | 0,0000  0,0040  0,0080  0,0120  0,0160  0,0199  0,0239  0,0279  0,0319  0,0359  0,0398  0,0438  0,0478  0,0517  0,0557  0,0596  0,0636  0,0675  0,0714  0,0753  0,0793  0,0832  0,0871  0,0910 | 0,24  0,25  0,26  0,27  0,28  0,29  0,30  0,31  0,32  0,33  0,34  0,35  0,36  0,37  0,38  0,39  0,40  0,41  0,42  0,43  0,44  0,45  0,46  0,47 | 0,0948  0,0987  0,1026  0,1064  0,1103  0,1141  0,1179  0,1217  0,1255  0,1293  0,1331  0,1368  0,1406  0,1443  0,1480  0,1517  0,1554  0,1591  0,1628  0,1664  0,1700  0,1736  0,1772  0,1808 | 0,48  0,49  0,50  0,51  0,52  0,53  0,54  0,55  0,56  0,57  0,58  0,59  0,60  0,61  0,62  0,63  0,64  0,65  0,66  0,67  0,68  0,69  0,70  0,71 | 0,1844  0,1879  0,1915  0,1950  0,1985  0,2019  0,2054  0,2088  0,2123  0,2157  0,2190  0,2224  0,2257  0,2291  0,2324  0,2357  0,2389  0,2422  0,2454  0,2486  0,2517  0,2549  0,2580  0,2611 | 0,72  0,73  0,74  0,75  0,76  0,77  0,78  0,79  0,80  0,81  0,82  0,83  0,84  0,85  0,86  0,87  0,88  0,89  0,90  0,91  0,92  0,93  0,94  0,95 | 0,2642  0,2673  0,2703  0,2734  0,2764  0,2794  0,2823  0,2852  0,2881  0,2910  0,2939  0,2967  0,2995  0,3023  0,3051  0,3078  0,3106  0,3133  0,3159  0,3186  0,3212  0,3238  0,3264  0,3289 |
| *x* | *Ф(x)* | *x* | *Ф(x)* | *x* | *Ф(x)* | *x* | *Ф(x)* |
| 0,96  0,97  0,98  0,99  1,00  1,01  1,02  1,03  1,04  1,05  1,06  1,07  1,08  1,09  1,10  1,11  1,12  1,13  1,14  1,15  1,16  1,17  1,18  1,19  1,20  1,21  1,22  1,23  1,24  1,25  1,26  1,27  1,28  1,29  1,30  1,31  1,32  1,33  1,34  1,35  1,36 | 0,3315  0,3340  0,3365  0,3389  0,3413  0,3438  0,3401  0,3485  0,3508  0,3531  0,3554  0,3577  0,3599  0,3621  0,3643  0,3665  0,3686  0,3708  0,3729  0,3749  0,3770  0,3790  0,3810  0,3830  0,3849  0,3869  0,3883  0,3907  0,3925  0,3944  0,3962  0,3980  0,3997  0,4015  0,4032  0,4049  0,4066  0,4082  0,4099  0,4115  04131 | 1,37  1,38  1,39  1,40  1,41  1,42  1,43  1,44  1,45  1,46  1,47  1,48  1,49  1,50  1,51  1,52  1,53  1,54  1,55  1,56  1,57  1,58  1,59  1,60  1,61  1,62  1,63  1,64  1,65  1,66  1,67  1,68  1,69  1,70  1,71  1,72  1,73  1,74  1,75  1,76  1,77 | 0,4147  0,4162  0,4177  0,4192  0,4207  0,4222  0,4236  0,4251  0,4265  0,4279  0,4292  0,4306  0,4319  0,4332  0,4345  0,4357  0,4370  0,4382  0,4394  0,4406  0,4418  0,4429  0,4441  0,4452  0,4463  0,4474  0,4484  0,4495  0,4505  0,4515  0,4525  0,4535  0,4545  0,4554  0,4564  0,4573  0,4582  0,4591  0,4599  0,4608  0,4616 | 1,78  1,79  1,80  1,81  1,82  1,83  1,84  1,85  1,86  1,87  1,88  1,89  1,90  1,91  1,92  1,93  1,94  1,95  1,96  1,97  1,98  1,99  2,00  2,02  2,04  2,06  2,08  2,10  2,12  2,14  2,16  2,18  2,20  2,22  2,24  2,26  2,28  2,30  2,32  2,34 | 0,4625  0,4633  0,4641  0,4649  0,4656  0,4664  0,4671  0,4678  0,4686  0,4693  0,4699  0,4706  0,4713  0,4719  0,4726  0,4732  0,4738  0,4744  0,4750  0,4756  0,4761  0,4767  0,4772  0,4783  0,4793  0,4803  0,4812  0,4821  0,4830  0,4838  0,4846  0,4854  0,4861  0,4868  0,4875  0,4881  0,4887  0,4893  0,4898  0,4904 | 2,36  2,38  2,40  2,42  2,44  2,46  2,48  2,50  2,52  2,54  2,56  2,58  2,60  2,62  2,64  2,66  2,68  2,70  2,72  2,74  2,76  2,78  2,80  2,82  2,84  2,86  2,88  2,90  2,92  2,94  2,96  2,98  3,00  3,20  3,40  3,60  3,80  4,00  4,50  5,00 | 0,4909  0,4913  0,4918  0,4922  0,4927  0,4931  0,4934  0,4938  0,4941  0,4945  0,4948  0,4951  0,4953  0,4956  0,4959  0,4961  0,4963  0,4965  0,4967  0,4969  0,4971  0,4973  0,4974  0,4976  0,4977  0,4979  0,4980  0,4981  0,4982  0,4984  0,4985  0,4985  0,49865  0,49931  0,49966  0,499841  0,499928  0,499968  0,499997  0,499997 |

**ПРИЛОЖЕНИЕ 5**

***Таблица значений***

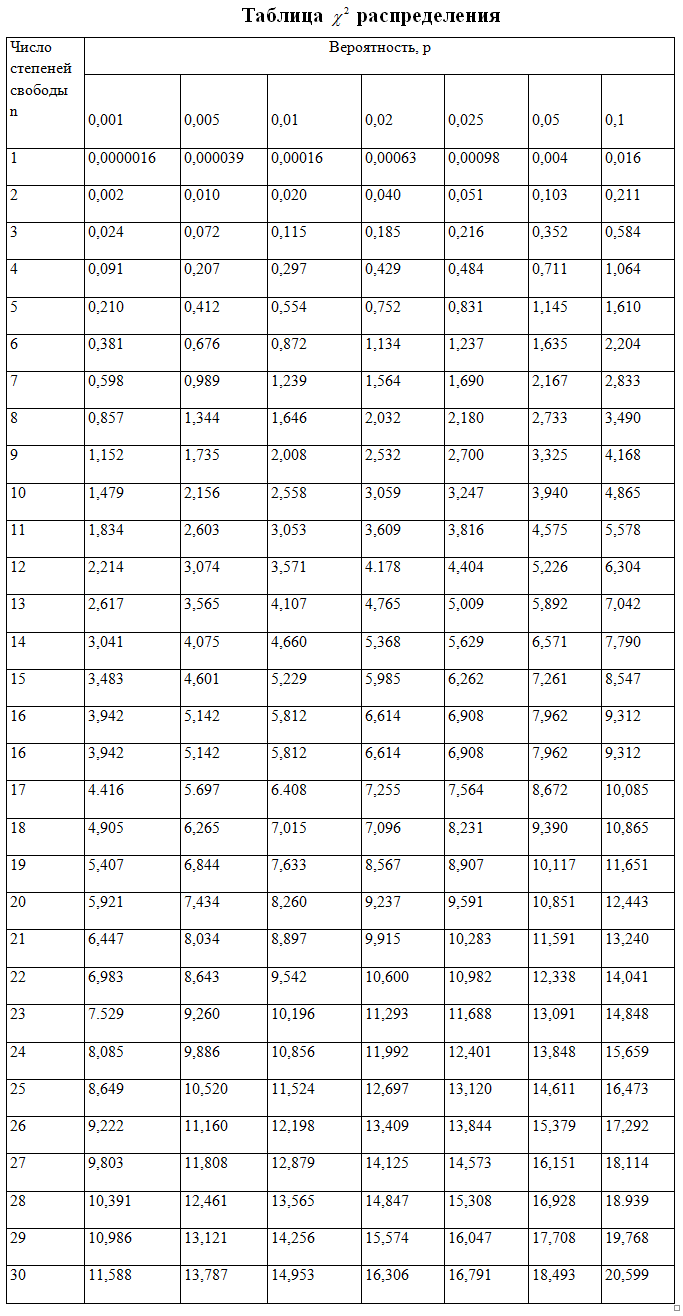
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | γ | | | *n* | γ | | |
| 0.95 | 0.99 | 0.999 | 0.95 | 0.99 | 0.999 |
| 5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19 | 2.78  2.57  2.45  2.37  2.31  2.26  2.23  2.20  2.18  2.16  2.15  2.13  2.12  2.11  2.10 | 4.60  4.03  3.71  3.50  3.36  3.25  3.17  3.11  3.06  3.01  2.98  2.95  2.92  2.90  2.88 | 8.61  6.86  5.96  5.41  5.04  4.78  4.59  4.44  4.32  4.22  4.14  4.07  4.02  3.97  3.92 | 20  25  30  35  40  45  50  60  70  80  90  100  120  ∞ | 2.093  2.064  2.045  2.032  2.023  2.016  2.009  2.001  1.996  1.001  1.987  1.984  1.980  1.960 | 2.861  2.797  2.756  2.720  2.708  2.692  2.679  2.662  2.649  2.640  2.633  2.627  2.617  2.576 | 3.883  3.745  3.659  3.600  3.558  3.527  3.502  3.464  3.439  3.418  3.403  3.392  3.374  3.291 |

**ПРИЛОЖЕНИЕ 6**

***Критические точки распределения Стьюдента***

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число степеней свободы*V* | Уровень значимости (двусторонняя критическая область) | | | | | |
| 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,002 | 0,001 |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  40  60  120  ∞ | 6,31  2,92  2,35  2,13  2,01  1,94  1,89  1,86  1,83  1,81  1,80  1,78  1,77  1,76  1,75  1,75  1,74  1,73  1,73  1,73  1,72  1,72  1,71  1,71  1,71  1,71  1,71  1,70  1,70  1,70  1,68  1,67  1,66  1,64 | 12,7  4,30  3,18  2,78  2,57  2,45  2,36  2,31  2,26  2,23  2,20  2,18  2,16  2,14  2,13  2,12  2,11  2,10  2,09  2,09  2,08  2,07  2,07  2,06  2,06  2,06  2,05  2,05  2,05  2,04  2,02  2,00  1,98  1,96 | 31,82  6,97  4,54  3,75  3,37  3,14  3,00  2,90  2,82  2,76  2,72  2,68  2,65  2,62  2,60  2,58  2,57  2,55  2,54  2,53  2,52  2,51  2,50  2,49  2,49  2,48  2,47  2,46  2,46  2,46  2,42  2,39  2,36  2,33 | 63,7  9,92  5,84  4,60  4,03  3,71  3,50  3,36  3,25  3,17  3,11  3,05  3,01  2,98  2,95  2,92  2,90  2,88  2,86  2,85  2,83  2,82  2,81  2,80  2,79  2,78  2,77  2,76  2,76  2,75  2,70  2,66  2,62  2,58 | 318,3  22,33  10,22  7,17  5,89  5,21  4,79  4,50  4,30  4,14  4,03  3,93  3,85  3,79  3,73  3,69  3,65  3,61  3,58  3,55  3,53  3,51  3,49  3,47  3,45  3,44  3,42  3,40  3,40  3,39  3,31  3,23  3,17  3,09 | 637,0  31,6  12,9  8,61  6,86  5,96  5,40  5,04  4,78  4,59  4,44  4,32  4,22  4,14  4,07  4,01  3,96  3,92  3,88  3,85  3,82  3,79  3,77  3,74  3,72  3,71  3,69  3,66  3,66  3,65  3,55  3,46  3,37  3,29 |
| 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 | 0,001 | 0,0005 |
| Уровень значимости α (односторонняя критическая область) | | | | | |

**ПРИЛОЖЕНИЕ 7**



# ПРИЛОЖЕНИЕ 8

# СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб пособие. - М.: Образование, 2007. - 479с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., Наука, 1988.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М . Высшая Школа , 2001 -400с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
5. Спирина М.С., Спирин П.А. Теория вероятностей и математическая статистикаУчебник для студ. учреждений сред. проф. образования. — 4-е изд., стер. — М. : Академия, 2013. — 352 с.
6. Спирина М.С., Спирин П.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач : учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С.Спирина, П.А.Спирин. — М. : Издательский центр «Академия», 2014. — 192 с.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХИНТЕРНЕТ-РЕСУРСОВ

1. Портал по теории вероятностей. [Электронный ресурс] Режим доступа: www.teorver.ru.
2. Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. [Электронный ресурс] Режим доступа: http:// www. school-collection. edu. ru.
3. Портал Math.ru: библиотека, медиатека, олимпиады, задачи, научные школы, учительская, история математики [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.math.ru
4. Математика в Открытом колледже [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.mathematics.ru
5. Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов [Электронный ресурс] Режим доступа: http://school\_collection.edu.ru/collection/matematika/
6. Образовательный математический сайт Exponenta.ru [Электронный ресурс] Режим доступа :http//www.exponenta.ru
7. Общероссийский математический портал Math\_Net.Ru [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.mathnet.ru
8. Портал Allmath.ru – вся математика в одном месте [Электронный ресурс] Режим доступа : http://www.allmath.ru
9. Интернет-библиотека физико-математической литературы[Электронный ресурс] Режим доступа: http://ilib.mccme.ru
10. Математика онлайн: справочная информация в помощь студенту [Электронный ресурс] Режим доступа http://www.mathem.h1.ru