Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению практических работ

по учебной дисциплине

**«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА**

**с элементами математической логики»**

для специальности

**09.02.07 Информационные системы и программирование**

Челябинск, 2020

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методические рекомендации составлены в соответствии с утвержденной программой учебной дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики» для специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование | ОДОБРЕНО  УГС 09.00.00  протокол № \_\_\_\_\_  от «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_2020 г.  Председатель УГС  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Шибанова В.А. | УТВЕРЖДАЮ  Зам. директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2020 г. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Автор: | Родионова М.В. | преподаватель ГБПОУ «ЮУрГТК» |

### **СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| Пояснительная записка ………………………………………………………................. | 4 |
| Практическая работа № 1 Построение таблицы истинности для заданной логической функции. …………........................................................................................ | 7 |
| Практическая работа № 2 Использование законов алгебры логики............................. | 12 |
| Практическая работа №3 Запись логических функций в канонической форме......... | 18 |
| Практическая работа № 4 Применение методов дискретной математики: переход от канонических форм к совершенным .......................................................................... | 18 |
| Практическая работа № 5 Представление булевых функций в виде формул заданного типа с использованием функций Шеффера и Пирса.…….......................... | 20 |
| Практическая работа № 6 Представление булевых функций в виде формул заданного типа с использованием методов минимизации логических функций. ..... | 22 |
| Практическая работа № 7-8 Выполнение операций над множествами. Построение диаграмм Венна ……………............................................................................................. | 23 |
| Практическая работа № 9Равносильное преобразование формул алгебры предикатов ..…………….................................................................................................. | 27 |
| Практическая работа №10Построение графа состояний и переходов автомата Мили и Мура.…………………………………….............................................................. | 31 |
| Практическая работа №11Определение характеристик неориентированных графов и орграфов ………................................................................................................ | 35 |
| Информационное обеспечение ...……………………………………………................. | 42 |
| Приложение 1 ……………………………………………………………………............ | 43 |
| Приложение 2 ……………………………………………………………………............ | 44 |

### **ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики» предназначены для обучающихся по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование с целью организации работы на практических занятиях.

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся формируют системные представления о принципах и методах аппарата дискретной математики при создании и эксплуатации современных ЭВМ, средствах передачи и обработки информации, автоматизированных системах управления и проектирования, развивают интеллектуальные и формируют профессиональные умения.

Программой учебной дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики» предусмотрено выполнение 11 практических работ общим объемом 24 часа учебной нагрузки, направленных на формирование

**элементов общих компетенций:**

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

**умений**:

* применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;

1. формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения*.*

**обобщение, систематизацию, углубление и закрепление знаний:**

* основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;
* формулы алгебры высказываний;
* методы минимизации алгебраических преобразований;
* основы языка и алгебры предикатов;
* основные принципы теории множеств.

Описание каждой практической работы содержит номер, название и цель работы, изложение необходимого теоретического материала (при необходимости примеры выполнения заданий), варианты заданий, описание алгоритма выполнения работы.

Для получения дополнительной, более подробной информации по основным вопросам учебной дисциплины в конце методических рекомендаций приведен перечень информационных источников.

Отчеты студентов по практическим работам должны содержать номер, название и цель работы, выполненные задания и их результаты, ответы на контрольные вопросы и выводы по проделанной работе.

Титульный лист оформляется в соответствии с приложением 1, отчет по практической работе – с приложением 2.

### **КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ И ОФОРМЛЕНИЯ ОТЧЕТОВ**

|  |  |
| --- | --- |
| «5» | правильно и в полном объеме выполнены необходимые расчеты, студент правильно ответил на все контрольные вопросы и может пояснить выполнение любого этапа работы, отчет по практической работе оформлен в соответствии с требованиями |
| «4» | задания практической работы выполнены, но есть недочеты в выполненных расчета, студент ответил правильно не на все контрольные вопросы, может пояснить выполнение любого этапа работы с подсказкой преподавателя, отчет по практической работе оформлен в соответствии с требованиями |
| «3» | не полностью выполнены задания, студент частично ответил на контрольные вопросы, может пояснить выполнение любого этапа работы только с подсказкой преподавателя, отчет по практической работе оформлен с нарушением требований |
| «2» | задания практической работы выполнены неправильно, студент не ответил на контрольные вопросы, не может пояснить выполнение этапов работы, отчет по практической работе оформлен с нарушением требований |

### 

### **ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

| № работы | Наименование работы | Кол-во часов |
| --- | --- | --- |
|  | Построение таблицы истинности для заданной логической функции. | 2 |
|  | Использование законов алгебры логики | 4 |
|  | Запись логических функций в канонической форме. | 2 |
|  | Применение методов дискретной математики: переход от канонических форм к совершенным | 2 |
|  | Представление булевых функций в виде формул заданного типа с использованием функций Шеффера и Пирса | 2 |
|  | Представление булевых функций в виде формул заданного типа с использованием методов минимизации логических функций | 2 |
|  | Выполнение операций над множествами | 2 |
|  | Построение диаграмм Венна | 2 |
|  | Равносильное преобразование формул алгебры предикатов | 2 |
|  | Построение графа состояний и переходов автомата Мили и Мура | 2 |
|  | Определение характеристик неориентированных графов и орграфов | 2 |
|  | Итого: |  |

# Практическая работа № 1

**Тема:** **Построение таблицы истинности для заданной логической функции**

**Цель работы:** Сформировать умения составления логических формул и строить таблицу истинности по заданной логической функции

**Умения:**

**–** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;

– формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

**Знания (актуализация):**

– основные принципы математической логики;

– формулы алгебры высказываний.

**Теоретический материал:**

Логические выражения. Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую входят логические переменные, обозначающие высказывания, и знаки логических операций, обозначающие логические функции.  
Для записи составного высказывания в виде логического выражения на формальном языке (языке алгебры логики) в составном высказывании нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

Запишем в форме логического выражения составное высказывание «(2 • 2 = 5 или 2 • 2 = 4) и (2 • 2= 5 или 2 • 2=4)». Проанализируем составное высказывание. Оно содержит два простых высказывания:  А = «2 • 2 = 5» — ложно (0), В = «2 • 2 = 4» — истинно (1).   
Тогда составное высказывание можно записать в следующей форме:   
«(А или В) и (А или В)».

Теперь необходимо записать высказывание в форме логического выражения с учетом последовательности выполнения логических операций. При выполнении логических опе­раций определен следующий порядок их выполнения: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция. Для изменения указанного порядка могут использоваться скобки:

F = (А v В) & (А v В).

Истинность или ложность составных высказываний можно определять чисто формально, руководствуясь законами алгебры высказываний, не обращаясь к смысловому содержанию высказываний.

Подставим в логическое выражение значения логических переменных и, используя таблицы истинности базовых логических операций, получим значение логической функции:   
F = (А v В)&(А v В) = (О v 1)&(1 v 0) = 1 & 1 = 1.

Таблицы истинности. Для каждого составного высказывания (логического выражения) можно построить таблицу истинности, которая определяет его истинность или ложность при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний (логических переменных).

При построении таблиц истинности целесообразно руководствоваться определенной последовательностью действий.

Во-первых, необходимо определить количество строк в таблице истинности. Оно равно количеству возможных комбинаций значений логических переменных, входящих в ло­гическое выражение. Если количество логических переменных равно п, то: количество строк = 2n.

В нашем случае логическая функция F — (АvВ)&(АvВ) имеет 2 переменные и, следовательно, количество строк в таблице истинности должно быть равно 4.

Во-вторых, необходимо определить количество столбцов в таблице истинности, которое равно количеству логических переменных плюс количество логических операций.

В нашем случае количество переменных равно двум, а количество логических операций — пяти, то есть количество столбцов таблицы истинности равно семи.

В-третьих, необходимо построить таблицу истинности с указанным количеством строк и столбцов, обозначить столбцы и внести в таблицу возможные наборы значений исходных логических переменных.

В-четвертых, необходимо заполнить таблицу истинности по столбцам, выполняя базовые логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности (табл. 3.4). Теперь мы можем определить значение логической функции для любого набора значений логических переменных.

Таблица 3.4. Таблица истинности логической функции

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | АvВ | !А | !В | !(AvВ) | (АvВ)&(АvВ) |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Равносильные логические выражения. Логические выражения, у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают, называются равносильными. Для обозначения равносильных логических выражений используется знак «=».

Докажем, что логические выражения !(А & В) и !(АvВ) равносильны. Построим сначала таблицу истинности логического выражения А & В (табл. 3.5).

Таблица 3.5. Таблица истинности логического выражения А & В

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | !A | !B | !(А&В) |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Теперь построим таблицу истинности логического выражения АvВ (табл. 3.6).

Таблица 3.6. Таблица истинности логического выражения АvВ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | АVВ | !(АvВ) |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Значения в последних столбцах таблиц истинности совпадают, следовательно, логические выражения равносильны:

!(А&В) = !(АvВ).

Логическое следование (импликация). Логическое следование (импликация) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «если..., то...».

Логическая операция импликации «если А, то В», обозначается А -> В и выражается с помощью логической функции F14, которая задается соответствующей таблицей истинности (табл. 3.8).

Таблица 3.8. Таблица истинности логической функции «импликация»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | F14 = A->В |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Составное высказывание, образованное с помощью операции логического следования (импликации), ложно тогда и только тогда, когда из истинной предпосылки(первого высказывания) следует ложный вывод (второе высказывание).

Например, высказывание «Если число делится на 10, то оно делится на 5» истинно, так как истинны и первое высказывание (предпосылка), и второе высказывание (вывод).

Высказывание «Если число делится на 10, то оно делится на 3» ложно, так как из истинной предпосылки делается ложный вывод.

Однако операция логического следования несколько отличается от обычного понимания слова «следует». Если первое высказывание (предпосылка) ложно, то вне зависимости от истинности или ложности второго высказывания (вывода) составное высказывание истинно. Это можно понимать таким образом, что из неверной предпосылки может следо­вать что угодно.

В алгебре высказываний все логические функции могут быть сведены путем логических преобразований к трем базовым: логическому умножению, логическому сложению и ло­гическому отрицанию.

Докажем методом сравнения таблиц истинности (табл. 3.8 и 3.9), что операция импликации А -> В равносильна логическому выражению А vВ.

Таблица 3.9. Таблица истинности логического выражения АvВ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | !A | !Аv В |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

Таблицы истинности совпадают, что и требовалось доказать.   
Логическое равенство (эквивалентность). Логическое равенство (эквивалентность) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «... тогда и только тогда, когда ...».

Логическая операция эквивалентности «А тогда и только тогда, когда В» обозначается А~В и выражается с помощью логической функции .F10, которая задается соответствующей таблицей истинности (табл. 3.10).

Таблица 3.10. Таблица истинности логической функции эквивалентности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | F10 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Составное высказывание, образованное с помощью логической операции эквивалентности истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны.

Рассмотрим, например, два высказывания: А = «Компьютер может производить вычисления» и В = «Компьютер включен». Составное высказывание, полученное с помощью операции эквивалентности, истинно, когда оба высказывания либо истинны, либо ложны:

«Компьютер может производить вычисления тогда и только тогда, когда компьютер включен».

«Компьютер не может производить вычисления тогда и только тогда, когда компьютер не включен».

Составное высказывание, полученное с помощью операции эквивалентности, ложно, когда одно высказывание истинно, а другое — ложно:

«Компьютер может производить вычисления тогда и только тогда, когда компьютер не включен».

«Компьютер не может производить вычисления тогда и только тогда, когда компьютер включен».

**Пример 1**. **Представить логическими формулами следующие высказывания:**

1. «Идет дождь или снег».
2. «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые».
3. «Что в лоб, что по лбу».

**Решение**.

1. Составное (сложное) высказывание «Идет дождь или снег» состоит из двух простых:

А – «Идет дождь»;

В – «Идет снег».

Высказывания А, В соединены связкой «или», т.е. - и логическая формула имеет вид:





1. Сложное высказывание «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые» включает два простых высказывания:

А – «Идет дождь»;

В – «Крыши мокрые».

В первом предложении «Если идет дождь, то крыши мокрые» высказывания А, В соединены связкой «если ..., то...».

А→В.

Во втором предложении «Дождя нет, а крыши мокрые» союз «а» имеет смысл связки «и» (&), и кроме того высказывание А следует взять с отрицанием ():

& B

Остается объединить представленные выше два высказывания в одно связкой &:

&(&B).

1. Высказывание «Что в лоб, что по лбу», если обозначить:

А – «В лоб»,

В – «По лбу»

представимо логической формулой

А~В

**Пример 2. Построить таблицу истинности заданной логической функции**

F(a,b,c) = a ∨ ( b ∨ ⌉c)

**Решение:**

1. N=3 количество переменных

2. Qн = 8 количество наборов

3. Q л.ф. = 3 количество логических операций

4. Q ст = N + Q л.ф + 1 = 3 + 3 + 1 = 7

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | a | b | c | ⌉c | b ∨ ⌉c | a ∨ ( b ∨ ⌉c) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

**Задания для самостоятельного выполнения:**

**Вариант 1.**

1. Представить формулами логики высказываний, следующие суждения:
2. «Если темпы роста рынка продукта корпорации высокие и размер контролируемой ею доли рынка также высок, то в соответствии с матрицей портфельного анализа этот продукт относится к категории «звезда»; он дает большой доход, но требует значительных вложений».
3. «Если стратегическая хозяйственная единица корпорации – лидер в непривлекательной (возможно, старой) отрасли, ее стратегией может быть максимизация прибыли на уже вложенный капитал, но не вложение нового».
4. «Если прогноз показывает, что можно получить крупную прибыль на выпуске новых товаров, то при разработке стратегии развития фирме следует сделать упор на маркетинг и сеть распределения, а также целесообразно открыть более крупные магазины и расширить торговую сеть».
   1. Построить таблицу истинности заданной логической функции



**Вариант 2.**

1. Представить формулами логики высказываний следующие суждения (сложные высказывания):
   1. «стратегическая хозяйственная единица корпорации занимает сильные позиции на рынке и работает в привлекательной отрасли, следовательно, имеет наиболее высокий приоритет при распределении ресурсов».
   2. «Если при высокой доле рынка темпы роста рынка низкие, то продукт относится к категории «денежного мешка», или «дойной коровы»; он дает большие доходы и характеризуется малыми затратами в связи со стабильностью рынка».
   3. «В ситуации, где жизненно необходимо расширение фирмы или где ключевые патенты или ключевые ресурсы находятся в руках у других компаний, а данной фирме недостает технических знаний, лучшей стратегией для нее является приобретение (предприятий)».

2. Построить таблицу истинности заданной логической функции



# Практическая работа № 2

**Тема:** **Использование законов алгебры логики.**

**Цель работы:** Сформировать умения применять законы алегбры-логики при выполнении равносильных преобразований

**Умения:**

**–** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;

– формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

**Знания (актуализация):**

– основные принципы математической логики;

– формулы алгебры высказываний;

– методы минимизации алгебраических преобразований.

**Теоретический материал.**

В алгебре высказываний логические выражения можно упростить, применяя законы и правила как в обычной алгебре.

Следствия:

- из логической операции конъюнкция; a & ø = ø

a & 1 = a

a & a = a

a & ā = ø

- из логической операции дизъюнкция; a ø = a



a 1 = 1



a a = a



a ā = 1



Правило повторяемости:

- a & a & a & … & a = a;

- a a a … a = a.



Законы:

- закон двойного отрицания (двойное отрицание аргумента равно самому аргументу)

= a;

- закон коммутативности (переместительный)

a b = b a a + b = b + a



∧ a ∧ b = b ∧ a a \* b = b \* a

- закон ассоциативности (сочетательный)

a (b c) = (a b) c a + (b + c) = (a + b) + c



∧ a ∧ (b ∧ c) = (a ∧ b) ∧ c a \* (b \* c) = (a \* b) \* c

- закон дистрибутивности ( распределительный)

a (b & c) = (a b) & (a c) a + bc = (a + b)(a + c)



∧ a ∧ (b c) = (a ∧ b) (a ∧ c) a (b + c) = ab + ac



- закон де Моргана

= ∧ отрицание дизъюнкции равно конъюнкции отрицаний



= отрицание конъюнкции равно дизъюнкции отрицаний



- закон противоречия

x ∧ = 0

- закон исключения третьего

x = 1



Если у двух логических функций совпадают таблицы истинности, т.е. на всех наборах значений входных переменных функции принимают одинаковые значения, то их называют равносильными или эквивалентными.

Используя законы алгебры логики и свойства основных логических операций можно сложную логическую функцию заменить, более простой, но равносильной ей функцией. Этот процесс называется минимизацией.

Минимизация необходима для того, чтобы функциональные схемы ЦВМ не были слишком громоздкими и не имели лишних элементов. Чем меньше в полученной функции после минимизации входных переменных и логических операций, тем проще логическая схема и менее ее стоимость.

Пример.























1)

2)

3)

4)

5)

6)

**Задания для самостоятельного решения:**

**Вариант № 1**

1. Определить таблицу истинности для логической функции

f(a,b,c) = 

2. Упростить логические выражения

1. 1 = 
2. 
3. 

3. Доказать тождество булевой алгебры (явно указав использованные свойства: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность и т.д.) 

4. Составить функциональную схему по логическому выражению

5. Дать характеристику логической операции: дизъюнкция

**Вариант № 2**

1. Определить таблицу истинности для логической функции

f(a,b,c) = 

2. Упростить логические выражения

1. 
2. f2=
3. 

3. Доказать тождество булевой алгебры (явно указав использованные свойства: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность и т.д.)



4. Составить функциональную схему по логическому выражению



5. Дать характеристику логической операции: конъюнкция

**Вариант № 3**

1. Определить таблицу истинности для логической функции

f(a,b,c) = 

2. Упростить логические выражения

1. 
2. f2=
3. 

3. Доказать тождество булевой алгебры (явно указав использованные свойства: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность и т.д.)



4. Составить функциональную схему по логическому выражению



5. Дать характеристику логической операции: Стрелка Пирса

**Вариант № 4**

1. Определить таблицу истинности для логической функции

f(a,b,c) = 

2. Упростить логические выражения

1. 
2. 
3. 

3. Доказать тождество булевой алгебры (явно указав использованные свойства: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность и т.д.)



4. Составить функциональную схему по логическому выражению



5. Дать характеристику логической операции: штрих Шеффера

**Вариант № 5**

1. Определить таблицу истинности для логической функции



2. Упростить логические выражения

1. 
2. 
3. 

3. Доказать тождество булевой алгебры (явно указав использованные свойства: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность и т.д.)



4. Составить функциональную схему по логическому выражению



5. Дать характеристику логической операции: импликация

**Вариант № 6**

1. Определить таблицу истинности для логической функции



2. Упростить логические выражения

1. 
2. 
3. 

3. Доказать тождество булевой алгебры (явно указав использованные свойства: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность и т.д.)



4. Составить функциональную схему по логическому выражению



5. Дать характеристику логической операции: отрицание

# Практическая работа № 3

**Тема: Запись логических функций в каноническом виде**

**Цели работы:** Сформировать умения записывать формулы логики в канонический вид различными способами

**Умения:**

**–** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;

– формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

**Знания (актуализация):**

– основные принципы математической логики;

– формулы алгебры высказываний.

**Задания для самостоятельного решения:**

По заданным таблицам истинности записать СДНФ и СКНФ логической функции

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| F1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| F2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| F3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| F4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| F5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| F6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |

# Практическая работа № 4

**Тема: Применение методов дискретной математики: переход от канонических форм к совершенным**

**Цели работы:**  сформировать умения использования способов перехода и записи функций в виде формул логики определенного вида: от КНФ к СКНФ; от ДНФ к СДНФ;

**Умения:**

**–** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;

– формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

**Знания (актуализация):**

– основные принципы математической логики;

– формулы алгебры высказываний;

– методы минимизации алгебраических преобразований.

**Теоретический материал.**

Существуют два способа перехода от нормальных форм к совершенным: аналитический и графический.

**Аналитический способ.**

Для перехода от произвольной ДНФ к СДНФ r-го ранга необходимо конъюнкции, входящие в ДНФ k-го ранга последователь умножить на логическое выражение , где yi-одна из переменных, которая не входит в данную конъюнкцию. Число таких преобразований для каждой конъюнкции должно быть равно r-k.

Пример:

ДНФ→СДНФ *fДНФ(a,b,c)=ab∨c*

Решение:

1. Используя законы и формулы алгебры логики, преобразуем конъюнкции заданной функции в минтермы 3-го ранга.

*AB(c∨)=abc∨ab*

*c(a∨)=(ac∨c)(b∨)=abc∨a∨ bc∨c*

1. В результате преобразований полученные минтермы соединим символом дизъюнкции и получаем.

*FСДНФ= abc∨ab∨ ac∨c∨ bc*

Для перехода от произвольной КНФ к СКНФ r-го ранга необходимо дизъюнкции входящие в КНФ k-го ранга (k<r) последовательно суммировать с логическим выражением , где - одна из переменных, которая не входит в данную дизъюнкцию. Число таких преобразований для каждой дизъюнкции должно быть равно r-k.

Пример:

КНФ→СКНФ *fКНФ(a,b,c)=a(b∨)*

Решение:

1. *a ∨ b=(a∨b)(a∨)*

*(a∨ b∨c)(a∨∨c)=(a∨ b∨ c)(a∨ b∨ )(a∨∨c)(a∨∨)*

*b∨ ∨a = (a∨b∨ )(∨b∨)*

2. Соединим макстермы и получим.

*FСКНФ=(a∨b∨c)(a∨b∨)(a∨∨c)(a∨∨)(∨∨)*

**Графический способ.**

Наиболее наглядным и простым графическим способом преобразования логических функций из нормальных форм в совершенную являются карты Карно-Вейга.

Карта Карно – графическое представление всех минтермов (2n) для данного числа переменных (n).

Каждый минтерм изображается в виде клетки, расположенной так, что минтермы, находящиеся в соседних клетках, отличаются только одной переменной.

Внешний вид карты:

- количество клеток в карте зависит от количества переменных;

- переменные написаны по обе стороны диагональной черты в левом углу карты;

- значения переменных обозначаются с внешней стороны карты с помощью двоичных цифр: 0- инверсное значение переменной, 1-прямое значение переменной.

Такая условность дает возможность легко представить для каждой клетки карты Карно соответствующий ей минтерм.

Алгоритм преобразования логической функции из ДНФ в СКНФ с помощью карты Карно.

1. Для заданной логической функции изобразить карту Карно;
2. Поставить в клетках карты Карно единицы для тех минтермов, в состав которых входят конъюнкции заданной функции;
3. Отмеченные единицами минтермы соединить символами дизъюнкции и получим СДНФ заданной функции.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a  b | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a  b | 0 | 1 |
| 0 |  |  |
| 1 |  | *ab* |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a  b | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 |  |  |  |  |
| 01 |  |  |  |  |
| 11 |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Перевести из КНФ в СКНФ аналитическим и графическим способом
2. *& &*
3. *ac∨b*
4. *(a∨)(c∨)*
5. Перевести из ДНФ в СДНФ аналитическим и графическим способом
   1. *x1& x2 & x3*
   2. *ab∨cd*
   3. *bc∨(∨)*

# 

# Практическая работа № 5

**Тема:** **Представление булевых функций в виде формул заданного типа с использованием функций Шеффера и Пирса.**

**Цель:** Сформировать умения записи булевых функций с использованием функций Шеффера и Пирса.

**Умения:**

**–** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;

– формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

**Знания (актуализация):**

– основные принципы математической логики;

– формулы алгебры высказываний.

– методы минимизации алгебраических преобразований.

**Теоретический материал.**

Изучить конспект лекций по темам:

– функционально полные системы логических функций;

– запись логических функций в универсальных базисах;

– анализ и синтез комбинационных схем.

**Задания для самостоятельного решения:**

**1. Заданную переключательную функцию записать в базисе Шеффера и в базисе Пирса в минимальной ДНФ и КНФ**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. **Построить комбинационную схему в базисе Шеффера, закон функционирования которой задан таблицей истинности**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Х1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Х2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Х1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Х2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| X3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

# в.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Х1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Х2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Х1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Х2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| X3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Х1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Х2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| X3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Х1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Х2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| X3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

# Практическая работа № 6

**Тема:** **Представление булевых функций в виде формул заданного типа с использованием методов минимизации логических функций.**

**Цель:** Сформировать умения минимизации логических функций

**Умения:**

**–** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;

– формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

**Знания (актуализация):**

– основные принципы математической логики;

– формулы алгебры высказываний.

– методы минимизации алгебраических преобразований.

**Теоретический материал.**

Изучить конспект лекций по темам:

– формы представления логических функций;

– минимизация логических функций алгебры-логики.

**Задания для самостоятельного решения:**

**1. Составить СДНФ F1 и СКНФ F2 по заданной таблице истинности и минимизировать**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| F1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| F1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| F1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| F1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| F1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| F1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 2. Используя метод последовательного исключения переменных, минимизировать логическую функцию

1. ****
2. 
3. 
4. ****
5. 
6. 

# Практическая работа № 7-8

**Тема:** **Выполнение операций над множествами. Построение диаграмм Венна.**

**Цель:** Сформировать умения выполнять операции над множествами и строить диаграммы Венна.

**Умения:**

**–** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;

– формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

**Знания (актуализация):**

– основные принципы теории множеств;

**Теоретический материал.**

В основе теории множеств лежат первичные понятия: множество и отношение принадлежности множества (обозначается как x \in A — «xесть элемент множества A», «x принадлежит множеству A»). Пустое множество, обычно обозначается символом \varnothing — множество, не содержащее ни одного элемента. подмножество и надмножество — соотношения включения одного множества в другое (обозначаются соответственно A \subseteq B и A \supseteq B для нестрогого включения и A \subset B и A \supset B — для строгого).

Над множествами определены следующие операции:

* объединение, обозначается как A \cup B — множество, содержащее все элементы из A и B,
* разность, обозначается как A \setminus B, реже A - B — множество элементов A, не входящих в B,
* дополнение, обозначается как \setminus A или -A — множество всех элементов, не входящих в A (в системах, использующих универсальное множество),
* пересечение, обозначается как A \cap B — множество из элементов, содержащихся как в A, так и в B,
* симметрическая разность, обозначается как A \triangle B, реже A \dot{-} B — множество элементов, входящих только в одно из множеств — A илиB.

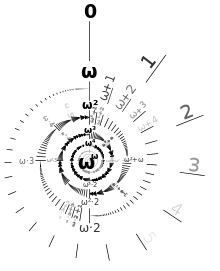
Объединение и пересечение также часто рассматривают над семействами множеств, обозначаются \bigcup \mathfrak A и \bigcap \mathfrak A и составляют, соответственно, объединение всех множеств, входящих в семейство \mathfrak A и пересечение всех множеств, входящих в семейство.

Объединение и пересечение коммутативны, ассоциативны и идемпотентны. В зависимости от выбора системы аксиом и наличия дополнения алгебра множеств (относительно объединения и пересечения) может образовывать дистрибутивную решётку, полную дистрибутивную решетку, булеву алгебру. Для визуализации операций над множествами используются диаграммы Венна.

Декартово произведение множеств A и B — множество всех упорядоченных пар элементов из A и B: A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \and y \in B \}. Отображение f множества A в множество B теории множеств рассматривается как бинарное отношение — подмножество A \times B — с условием единственности соответствия первого элемента второму: (x, y) \in f \Rightarrow \forall z \neq y ((x,z) \notin f).

[Булеан](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%83%D0%BB%D0%B5%D0%B0%D0%BD) — множество всех подмножеств данного множества, обозначается \mathcal P (A) или 2^A (так как соответствует множеству отображений из Aв \mathbf{2} = \{ 0,1\}).

Мощность множества (кардинальное число) — характеристика количества элементов множества, формально определяется как класс эквивалентности над множествами, между которыми можно установит взаимно-однозначное соответствие, обозначается |A| или \sharp A. Мощность пустого множества равна нулю, для конечных множеств — целое число, равное количеству элементов. Над кардинальными числами, в том числе характеризующими бесконечные множества, можно установить [отношение порядка](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D0%B0), мощность [счётного множества](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%87%D1%91%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) обозначается \aleph_0 ([алеф](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B5%D1%84) — первая буква еврейского алфавита), является наименьшей из мощностей бесконечных множеств, мощность [континуума](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%82%D0%B8%D0%BD%D1%83%D1%83%D0%BC_(%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2)) обозначается \mathfrak c или 2^{\aleph_0}, [континуум-гипотеза](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%82%D0%B8%D0%BD%D1%83%D1%83%D0%BC-%D0%B3%D0%B8%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%B7%D0%B0) — предположение о том, что между счётной мощностью и мощностью континуума нет промежуточных мощностей.

[](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Omega-exp-omega-labeled.svg?uselang=ru)

Представление порядковых чисел до \omega^\omega

Если кардинальное число характеризует класс эквивалентности множеств относительно возможности установить взаимно-однозначное соответствие, то порядковое число (ординал) — характеристика классов эквивалентности вполне упорядоченных множеств относительно биективных соответствий, сохраняющих отношение полного порядка. Строятся ординалы посредством введения арифметики порядковых чисел (с операциями сложения и умножения), порядковое число конечных множеств совпадает с кардиналом (обозначается соответствующим натуральным числом), порядковое число множества всех натуральных чисел с естественным порядком обозначается как \omega, далее конструируются числа:

 \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega ^2, \dots \omega ^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, ,

после чего вводятся [\varepsilon_0](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%AD%D0%BF%D1%81%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D0%BD-%D0%BD%D1%83%D0%BB%D1%8C&action=edit&redlink=1)-числа:

\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^\cdot}}}} = \sup \{ \omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots \}.

Мощность множества всех \omega- и \varepsilon-чисел — счётных ординалов, обладает мощностью \aleph_1.

**Пример 1.**

Пусть универсальное множество U – множество всех сотрудников некоторой фирмы; А – множество всех сотрудников данной организации старше 35 лет; В – множество сотрудников, имеющих стаж работы более 10 лет; С – множество менеджеров фирмы. Каков содержательный смысл (характеристическое свойство) каждого из следующих множеств:

1. ;
2. 
3. 
4. B\C;
5. C\B

Решение:

1.  - множество сотрудников организации, стаж работы которых не превышает 10 лет.
2.  - множество менеджеров фирмы не старше 35 лет, имеющих стаж работы более 10 лет.
3.  - множество всех сотрудников фирмы старше 35 лет, а также сотрудников, не являющихся менеджерами, стаж работы которых более 10 лет.
4. B\C – множество сотрудников организации со стажем работы более 10 лет, не работающих менеджерами.
5. C\B – множество менеджеров со стажем работы не более 10 лет.

**Пример 2.**

Пусть U = {1, 2, 3, 4}, A={1, 3, 4}, B={2, 3}, C={1, 4}. Найти:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Решение:

* 1. **=**
  2. **=**
  3. **=**
  4. **=**

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Для множеств  из примера 1 определить содержательный смысл следующих множеств:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

1. Осуществить операции над множествами , если A={a,b,d}, B={b,d,e,h}, U={a,b,c,d,e,f,g,h}.
2. Осуществить операции над множествами A={2,4,6,8}, B={3,6,9}, если U={1,…,10}.
3. Пусть U={a,b,c,d}, X={a,c}, Y={a,b,d}, Z={b,c}. Найти множества и построить диаграммы Венна, иллюстрирующие эти множества:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. Пусть U={1,2,3,4,5,6}, A={1,2,3}, B={1,3,5,6}, C={4,5,6}. Найти множества и построить диаграммы Венна, иллюстрирующие эти множества:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

# Практическая работа № 9

**Тема:** **Равносильное преобразование формул алгебры предикатов.**

**Цель:** Сформировать умения выполнять операции над предикатами ипреобразования формул алгебры предикатов.

**Умения:**

**–** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;

– формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

**Знания (актуализация):**

– основные принципы математической логики;

– основы языка и алгебры предикатов.

– методы минимизации алгебраических преобразований.

**Теоретический материал**

**Определение.** Пусть М – непустое множество. Тогда n-*местным предикатом, заданным на М,* называется выражение, содержащее n переменных и обращающееся в высказывание при замене этих переменных элементами множества М.

Рассмотрим примеры. Пусть М есть множество натуральных чисел **N**. Тогда выражения «x – простое число», «x – четное число», «x – больше 10» являются одноместными предикатами. При подстановке вместо x натуральных чисел получаются высказывания: «2 – простое число», «6 – простое число», «3 – четное число», «5 больше 10» и т.д. Выражения «x больше y», «x делит y нацело», «x плюс y равно 10» являются двухместными предикатами. (Конечно, последнее выражение можно было записать и так: «x+y=10»). Примеры трехместных предикатов, заданных на множестве натуральных чисел: число z лежит между «x и y», «x плюс y равно z», «|x-y|£z».

Будем считать, что *высказывание – нульместный предикат,* то есть предикат, в котором нет переменных для замены.

Надо отметить, что местность предикатов не всегда равна числу *всех* переменных, содержащихся в выражении. Например, выражение «существует число x такое, что y=2x» на множестве натуральных чисел определяет одноместный предикат. По смыслу этого выражение в нем можно заменять только переменную y. Например, замена y на 6 дает истинное высказывание: «существует число x такое, что 6=2x», а замена y на 7 дает ложное (на множестве **N**) высказывание «существует число x такое, что 7=2x».

Предикат с заменяемыми переменными x1,…,xn будет обычно обозначаться заглавной латинской буквой. После которой в скобках указаны эти переменные. Например, P(x1,x2), Q(x2,x3), R(x1). Среди переменных в скобках могут быть и фиктивные.

На совокупности всех предикатов, заданных на множестве М, вводятся знакомые операции *конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация* и *эквиваленция*. Эти операции вводятся довольно очевидным образом. Приведем в качестве примера определение конъюнкции предикатов.

**Определение.** Предикат W(x1,…,xn) называется конъюнкцией предикатов U(x1,…,xn) и V(x1,…,xn), заданных на множестве М, если для любых а1,…,аn из М высказывание W(а1,…,аn) есть конъюнкция высказываний U(а1,…,аn) и V(а1,…,аn).

Легко по аналогии привести определения и других упомянутых выше операций.

В логике предикатов первого порядка вводятся и две новые операции. Называются они квантором общности и квантором существования. Эти операции рассмотрим вначале на примерах. Пусть дано выражение «существует х такой, что x+y=10». На множестве натуральных чисел это предложение определяет одноместный предикат P(y), так Р(2) и Р(9) – истинные высказывания, Р(11) – ложное. Если обозначить предикат «x+y=10» через S(x,y) (а это предикат двухместный), то P(y) можно записать так: «существует х такой, что S(x,y)». В этом случае говорят, что предикат P(y) получен из предиката S(x,y) навешиванием квантора существования на x и пишут P(y)=($x)S(x,y). Рассмотрим другой пример. Выражение «для всех х справедливо, что y³-х2» определяет на множестве целых чисел одноместный предикат Q(y). Если предикат «y³-х2» обозначить через T(x,y), то Q(y) можно записать так: «для всех x справедливо T(x,y)». В таком случае говорят, что предикат Q(y) получен из предиката T(x,y) навешиванием квантора общности на х и пишут Q(y)=("x)T(x,y).

После этих примеров нетрудно дать определение в общем виде.

**Определение.** Пусть P(x1,…,xn) – предикат, заданный на множестве M, y – переменная. Тогда выражение «для всякого y выполняется P(x1,…,xn)» – предикат, полученный из P *навешиванием квантора общности на переменную* *y,* а выражение «существует y такой, что выполняется P(x1,…,xn)» – предикат, полученный из P *навешиванием квантора существования на переменную* *y*.

Обозначения операций были введены выше.

Заметим, что в определении не требуется, чтобы y была одна из переменных x1,…,xn, хотя в содержательных примерах, которые будут ниже, квантор навешивается на одну из переменных x1,…,xn. Указанное требование не накладывается, чтобы избежать усложнения определения формулы логики предикатов. Если y – одна из переменных x1,…,xn, то после навешивания квантора на y новый предикат является (n-1)-местным, если yÏ{ x1,…,xn}, то местность нового предиката равна n.

Если предикат W(x1,…,xn) получен из предикатов U(x1,…,xn) и V(x1,…,xn) с помощью связок, то истинность высказывания W(a1,…,an) определяется таблицами истинности этих связок. Пусть W(x1,…,xn)=("y)U(x1,…,xn,y). Тогда высказывание W(a1,…,an) истинно тогда и только тогда, когда для любого bÎM истинно высказывание U(a1,…,an,b). Если же W(x1,…,xn)=($y)U(x1,…,xn,y), то высказывание W(a1,…,an) истинно в том и только в том случае, когда найдется bÎM, для которого высказывание U(a1,…,an) истинно.

Понятие предиката – весьма широкое понятие. Это видно уже из приведенных выше примеров. Тем не менее мы это еще раз подчеркнем, показав, что n-местная функция может рассматриваться как (n+1)-местный предикат. Действительно, функции y=f(x1,…,xn), заданной на множестве М можно поставить в соответствие выражение «y равно f(x1,…,xn)». Это выражение есть некоторый предикат P(x1,…,xn,y). При этом если элемент b есть значение функции в точке (a1,…,an), то высказывание P(a1,…,an,b) истинно, и обратно. (Подобное «превращение» функции в предикат мы уже делали выше для сложения натуральных чисел.)

На предикаты можно смотреть и более формально, причем с двух точек зрения.

Во-первых, предикат можно представить отношением следующим образом. Пусть предикат P(x1,…,xn) задан на множестве M. Рассмотрим прямую степень этого множества Mn=MxMx…xM и подмножество Dp множества Mn, определяемое равенством:

Dp={(a1,…,an)ÎMn½высказывание P(a1,…,an) истинно}.

Отношение Dp можно назвать областью истинности предиката P. Во многих случаях предикат P можно отождествить с отношением Dp. При этом, правда возникают некоторые трудности при определении операций над отношениями, аналогичными операциям над предикатами.

Во-вторых, предикат P(x1,…,xn), заданный на M, можно отождествить с функцией fp:Mn®{0,1}, определяемой равенством

zap130

Мы, в основном, будем понимать термин «предикат» в смысле исходного определения, т.е. как языковое выражение. Связано это с тем, что одной из главный целей, как уже отмечалось во введении, является изучение выразительных возможностей логики первого порядка, возможности представления средствами этой логики информации, выраженного на естественном (скажем, русском) языке.

**Пример 1.** В следующих высказываниях выделите входящие в них предикаты и запишите эти высказывания с помощью символики исчисления предикатов.

1. Снег белый.

* Ф(снег), где Ф(x) обозначает предикат: x – белый.

2. два меньше трех.

* Ф(2, 3), где Ф(x, y) обозначает предикат: x < y.

3. Некоторые змеи ядовиты.

* (∀y)((x) ∧ (x)), где вводим предикаты (x): x – есть змея, (x): x – ядовитая.

**Пример 2.** Записать символически равносильность двух уравнений

(x, y) = 0 и (x, y) = 0.

* Равносильность двух уравнений с двумя неизвестными означает, что они одновременно справедливы для любых пар неизвестных, т.е.

(∀x)(∀y)((x, y) = 0 ↔ (x, y) = 0).

**Пример 3.** Запишите с помощью логической символики, что система уравнений (x, y) = 0 и (x, y) = 0 несовместна ( не имеет решений).

* Если система не совместна, то , следовательно, нет таких пар неизвестных, чтобы были одновременно справедливы первое и второе уравнения, т.е.

(∃x)(∃y)((x, y) = 0 ∧ (x, y) = 0).

**Пример 4.** Убедиться в справедливости тавтологии

(∀x)((x) ∨ (∀x)(x), (∀x)((x) ∨ (∀x)(x)).

* Рассмотрим два случая.

1. Ф(x) – тождественно истинный предикат, тогда (∀x)Ф(x) – истинное высказывание, – ложное высказывание, – тождественно ложный предикат, (∀x) – ложное высказывание;
2. Ф(x) – не тождественно истинный предикат, тогда – ложное высказывание, (∀x)Ф(x) – истинное высказывание, – не тождественно ложный предикат, (∀x) – истинное высказывание.

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Какие из следующих выражений являются предикатами:

а) x делится на 4 (x пробегает множество натуральных чисел);

б) x есть отец y (x, y пробегают множество всех людей);

в) + x + 10 (x пробегает множества действительных чисел)?

2. Пусть Ф(x, y) обозначает предикат + = (x, y, z пробегают множество действительных чисел). Что обозначает выражение Ф(3, 4, 5)?

3. Какие из следующих выражений являются формулами исчисления предикатов:  
 а)(∀x)((x)→(∀x)((x)));  
 б) (∀x)((x) ∧ (∃x)((x));  
 в) (∀x)(∀y)(((x, y)) ∨ (z ∧ (∃y)((y))))?

4. Проверьте справедливость следующих тавтологий:  
 а) (∀x)(Ф(x)) → Ф(x);  
 б) Ф(x) → (∃x)(Ф(x));  
 в) (∀x)(∀y)(Ф(x, y)) ↔ (∀y)(∀x)(Ф(x, y));  
 г) (∀x)((x)) ∨ ((x)) → (∀x)((x)) ∨ (∀x)((x)).

5. Опишите каждое из следующих множеств, используя подходящее свойство:  
 а) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};  
 б) {3, 6, 9, 12, 15};  
 в) {1, 4, 9, 16, 25};  
 г) {10, 12, 14, 16};  
 д) {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29};  
 e) {-1, +1}.  
 Запишите их с помощью соответствующих предикатов.

6. На множестве натуральных чисел заданы предикаты:  
 1. (x) : – 5x + 6 = 0;  
 2. (x) : (x – 1)( – 1) = 0;  
 3. (x) : – 10x + 24 = 0.  
 Укажите множества, которые они определяют.  
7. Проверьте, являются ли приведенными следующие формулы:  
 а) (∀)() ∧ (∃)(, ();  
 б) ;  
 в) ⊃ ().

8. Является ли нормальной формула

(∀)() ∧ (∃)()?

9. Проверьте формулу на равносильность в предложении, что А не содержит переменной x.  
 а) (∀x)(B(x) ⊃ A) ≡ (∀x)B(x) ⊃ A;  
 б) (∃x)(B(x) ⊃ A) ≡ (∃x)B(x) ⊃ A;  
 в) (∀x)(A ⊃ B(x)) ≡ A ⊃ (∀x)B(x);  
 г) (∃x)(A ⊃ B(x)) ≡ A ⊃ (∃x)B(x).

10. Докажите равносильность формулы:  
 а) (∀x)(B(x) ∧ C(x)) ≡ (∀x)(B(x) ∧ (∀x)C(x);  
 б) (∃x)(B(x) ∧ C(x)) ≡ (∃x)(B(x) ∧ (∃x)C(x).

**Практические работы № 10**

**Тема: Построение графа состояний и переходов автоматов Мили и Мура**

**Цель работы:**

- научиться строить граф состояний различных автоматов;

-составлять прямые и обратные таблицы переходов автоматов.

**Умения:**

**–** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;

– формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

**Знания (актуализация):**

– основные принципы теории алгоритмов;

**Задания для самостоятельного выполнения.**

По данным содержательным графам микропрограммы построить закодированные графы микропрограмм, графы автоматов Мили и Мура, таблицы переходов автоматов.

АН10  
РМС=08, РКС=00  
АНСР2

Конец

М2:=РИП  
М3:=ffff0000  
f:=AvB  
АМ18(f)ВБАВ  
РИП:=М1

Т04П≠0  
М2:=ПРИП  
М2:=ffff0000  
ПРИП:=М2

М2:=ПРИП

АН10  
РМС=08, РКС=00  
АНСР2

M3[31]=0

М2:=ПРИП

T04П≠0  
М2:=РИП  
М2:=ffff0000  
ПРИП:=М2

Начало

1

1

1

0 0

СМ:=СМ+А

СЧТ=0

СЧТ=0

В:=СМ(n+2:n+3).R2(В)  
СМ:=СМ(1).СМ(1).R2(СМ)  
СЧТ:=СЧТ-1

СМ:=СМ+А

СМ:=СМ+111.7А+1

F(3)

СМ:=СМ+А0

F(2)

F(1)

СМ:=0,  
СЧТ:=М

0

0

1

0

1

1

0

0

1

АН38

Подпрограмма  
прерывания

РФП [1]:=1  
М1:=00000002  
РОП10:=М1

Подпрограмма  
ожидания

АН34 [4]

М3:=РССП [0/31]  
М3:=00020000

М3:=С0000000  
М3:=РССП[32/63]  
М2:=РИП, F:=AvB  
Т04П≠0, М2:=РМС2  
РССП [32/63]:М1  
РАР:=М1

М1:=РОП2  
РССП[0/31]:=М1

РМС2:=3fffffff  
Т04П≠0, РАП:=+4  
М2:РИП  
РОП2:=М2  
3ПРП011

АН34(4)

М3:00010000  
М3:РССП[0/31]  
Т3 РЧК:=0

0

1

0

1

1

# Практическая работа № 11

**Тема: Определение характеристик неориентированных графов и орграфов**

**Цель работы:** Научиться выявлять свойства ориентированных и неориентированных графов.

**Умения:**

– формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

**Теоретический материал:**

Неориентированный граф G = (V, Е) состоит из конечного множества вершин V и мно­жества ребер Е. В отличие от ориентированного графа, здесь каждое ребро (v,w) соот­ветствует неупорядоченной паре вершин: если (v,w) — неориентированное ребро, то (v, w) = (w, v). Далее неориентированный граф мы будем называть просто графом.

Графы широко используются в различных областях науки и техники для модели­рования симметричных отношений между объектами. Объекты соответствуют вер­шинам графа, а ребра — отношениям между объектами.

Многое из терминологии ориентированных графов применимо к неориентирован­ным графам. Например, вершины v и w называются смежными, если существует ребро (v, w). Мы будем также говорить, что ребро (v, w) инцидентно вершинам v и w.

Путем называется такая последовательность вершин v1,v2,….,vn, что для всех i , 1 ≤ i < n, существуют ребра (vi,vi+1). Путь называется простым, если все вершины пути различны, за исключением, возможно, вершин v1и vn. Длина пути равна количеству ребер, составляющих путь, т.е. длина равна n - 1 для пути из n вершин. Если для вершин v1и vn существует путь v1,v2,….,vn, то эти вершины называются свя­занными. Граф называется связным, если в нем любая пара вершин связанная.

Пусть есть граф G = (V, Е) с множеством вершин V и множеством ребер Е. Граф G' = (V', Е') называется подграфом графа G, если

1. множество V' является подмножеством множества V,

2. множество Е' состоит из ребер (v, w) множества Е таких, что обе вершины v и w принадлежат V'.

Если множество Е' состоит из всех ребер (v, w) множества Е таких, что обе вершины v и w принадлежат V', то в этом случае граф G' называется индуцированным подграфом графа G.

На рис. 1,а показан граф G = (V, Е) с множеством вершин V = {а, b, c, d} и множеством дуг Е = {(a, b), (a, d), (b, с), (b, d), (с, d)}. На рис. 1,б представ­лен один из его индуцированных подграфов, заданный множеством вершин V' = {а, b. с} и содержащий все ребра, не инцидентные вершине d.

Связной компонентой графа G называется максимальный связный индуцированный подграф графа G.

Граф, показанный на рис. 1,а, является связным графом и имеет только одну связную компоненту, а именно — самого себя. На рис. 2 представлен несвязный граф, состоящий из двух связных компонент.

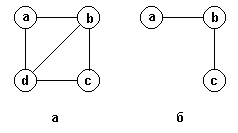


Рис. 1. Граф и один из его подграфов

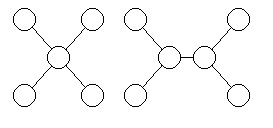


Рис. 2. Несвязный граф

Циклом (простым) называется путь (простой) длины не менее 3 от какой-либо вершины до нее самой. Мы не считаем циклами пути длиной 0, длиной 1 (петля от вершины v к ней самой) и длиной 2 (путь вида v, w, v). Граф называется циклическим, если имеет хотя бы один цикл. Связный ациклический граф, представляющий собой "дерево без корня", называют свободным деревом. На рис. 2 показан граф, состоящий из двух связных компонент, каждая из которых является свободным де­ревом. Свободное дерево можно сделать "обычным"' деревом, если какую-либо вер­шину назначить корнем, а все ребра сориентировать в направление от этого корня.

Свободные деревья имеют два важных свойства, которые мы будем использовать в следующих разделах.

1. Каждое свободное дерево с числом вершин n, n ≥ 1, имеет в точности n - 1 ребер.

2. Если в свободное дерево добавить новое ребро, то обязательно получится цикл.

Мы докажем первое утверждение методом индукции по n. Очевидно, что утверждение справедливо для n = 1, поскольку в этом случае имеем только одну вершину и не имеем ребер. Пусть утверждение 1 справедливо для свободного дерева с n - 1 вершинами. Рассмотрим дерево G c n вершинами.

Сначала покажем, что в свободном дереве существуют вершины, имеющие одно инцидентное ребро. Заметим, что G не содержит изолированных вершин (т.е. вершин, не имеющих инцидентных ребер), иначе граф G не был бы связным. Теперь создадим путь от некоторой вершины v1, следуя по произвольному ребру, инцидент­ному вершине v1. На каждом шаге построения этого пути, достигнув какой-либо вершины, выбираем инцидентное ей ребро, которое ведет к вершине, еще не участво­вавшей в формировании пути. Пусть таким способом построен путь v1,v2,….,vk. Вершина vk будет смежной либо с одной вершинойvk-1, либо еще с какой-нибудь, не входящей в построенный путь (иначе получится цикл). В первом случае получаем, что вершина vk  имеет только одно инцидентное ей ребро, и значит, наше утвержде­ние о том, что в свободном дереве существуют вершины, имеющие одно инцидентное ребро, будет доказано. Во втором случае обозначим через vk+1 вершину, смежную с вершиной vk , и строим путь v1,v2,….,vk+1. В этом пути все вершины различны (иначе опять получится цикл). Так как количество вершин конечно, то этот процесс закончится за конечное число шагом и мы найдем вершину, имеющую одно инци­дентное ребро. Обозначим такую вершину через v, а инцидентное ей ребро — (v, w).

Теперь рассмотрим граф G', полученный в результате удаления из графа G вершины v и ребра (v, w). Граф G' имеет n - 1 вершину, для него выполняется утвер­ждение 1 и поэтому он имеет n - 2 ребра. Но граф G имеет на одну вершину и на од­но ребро больше, чем граф G', поэтому для него также выполняется утверждение 1. Следовательно, утверждение 1 доказано.

Теперь мы легко докажем утверждение 2 о том, что добавление ребра в свободное дерево формирует цикл. Применим доказательство от противного, т.е. предположим, что добавление ребра в свободное дерево не формирует цикл. Итак, после добавления нового ребра мы получили граф с n вершинами и n ребрами. Этот граф остался связ­ным и, по нашему предположению, ацикличным. Следовательно, этот граф — свобод­ное дерево. Но в таком случае получаем противоречие с утверждением 1. Отсюда вы­текает справедливость утверждения 2.

**Представление неориентированных графов**

Для представления неориентированных графов можно применять те же методы, что и для представления ориентированных графов, если неориентированное ребро между вершинамиv и w рассматривать как две ориентированных дуги от вершины v к вершине w и от вершины w к вершине v.

На рис. 3 показаны матрица смежности и списки смежности, пред­ставляющие граф из рис. 1,a.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | a | b | c | d |
| a | 0 | 1 | 0 | 1 |
| b | 1 | 0 | 1 | 1 |
| c | 0 | 1 | 0 | 1 |
| d | 1 | 1 | 1 | 0 |

a. Матрица смежности

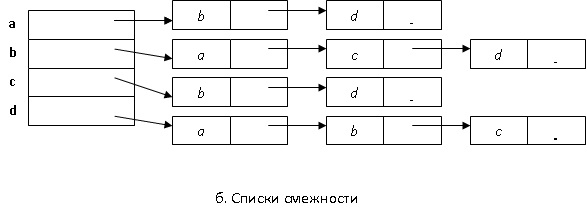


Рис. 3. Представления неориентированного графа

Очевидно, что матрица смежности для неориентированного графа симметрична. Отметим, что в случае представления графа посредством списков смежности для су­ществующего ребра ( i , j ) в списке смежности вершины i присутствует вершина j, а в списке смежности вершины j — вершина i.

Ориентированный граф - это граф, на ребрах которого обозначены разрешенные направления движения, проще говоря, расставлены стрелочки. Такая, на первый взгляд "мелочь" настолько сильно меняет идеологию решения задач, что ориентированные графы мы рассматриваем отдельно от неориентированных.

В обычных графах мы рассматриваем такие фундаментальные понятия, как степень вершины, путь и цикл, компонента связности. Для ориентированных графов их надо существенно модифицировать:

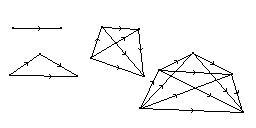
* ребро входит в вершину, если по нему можно двигаться в направлении к этой вершине, и выходит из вершины, если по нему можно двигаться в направлении от этой вершины;
* входящая степень вершины - это число входящих в нее ребер;
* исходящая (или выходящая) степень вершины - это число выходящих из нее ребер;
* путь из вершины A в вершину B - это последовательность ребер и промежуточных вершин, по которым можно дойти из A в B; длина пути определяется, как обычно (число ребер); простой путь - как обычно, путь, в котором вершины (и тем более, ребра) не повторяются;
* ориентированный цикл - это замкнутый простой путь в ориентированном графе;
* сильно связный ориентированный граф - это ориентированный граф, где из любой вершины в любую есть путь (для каждой пары вершин A и B есть как путь из A в B, так и путь из B в A);
* компонента сильной связности - это часть графа, которая сама по себе сильно связна, но ее нельзя расширить так, чтобы она осталась сильно связной; между разными компонентами сильной связности могут быть ребра, но все ребра между двумя разными компонентами направлены в одну и ту же сторону.
* В задачах на ориентированный граф обычно упоминаются всякие реки, потоки или дороги с односторонним движением. Иногда - односторонние отношения между людьми

**Пример 1.** Барон Мюнхаузен, прилетев с Луны, рассказал, что в каждое лунное море впадает пять рек, а из каждого лунного моря вытекает шесть рек. Докажите, что он говорит неправду.  
Решение: Пусть на Луне N морей. Посчитаем реки двумя способами: по тому, откуда они вытекают, и по тому, куда они впадают. Первым способом получается, что рек 6N, а вторым - что 5N. Противоречие, ч.т.д.

(!) Аналогичным рассуждением доказывается, что в ориентированном графе сумма входящих степеней равна сумме исходящих, так как каждая из них равна числу ребер. Действительно, у каждого ориентированного ребра одно начало и один конец (сравните с утверждением про сумму степеней вершин обычного графа!).

**Пример 2.** В королевстве каждый город соединен с каждым дорогой. Может ли сумасшедший король ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться?

Решение: Тут мы имеем дело с другим видом задач: введением ориентации (с заданными свойствами) на обычном графе. Попробуем придумать простенькие примеры (см. рис.).



Интересно... в каждом примере все ребра идут именно слева направо (особенно легко это получается, если каждый следующий пример строить как расширение предыдущего!). Так давайте всегда проводить все ребра слева направо (при этом избегая рисовать вершины в точности друг над другом). Тогда, выехав из любого города, мы будем оказываться все правее и правее, и никогда не вернемся в исходную точку. Значит, можно.  
Можно формализовать это и без геометрических соображений о том, как нарисован граф: занумеровать все вершины и ставить все стрелки от меньшего номера к большему.  
Замечание. В построенном графе каждая вершина - отдельная компонента сильной связности(!)

Обратная задача: дан ориентированный граф, в котором, выехав из любой вершины, в нее нельзя вернуться (то есть, нет ориентированных циклов); надо занумеровать его вершины так, чтобы все ребра шли от меньшего номера к большему - называется топологической сортировкой графа. Существует довольно красивый и не очень сложный алгоритм топологической сортировки.

**Пример 3.** В королевстве из каждого города выходит четное число дорог и из каждого города можно доехать до любого другого. Докажите, что мудрый король сможет ввести одностороннее движение так, чтобы сохранилось это свойство, а, сверх того, из каждого города выходило столько же дорог, сколько входило.

Решение: Если в предыдущей задаче надо было ввести ориентацию, делая как можно больше компонент сильной связности, то теперь надо сделать их как можно меньше. Какой же такой обход графа придумать? Давайте воспользуемся четностью степеней всех вершин. По критерию Эйлера, в графе (раз он связный!) существует эйлеров цикл (см. лекцию "Графы-1") - обход всех ребер по одному разу. А давайте просто пойдем по эйлерову циклу и расставим стрелки в направлении нашего движения. Получим большой замкнутый ориентированный путь, содержащий все ребра. А все вершины он и подавно содержит, ч.т.д.

Утверждение. На ребрах связного графа расствили стрелки так, что входящая и исходящая степень любой вершины совпадают. Докажите, что граф сильно связный.  
Упражнение. Убедиться, что доказательство достаточности критерия Эйлера (см. лекцию "Графы-1") без изменений проходит для этого случая, т.е. что двигаясь только по стрелкам, мы сможем склеить все пути в один эйлеров цикл.

Один из основных методов доказательства в теории ориентированных графов - индукция по вершинам. С ним мы познакомимся поближе в следующих, заключительных, задачах.

**Пример 4.** Докажите, что в полном ориентированном графе есть вершина, из которой можно добраться до любой другой. Решение: Как и говорилось ранее, индукция по числу вершин. База - 1 вершина - очевидна.

Переход: от N вершин к N+1 вершине. Возьмем полный ориентированный граф с N+1 вершиной - и одну вершину (A) выкинем. По предположению индукции, в оставшемся графе есть вершина B, из которой можно доехать до всех остальных. Если откуда-то ведет ребро в A, то из B можно доехать и до A, то есть B - та самая вершина, которую мы ищем. Иначе, из A ведут ребра во все вершины, и искомой вершиной будет A. В любом случае, такая есть, ч.т.д.

**Пример 5.** Докажите, что в полном ориентированном графе с тремя и более вершинами можно поменять направление одного ребра так, чтобы сделать его сильно связным (если он исходно не сильно связный).

Решение: База - 3 вершины. Если граф не сильно связный, то он изоморфен примеру с 3-мя вершинами к задаче 2. А там можно развернуть одно ребро так, чтобы получить ориентированный цикл длины 3. Переход: опять же, давайте удалим вершину, сделаем оставшийся граф сильно связным (по предположению индукции) и вернем вершину на место. Чтобы после возвращения граф сохранил сильную связность, удаленная вершина должна иметь как входящие, так и выходящие ребра. А если такой вершины нет??? Тогда рассмотрим вершину A, из которой все ребра выходят(очевидно, что откуда-то ребра должны выходить), и любые другие вершины B и C. В B и C ведут ребра из A, поэтому в них все ребра входят. Но как же быть с ребром BC??? Оно должно выходить из одной из этих вершин?! Значит, такое невозможно, ч.т.д.

### **Задания для самостоятельного решения:**

Задача 1. Докажите, что сумма степеней всех вершин произвольного ориентированного графа четна.

У этой задачи имеется популярная интерпретация: доказать, что общее число рукопожатий, которыми обменялись люди, пришедшие на вечеринку, всегда четно.

Задача 2. Перечислите все неизоморфные неориентированные графы, у которых не более четырех вершин.

Задача 3. Докажите, что неориентированный связный граф остается связным после удаления некоторого ребра ↔ это ребро принадлежит некоторому циклу.

Задача 4. Докажите, что неориентированный связный граф с n вершинами

* содержит не менее n-1 ребер,
* если содержит больше n-1 ребер, то имеет, по крайней мере, хотя бы один цикл.

Задача 5. Докажите, что в любой группе из 6 человек есть трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых.

Задача 6. Докажите, что неориентированный граф G=(V,E) связен ↔ для каждого разбиения V= V1cup V2 с непустыми V1 и V2 существует ребро, соединяющее V1 с V2.

Задача 7. Докажите, что, если в неориентированном графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то они связаны путем.

Задача 8. Пусть G=(V,E) неориентированный граф с |E| < |V|-1. Докажите, что тогда G несвязный граф.

Задача 9. Докажите, что в связном неориентированном графе любые два простых пути максимальной длины имеют общую вершину.

Задача 10. Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озер, соединенных между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он ошибается.

Задача 11. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Задача 12. На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

**Информационное обеспечение**

Основные источники

1. Канцедал, С.А. Дискретная математика: Учебное пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. – 7-е изд., стер. / С. А. Канцедал. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2018. – 222 с . ISBN 978-5-8199-0719-1, ISBN-online: 978-5-16-104039-3
2. Гусева, А.И., Киреев В.С., Тихомирова А.Н. Дискретная математика. Учебник / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова – М.: Инфра-М, 2017. – 208 с. ISBN 978-5-906818-21-8, 978-5-16-011675-4

Дополнительные источники:

Интернет - ресурсы

1. http://ru.wikipedia.org/wiki - ВикипедиЯ, свободная энциклопедия.
2. http://www.twirpx.com/files/mathematics/dmath - конспекты лекций, учебные пособия по учебной дисциплине «Дискретная математика»

Приложение 1

Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

# ОТЧЕТ по практическим работам

по учебной дисциплине

**ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ**

специальность 09.02.07

Информационные системы и программирование

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выполнил: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Группа:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Проверил: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |

Челябинск, 202\_

Приложение 2

Отчет по практической работе №1

Тема:

Цель:

**Ход работы:**

1. Текст задания.
2. Постановка задачи.
3. Решение задачи.
4. Результат работы.

**Вывод** по работе: …