Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**Учебное пособие**

по учебной дисциплине:

**«Математика»**

для специальности

**23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей**

**Часть I**

Челябинск, 2020

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Учебное пособие составлено в соответствии с утвержденной программой учебной дисциплины «Математика» для специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  комиссией ЕМД  протокол № \_\_\_\_  от «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2020 г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_О.И. Макаренко | УТВЕРЖДАЮ  Заместитель директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2020 г. |

Составитель: Воронина Алена Викторовна, преподаватель ГБПОУ «Южно-Уральский государственный технический колледж»

**АКТ СОГЛАСОВАНИЯ**

**на учебное пособие по учебной дисциплине «Математика»**

**для студентов специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей,**

**разработанное преподавателем ГБПОУ «ЮУрГТК» Ворониной А.В.**

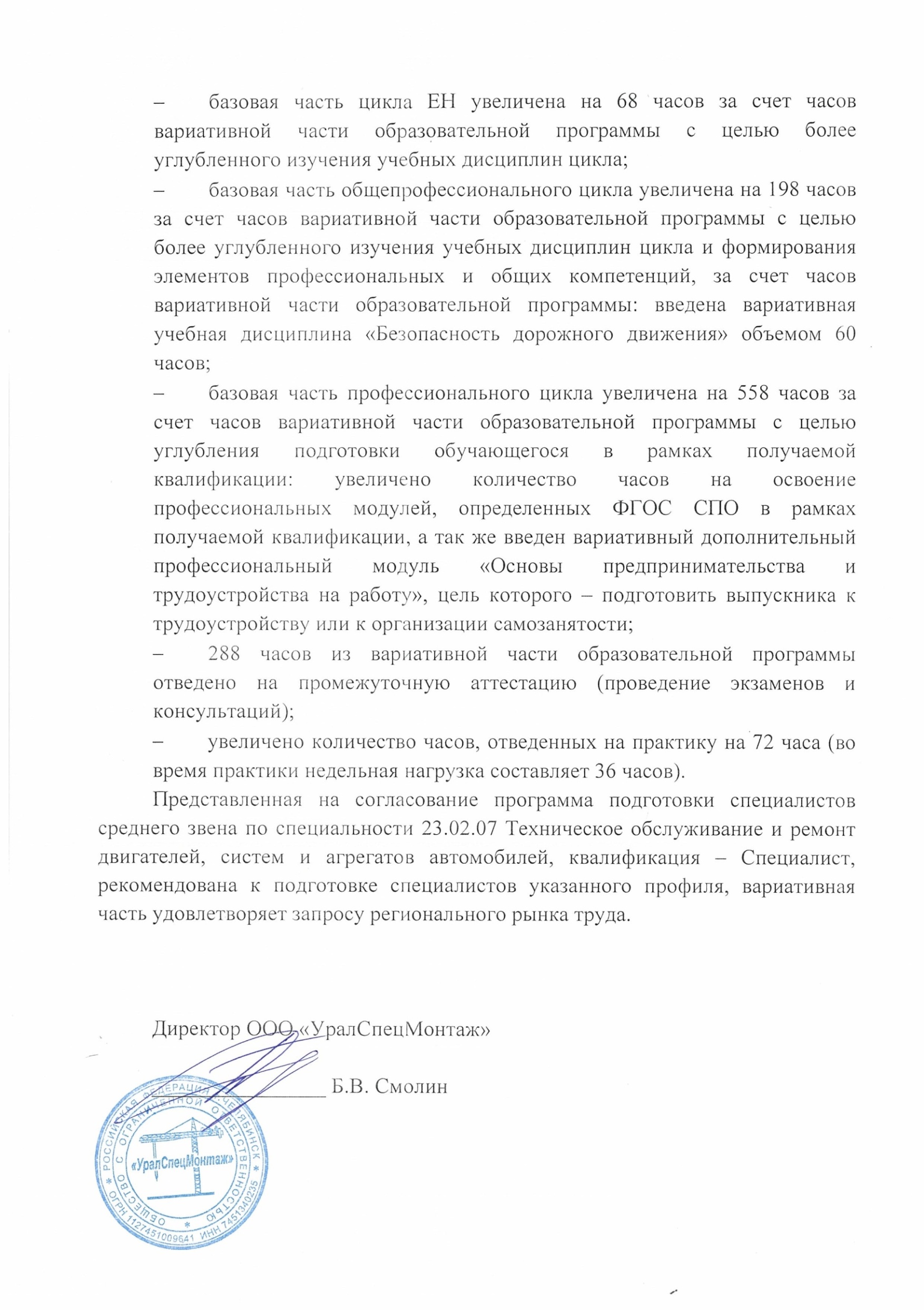
Представленное на согласование учебное пособие разработано преподавателем Южно-Уральского государственного технического колледжа Ворониной А.В. и предназначено для студентов специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей с целью обеспечить успешное освоение учебной дисциплины математического и естественно-научного цикла «Математика».

В учебном пособии подробно представлен теоретический материал, направленный на формирование знаний об основных понятиях и методах математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики.

Учебное пособие также включает типовые задачи и примеры их решения, задания для самостоятельного решения, задания практических работ, направленные на систематизацию и закрепление знаний по учебной дисциплине «Математика» и формирование практических умений применять основные математические методы при решении прикладных задач.

Применение данной учебного пособия в учебном процессе позволит обеспечить качественное преподавание учебной дисциплины «Математика».

Данное издание рекомендовано к использованию в учебном процессе в среднем профессиональном образовательном учреждении, при обучении студентов по специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей.

****

**Пояснительная записка**

Учебное пособие составлено в соответствии с утвержденной программой учебной дисциплины математического и естественно-научного цикла «Математика» и предназначено для студентов 2 курса специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей.

Учебная дисциплина математического и естественно-научного цикла «Математика» изучается в течение третьего семестра и завершается «зачетом».

Данное учебное пособие разработано как для самостоятельного освоения учебного материала при дистанционном обучении, так и в помощь студентам, испытывающим затруднения в усвоении учебного материала, разобранного на аудиторных занятиях и нуждающихся в дополнительной систематизации полученных знаний.

Учебное пособие содержит теоретический (лекционный) материал, изучаемый на аудиторных занятиях во взаимодействии с преподавателем. При изложении теоретического материала используется принцип «достаточной полноты при максимально возможной простоте представления учебного материала». Для систематизации и закрепления теоретического материала в учебное пособие включены контрольные вопросы. Практически весь теоретический материал сопровождается примерами и решением типовых задач, с целью формирования первоначальных умений выполнять типовые расчеты.

При самостоятельном изучении представленного в учебном пособии материала рекомендуется делать сопутствующие рабочие записи, а также формировать глоссарий-справочник, в который следует заносить основные формулы, правила, соотношения и определения используемых математических понятий. Впоследствии такой глоссарий-справочник может быть использован при выполнении заданий практических работ, которые также включены в учебное пособие.

**Содержание**

**Часть I**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | Пояснительная записка | стр. 4 |
| 2. | Тема: «Матрицы, виды матриц. Действия над матрицами» | стр. 6 |
| 3. | Тема: «Определители n-го порядка, их свойства и вычисление» | стр.14 |
| 4. | Тема: «Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителей в сумму алгебраических дополнений» | стр. 18 |
| 5. | Тема: «Обратная матрица» | стр. 23 |
| 6. | Практическое занятие № 1. Действия с матрицами. Нахождение обратной матрицы. | стр.28 |
| 7. | Практическое занятие № 2. Решение систем линейных уравнений методами линейной алгебры. | стр.30 |
| 8. | Практическое занятие № 3. Решение СЛАУ различными методами. | стр.36 |
| 9. | Тема: «Комплексное число и его формы» | стр.40 |
| 10. | Тема: «Геометрическое представление комплексных чисел» | стр.49 |
| 11. | Практическое занятие № 4. Действия над комплексными числами. | стр.56 |
| 12. | Тема: «Функция одной независимой переменной и способы ее задания. Характеристики функции» | стр.57 |
| 13. | Тема: «Основные элементарные функции, их свойства и графики» | стр.63 |
| 14. | Тема: «Сложные и обратные функции» | стр.68 |
| 15. | Практическое занятие № 5. Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований. | стр.72 |
| 16. | Тема: «Определение предела функции. Основные теоремы о пределах» | стр.76 |
| 17. | Тема: «Замечательные пределы» | стр.81 |
| 18. | Практическое занятие № 6. Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов. | стр.83 |
| 19. | Тема: «Непрерывность функции. Исследование функции на непрерывность» | стр.85 |
| 20. | Практическое занятие № 7. Вычисление производных функций. Применение производной к решению практических задач. | стр.89 |
| 21. | Практическое занятие № 8. Нахождение неопределенных интегралов различными методами. | стр.96 |
| 22. | Практическое занятие № 9. Вычисление определенных интегралов. Применение определенного интеграла в практических задачах. | стр.101 |
| 35. | Список используемых источников | стр.108 |

***Тема: «Матрицы, виды матриц. Действия над матрицами»***

**План:**

1. Матрицы. Основные понятия.
2. Действия над матрицами.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие матрицы, квадратной матрицы, треугольной матрицы, единичной матрицы, нулевой матрицы, транспонированной матрицы, противоположной матрицы, элементы матрицы, главной и побочной диагонали,
* Сложения матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц,
* Свойства операции сложения матриц и умножения матрицы на число, произведения матриц,

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Матрицы. Основные понятия**

**Матрицей** называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит *m* строк и*n* столбцов.

Матрица записывается в виде или, сокращенно , где *i*=1, 2, 3,…,*m* означает номер строки, *j*=1,2,3,…,*n*­ – номер столбца.

Матрицу А называют матрицей размера и пишут .Числа, составляющие матрицу, называются ее **элементами**.

**Матрицы равны** между собой, если равны соответствующие элементы этих матриц, т.е. , если , где *i*=1,2,3,…,*m*, *j*=1,2,3,…,*n*

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной**. Квадратную матрицу размера называют **матрицей n-го порядка**.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка *n*:

Элементы, стоящие на диагонали, идущей из левого верхнего угла,образуют **главную диагональ**, а элементы стоящие на диагонали, идущей из правого верхнего угла, образуют **побочную диагональ**.

Пример*.*квадратная матрица 3-го порядка.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Пример. диагональная матрица *n*-го порядка.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной**. Обозначается буквой Е.

Пример. единичная матрица 3-го порядка.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**(обозначается буквой О). Имеет вид

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно).

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

*Пример верхней треугольной матрицы.*

*Пример нижней треугольной матрицы.*

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей **транспонированной** к данной. Обозначается .

, .

Транспонированная матрица обладает следующим свойством:

.

Так, если , то .

**2. Действия над матрицами**

**1. Сложение матриц**

***Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров.***

**Суммой** двух матриц и называется матрица элементы, которой равны сумме соответствующих элементов матриц и , то есть

, где

Пример.

Аналогично определяется разность матриц.

**2. Умножение матрицы на число**

**Произведением** матрицы на число называется матица , каждый элемент которой равен , т.е.

если =, то 

**Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.**

Пример. ,

Матрицаназывается **противоположной** матрице А.

Разность матриц можно определить так: .

**Операция сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:**

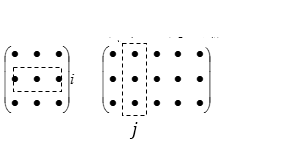
1. переместительный закон сложения ,
2. сочетательный закон сложения,
3. ;
4. для любой матрицы А существует матрица –А, такая, что, т.е. матрица, противоположная А;
5. ;
6. ;
7. ;
8. .

где - либо квадратные матрицы одного порядка либо прямоугольные матрицы одно размера , а – числа.

**3. Произведение матриц**

***Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.***

матрицы на матрицу называется матрица такая, что, где .

Получение элементасхематично изображается так: 

Вообще, чтобы получить элемент, стоящий на пресечении i-ой строки и j-го столбца матрицы произведения, нужно все элементы *i*-ой строки

матрицы А умножить на соответствующие элементы*j*-го столбца ()

матрицы В и полученные произведения сложить.

*Если матрицы А и В произвольного размера, то произведения АВ и ВА не всегда существуют.*

Рассмотрим умножение квадратных матриц второго порядка. Пусть . Произведением этих матриц называется матрица 

чтобы найти элемент первой строки и первого столбца матрицы С, нужно каждый элемент первой строки матрицы А (т.е.  и ) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы В (т.е.  и ) и полученные произведения сложить: ;

чтобы получить элемент  первой строки и второго столбца матрицы С, нужно умножить все элементы первой строки ( и ) на соответствующие элемент второго столбца (т.е.  и ) и полученные произведения сложить: ;

аналогично находится элементы  и .

Если матрицы А и В квадратные одного размера, то произведения и всегда существуют. Легко доказать, что , где А-квадратная матрица, - единичная матрица того же размера.

Пример . Найти произведение матриц А и В, если

,

Решение. Так как матрица и матрица, то матрица произведения и содержит 9 элементов. Найдем каждый элемент матрицы-произведения:



















Пример. Найти произведение матриц А и В, если

Решение. Произведение матриц А∙В не определенно, так как число столбцов матрицы А (3) не совпадает с числом строк матрицы В (2). При этом определенно произведение В∙А: Так как матрица и матрица , то матрица произведения и содержит 6 элементов.

**Умножение матриц обладают следующими свойствами:**

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

**4.Элементарными преобразованиями строк матрицы являются следующие операции:**

1) перестановка двух строк матрицы;

2) умножение строки на ненулевое число;

3) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, множенных на одно и то же число.

Если матрица получена из матрицы с помощью элементарных преобразований, то матрицы и называются **эквивалентными**.

Обозначение: .

С помощью элементарных преобразований любая матрица может быть приведена к **ступенчатому виду** (первый ненулевой элемент в каждой следующей ненулевой строке находится правее первого ненулевого элемента в предыдущей ненулевой строке).

Пример. Привести к ступенчатому виду матрицу

Решение:

**Решение типовых заданий:**

**Задание 1*.***Для заданных матриц найти матрицы

если, ,

.

Решение:

1. ;
2. ;

4. 



;

5.



.

Подчеркнем еще раз, что .

6. 



.

**Задание 2*.***Найти матрицу С, если:

3С=

3С=, следовательно С=

**Задание 3*.*** Найти если и

Решение.

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1.** Найти , если

**Задание 2.** Найти если

**Задание 3.** Для матриц вычислить:

**1)**, **2)**,

**4)5)**, **6)**,**7)**,

если, ,

**Задание 4.** Вычислите матрицу , где

**Задание 5.** Привести к ступенчатому виду:

**Контрольные вопросы:**

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей – строкой? Матрицей – столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными? Квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит «Транспонировать» матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существование произведения матриц?
14. Какими свойствами обладает произведение матриц?

***Тема: «Определители n-го порядка, их свойства и вычисление»***

**План:**

1. Определители. Основные понятия.
2. Основные свойства определителей.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие определителя 2-го порядка, определителя 3-го порядка, определителя n-го порядка.
* Формулировки свойств определителя.
* Схему вычисления определителя 2-го порядка.
* Формулировку правило Саррюса (схема треугольников).

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Определители. Основные понятия**

**Определитель** – это число, которое по специальным правилам вычисляется для каждой квадратной матрицы.

Определитель квадратной матрицы порядка можно обозначить также или

1. Пусть дана квадратная матрица второго порядка: 

**Определителем** (или **детерминантом**) второго порядка называется число. Определитель второго порядка записывается так:

detA==

**Определитель второго порядка равен разности попарных произведений элементов главной и побочной диагонали.**

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой: 

Пример. Найти определители матриц:

1. ; б)

Решение.

1. 

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка: 

1. **Определителем 3-го порядка,** соответствующим данной матрице, называется число

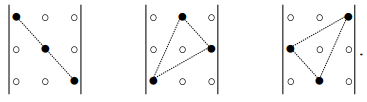


Определитель третьего порядка записывается так:

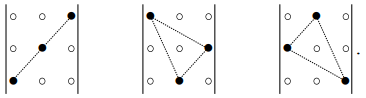


Чтобы запомнить, какие произведения в правой части берутся со знаком , а какие со знаком , полезно использовать следующее *правило треугольников* (*правилом Саррюса*), которое символически можно записать так:

Для того чтобы запомнить эту формулу, используют правило Саррюса (или правило треугольников). Произведение элементов главной диагонали входит в формулу со знаком также как и произведения и элементов, расположенных в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали:



А произведение элементов побочной диагонали, а также произведения и входят со знаком



Пример. Вычислить определитель матрицы 

Решение.

В общем виде **определитель n-го порядка** может быть представлен следующем виде:



где элемент определителя, – номер строки, – номер столбца.

**2. Основные свойства определителей**

1. «Равноправность строк и столбцов». Определитель матрицы не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот (т.е. транспонировать).

Другими словами определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы (или определитель не меняется при транспонировании):

Это свойство иногда называют *свойством инвариантности определителя*

*относительно транспонирования матрицы.*

1. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит свой знак на противоположный: 
2. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю. 
3. Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вывести за знак определителя: 
4. Если все элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.
5. Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины: 
6. Если элементы какого-либо строки (столбца) определителя представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей: 
7. Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, - нули, равен произведению элементов главной диагонали: 

**Задания для самостоятельного решение:**

**Задание 1:** Вычислить определители 2-го порядка:

**Задание 3:** Вычислить определители 3-го порядка:

**Задание 4:** Решить уравнения и неравенство:

**Контрольные вопросы:**

1. Что называется определителем матрицы?
2. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
3. Перечислите свойства определителей.

***Тема: «Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителей в сумму алгебраических дополнений»***

**План:**

1. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя.
2. Разложение определителей в сумму алгебраических дополнений.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие минора, алгебраического дополнения.
* Формулировку теоремы «о разложении определителя по элементам строки или столбца».

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя**

**Минором**  некоторого элемента определителя -го порядка называется определитель -го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Пример: Найти минор элемента а12 определителя 

Для этого вычеркнем первую строку, второй столбец.



В результате останется определитель порядка на единицу ниже и минор равен:



Пример. Записать все миноры определителя

Решение.

, , ,

, , ,

, , .

**Алгебраическим дополнением** элемента определителя называется минор этого элемента, взятый со знаком . Алгебраическое дополнение элемента принято обозначать .

Таким образом, .

- определитель знака, если – четное число, то знак

если - нечетное число, то знак

Знаки алгебраического дополнения

Пример. Найти алгебраические дополнения элементов определителя.

Решение.





.

**2.Разложение определителей в сумму алгебраических дополнений**

**ТЕОРЕМА.** (о разложении определителя по элементам строки или столбца). Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их соответствующие алгебраические дополнения.

По *i*-ой строке:

По *j-*му столбцу:

*Эти соотношения называются разложением определителя по элементам i-ой строки или j-го столбца.*

Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

Пример: Вычислить определитель четвертого порядка

По теореме определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки и разложим определитель по первой строке:



Пример. Определитель  разложить:

1. по элементам второй строки;
2. по элементам первого столбца.

Решение.

**1**. 

**2.**

Если определитель имеет четвертый или более высокий порядок, то его также можно разложить по элементам строки или столбца.

,

где алгебраическое дополнение.

Пример. Вычислить определитель матрицы 

Решение. Разложим определитель по элементам 1-го столбца.



**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1:** Запишите миноры и алгебраические дополнения определителя:

**Задание 2:** Вычислить определитель, разложив его по элементам первой строки:

**Задание 3:**Вычислить определитель, разложив его по элементам первого столбца:

**Задание 4.** Вычислить определитель:

**Задание 5.** Вычислить определитель четвертого порядка разложением по строке или столбцу

**Контрольные вопросы:**

1. Что называется минором?
2. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
3. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
4. Какие способы вычисления определителя вам известны?

***Тема: «Обратная матрица»***

**План:**

1. Обратная матрица.
2. Правило вычисления обратных матриц порядка.
3. Свойства обратной матрицы.
4. Ранг матрицы.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие обратной матрицы.
* Правило вычисления обратных матриц второго и третьего порядков.
* Свойства обратной матрицы.
* Понятие ранг матрицы.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

***1. Обратная матрица***

Пусть *А* – квадратная матрица *n-*го порядка 

Квадратная матрица порядка *n* называется обратной матрицей для данной матрицы *A*, если , где − единичная матрица.

Квадратная матрица *А* называется **вырожденной**, если ее определитель

равен 0,то есть.

В противном случае матрица *А* называется **невырожденной**.

Обратная матрица имеет те же размеры, что и матрица *А*.

**Теорема**. Всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу

, определяемую формулой 

где *A11, A12, …, Ann* есть алгебраические дополнения соответствующих элементов *a11, a12,…, ann* матрицы *А*.

**2. Правило вычисления обратных матриц n-го порядка**

1. Находят определитель матрицы т.е.
2. Находят алгебраические дополнения всех элементов  матрицы и записывают новую матрицу из алгебраических дополнений.
3. Транспонируют полученную матрицу (т.е. меняют, местами строки со столбцами).
4. Умножают полученную транспонированную матрицу на .



Нахождение обратной матрицы имеет большое значения при решении систем линейных уравнений и в вычислительных методах линейного программирования.

**3.Свойства обратной матрицы**

1. ;
2. ;
3. .

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы

Решение: *А*-1 (обратную матрицу) найдем по схеме

 Т.к.  , то данная матрица является невырожденной и, следовательно, существует обратная матрица

Найдем алгебраические дополнения каждого элемента:

Транспонируем эту матрицу, получим

Умножив полученную матрицу на число   , т.е. на   , получим

 Можно выполнить проверку и убедиться, что

Пример. Найти матрицу, если 

Решение.

1. Вычислим определитель матрицы А (по правилу треугольников):



, так как определитель , то матрица невырожденная и имеет обратную матрицу .

1. Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы по формуле

Знаки алгебраического дополнения .



















3. Подставляя найденные значения в формулу для получим: 



Можно выполнить проверку и убедиться, что

**4. Ранг матрицы**

Пусть дана произвольная матрица размера

Выделим любые строк и любые столбцов матрицы Элементы, находящиеся на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка Определитель этой матрицы называется минором порядка матрицы и обозначается .

Рассмотрим, например, матрицу

Любой элемент матрицы является минором порядка. Всего миноров порядка двенадцать.

Найдем какой-нибудь минор 2-го порядка. Выделим, например, первую и третью строки и второй и третий столбцы матрицы. На пересечении выделенных строк и столбцов получим минор 2-го порядка:. Кстати, число всех миноров 2-го порядка данной матрицы равно числу способов выбора двух строк из трех возможных, умноженному на число способов выбора двух столбцов из четырех возможных, а именно, где число сочетаний из

Укажем какой-нибудь минор 3-го порядка. Всего миноров 3-гопорядка

Выделив, например, второй, третий, четвертый столбцы матрицы, получим:

Очевидно, старший порядок миноров для данной матрицы равен трем.

**Рангом матрицы**  называется наибольший из порядков ее ненулевых миноров. Обозначение: или Любой ненулевой минор порядка называется **базисным минором.**

В примере, рассмотренном выше, минор не равен нулю, его порядок равен трем. Это максимальный порядок ненулевых миноров, следовательно, , а сам минор является базисным.

**Замечание**. Ранг матрицы не меняется при элементарныхпреобразованиях.Рангступенчатойматрицыравенчислуеененулевых строк.

Рассмотрим один из методов нахождения ранга матриц.

**Метод элементарных преобразований.** Матрица с помощью элементарных преобразований приводится к ступенчатому виду. Затем определяется ранг ступенчатой матрицы, которыйсовпадает с рангом исходной матрицы.

Пример. Найти ранг матрицы.

Решение: Приведем данную матрицу к ступенчатому виду:

Очевидно, что минор является ненулевым

минором максимального порядка для ступенчатой матрицы. Поскольку порядок этого минора равен трем, то ранг ступенчатой матрицы тоже равен трем и совпадает с числом ее ненулевых строк. А так как элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, то ранг исходной матрицы также равен трем.

Рассмотрим пример вычисления ранга матрицы.

Пример.

.

Стрелками обозначены следующие элементарные преобразования: 1) переставили местами первую и вторую строки; 2) прибавили к четвертой строке третью; 3) прибавили к третьей строке первую, умноженную на (-2), и четвертую строку разделили на 3; 4) разделили третью строку на 5 и поменяли местами третью и четвертую строки; 5) к третьей строке, умноженной на (-3), прибавили вторую строку и к четвертой строке прибавили третью. После проведенных преобразований получили матрицу трапециевидной формы с тремя ненулевыми строками. Получаем, что ранг матрицы равен

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1.** Найдите обратную матрицу для матрицы:

**Задание 2.** Выписать все миноры 3-го порядка матрицы:

**Задание 3.** Найти ранги матриц с помощью с помощью элементарных преобразований:

**Контрольные вопросы:**

1. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
2. Каков порядок вычисления обратной матрицы?
3. Какая матрица называется невырожденной?
4. Перечислите свойства обратной матрицы.
5. Что называется рангом матрицы?

***Практическое занятие № 1. «Действия с матрицами. Нахождение обратной матрицы»***

**Цель работы:**

1. Научиться выполнять операции над матрицами.
2. Научиться находить обратную матрицу.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие матрицы, определителя матрицы.

2. Понятие об основных операциях над матрицами.

**Умения:**

1. Применять полученные знания на сложение, вычитание и умножение матриц.

**Порядок работы на занятии:**

1. Повторить формулы сложения, умножения матрицы на число, произведения двух матриц.
2. Повторить правило нахождения обратных матриц.
3. Выполнить задание.
4. Выполненное задание покажите преподавателю.

**Содержание практической работы:**

**Задание 1*.*** Для матриц вычислить:

**1)**

**2)**

**3)**

**4)**если

, ,

**Задание 2.** Найти матрицу С, если:

**Задание 3.** Найти произведение матриц:

**Задание 4*.***Найдите обратную матрицу для матрицы

**Задание 5*.***Вычислить определитель:

**Задание 6.**Найти матрицу , если:

***Практическое занятие № 2. «Решение систем линейных уравнений***

***методами линейной алгебры»***

**Цель работы:**

1. Научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.
2. Научиться решать системы линейных уравнений матричным методом.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие системы линейных уравнений.
2. Матричный метод и метод Крамера.

**Умения:**

1. Решать системы линейных уравнений матричным методом и методом Крамера.

**Порядок работы на занятии:**

1. Повторить формулы Крамера.
2. Повторить правило решения матричного уравнения.
3. Рассмотреть образец решения задания 1.
4. Выполнить задание 2.
5. Выполненное задание покажите преподавателю.

***1. Основные понятия***

**Системой линейных алгебраических уравнений**, содержащей уравнений и неизвестных, называется система вида



(1)

где числа называются *коэффициентами* системы или коэффициентами при неизвестных.

Первый индекс у коэффициентов системы указывает на номер уравнения, второй на номер неизвестного, при котором записан этот коэффициент.

Числа называются свободными членами. Система линейных уравнений называется ***однородной***, если все свободные члены равны нулю, если же, хотя бы одно из них отлично от нуля, то **неоднородной**.

**Решением системы** (1) называется любая совокупность чисел *x1, x2, x3,…,xn*- подстановка которой в (1) обращает каждое уравнение этой системы в верное числовое равенство. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, имеющая только одно решение **определенной**, имеющая более одного решения - **неопределенной**, не имеющая ни одного решения - **несовместной**.

Решить систему (1) - это значит указать все множество ее решений или доказать ее несовместность.

Систему (1) удобно записать в компактной матричной форме Здесь А – матрица коэффициентов системы, называемая ***основной матрицей***:

- вектор-столбец из неизвестных ,- вектор-столбец из свободных членов .

Произведение матриц определено, так как в матрице А столбцов столько же, сколько строк в матрице Х ().

***Расширенной матрицей системы*** называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов

***2. Решение линейных систем формулами Крамера.***

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

 или в матричной форме А∙Х=В. Основная матрица такой системы квадратная.

Определитель этой матрицы  называется ***определителем системы***. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется ***невырожденной***.

***Теорема Крамера.*** *Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное, и это решение находится по формулам:*

*,* , , …, 

*где Δхi – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов bi.*

Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы замены столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Пусть . Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при  на столбец свободных членов, то получим *n* определителей (для n неизвестных)

, , … , 

Тогда формулы Крамера для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными запишутся так: … ,  или короче  где *i=1, 2, …, n*.

Рассмотрим случай, когда *определитель системы равен нулю*. Здесь возможны два варианта:

1.  и каждый определитель . Это имеет место только тогда. Когда коэффициенты при неизвестных  пропорциональны, т.е. каждое уравнение системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на число k. Очевидно что при этом система имеет *бесчисленное множество решений*.
2.  и хотя бы один из определителей . Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при неизвестных, кроме , пропорциональны. При этом получается система из противоречивых уравнений, которая *не имеет решений*.

Пример 1. Решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными 

Решение. Вычислим определитель системы  и определители и:

. 







Ответ: x1=1, x2=2

***3.Решение систем линейных уравнений матричным методом***

Пусть дана система уравнений 

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных . Свободные члены и неизвестные можно записать в виде матриц-столбцов: , 

Тогда используя правило умножения матриц, эту систему уравнений можно записать так:

= или 

Это равенство называется *простейшим матричным уравнением*.

*Чтобы решить матричное уравнение, нужно:*

1. Найти обратную матрицу .
2. Найти произведение обратной матрицы на матрицу – столбец свободных членов В, т.е..
3. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

Пример 2. Решить систему уравнений  представив ее в виде матричного уравнения.

Решение. Перепишем систему в виде АХ=В, где , , 

Решение матричного уравнения имеет вид .

Найдем :



, , ,

, ,,

, ,

Таким образом , откуда 



Следовательно, х=2, y=3, z=-2

**Пример типового задания:**

**Задание 1*.*** Решить систему уравнений: 

* Формулами Крамера
* Матричным методом

Решение.

* *Формулами Крамера:*

Δ = = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;

Δ1 =  = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30; x1 = Δ1/Δ = **1**;

Δ2 =  = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60; x2 = Δ2/Δ = **2;**

Δ3 =  = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90; x3 = Δ3/Δ = **3.**

* *Матричным методом:*

Х = , B = , A = 

Найдем обратную матрицу А-1.

Δ = detA = 5(4-9) + 1(2 – 12) – 1(3 – 8) = -25 – 10 +5 = -30.

А11 =  = -5; А21 =  = -1; А31 =  = -1;

А12 = А22 =  А32 = 

А13 =  А23 = А33 = 

A-1 =;

Находим матрицу Х.

Х = = А-1В = ⋅= .

Итого решения системы: **x =1; y = 2; z = 3.**

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 2.**Решить систему:

* по формулам Крамера
* Решить СЛАУ матричным методом

Соответствующие коэффициенты выберите из таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Вариант* | *k* | *l* | *m* | *n* | *p* | *q* | *r* | *s* | *t* | *f* | *g* | *h* |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 4 | 1 | -1 | -2 | 5 |
| 2 | 1 | 1 | -1 | -4 | 2 | 3 | 1 | -1 | 1 | -1 | 2 | 6 |
| 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 5 | -2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 | 5 |
| 4 | 1 | 1 | -1 | 0 | 2 | 3 | -2 | 2 | 3 | -2 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 | 3 | 9 | 3 | 3 | -1 | 0 |

***Практическое занятие № 3. «Решение СЛАУ различными методами»***

**Цель работы:**

Научиться решать системы уравнения методом Гаусса.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие системы линейных уравнений.

2. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.

**Умения:**

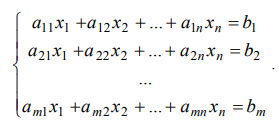
1. Решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

**Порядок работы на занятии:**

1. Повторить процесс решения систем линейных уравнений по методу Гаусса
2. Рассмотреть образец решения систем линейных уравнений методом Гаусса.
3. Выполнить задание 1.
4. Выполненное задание покажите преподавателю.

**1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса**

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из уравнений с неизвестными:



Матрица составленная из коэффициентов системы , называется матрицей системы (ее размер – , а вектор ()- столбцом (вектором) свободных членов.

Матрицу виданазывают расширенной матрицей системы (\*). Обозначение: или

Любой набор значений неизвестных , образующих является решением системы если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что при каждом ( уравнение представляет собой скалярное произведение строки матрицы системы на вектор ), и можно переписать в виде

Запись называется "матричной (векторной) формой записи" системы

Если СЛАУ имеет хотя бы одно решение, она называется **совместной** (соответственно, система несовместная, если она вообще не имеет решений). Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы будем называть приведенной (а саму систему канонической), если в каждой строке есть элемент , а все остальные элементы -го cтолбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть ведущими, а оставшиеся неизвестные назовем **свободными.**

**Теорема 1 (Кронекера - Капелли).** СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е выполняется равенство

Для совместной системы число назовем рангом системы.

**Теорема 2 (о количестве решений).** Пусть СЛАУ совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных , то система является **определенной**; если ранг системы меньше числа неизвестных то исходная система – **неопределенная.** Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется **общим решением системы**.

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

**Алгоритм метода Гаусса**. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

**I. Прямой ход.** Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований (умножение и деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число; сложение и вычитание строк; перестановка строк) свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если , то переходим к следующему этапу.

**II.** Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

**III. Обратный ход.** Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

**IV.** Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пример. Покажем, как методом Гаусса можно решить следующую систему:



Во – первых, обнулим коэффициенты при *х1* во втором и третьем уравнениях. Для этого вычтем почленно из второго уравнения системы первое уравнение, умноженное на 2, и из третьего уравнения – первое, умноженное на 3. Имеем:



Во – вторых, обнулим коэффициент при *х2* в третьем уравнении. Для этого вычтем из третьего уравнения второе, умноженное на 2. Получим легко решаемую систему треугольного вида:



В самом деле, из третьего уравнения находим значение , подставляем его во второе уравнение и находим значение Решаем первое уравнение и находим .

Таким образом, исходная система решена.

Ответ:

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. 

Решение.

Составим расширенную матрицу системы.



Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

,откуда получаем:

.

Ответ:

Пример: Решить систему уравнений (с тремя неизвестными) методом Гаусса.

Решение системы уравнений представим подробно. Приведу к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

Т.к.т.е система совместная и неопределенна (т.е. имеет бесконечно много решений). Количество главных переменных равно , количество свободных переменных равно Возьмем минор 2-ого порядка, например, . Его столбцы 1-ый и 2-ой соответствуют переменным это будут главные переменные, а свободная переменная. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

Подставляя выражение для в первое уравнение, получим Обозначая свободную переменную через , получим общее решение системы:

Частное решение системы получим, например, при

Ответ: система совместна и неопределенна; общее решение ; частное решение

**Задания практической работы:**

**Вариант 1**

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а)  б) 

**Вариант 2**

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) б) 

**Вариант 3**

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а)  б) 

**Вариант 4**

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а)  б) 

***Тема: «Комплексное число и его формы»***

**План:**

1. Комплексное число. Формы комплексных чисел.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
4. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.
5. Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие комплексного числа,
* Сложения, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме,
* Сложения, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме,

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Комплексное число. Формы комплексных чисел.**

**Комплексным числом** называется число вида , где и - действительные числа, – мнимая единица, обладающая свойством

– действительная часть к.ч.

– мнимая часть к.ч.

– коэффициент при мнимой единице

– мнимая единица

Например:

Множество комплексных чисел обычно обозначается символом C. Иерархию чисел возможно наблюдать на рисунке 1.

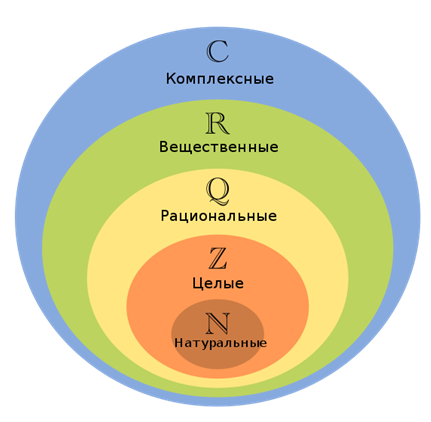


Рисунок 1. Иерархия чисел

Пример.Вычислите:

,

1. Если , то – мнимое число
2. Если *,*  то – действительное число
3. Если *,* то – комплексный нуль!

**Формы записи комплексного числа**.

Существует три формы записи комплексного числа:

1. Алгебраическая форма: .
2. Тригонометрическая форма:

.

1. Показательная форма комплексного числа (формула Эйлера):

Запись комплексного числа в виде *–* называют **алгебраической формой комплексного числа.**

Два **комплексных числа равны** тогда и только тогда, когда равны действительные части и коэффициенты при мнимой единице.

и

Пример: a) Найти ***x*** и ***y*** из равенства

Решение:

Согласно условию равенства комплексных чисел имеем

Отсюда

б) Найти ***x*** и ***y*** из равенства

Решение: Согласно условию равенства комплексных чисел имеем

Решая систему уравнений получаем:

**Равенство комплексного числа нулю (комплексный ноль):**

Два комплексных числа называются **сопряженными**, если они отличаются только знаками коэффициента при мнимой единице.

*Например:*

Два комплексных числа называется **противоположными**, если они в сумме дают нуль.

*Например:*

**2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.**

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме определяются следующим образом.

Если то

1. Сложение комплексных чисел:

Пример:

1. и
2. и
3. Вычитание комплексных чисел:

Пример:и

1. Произведением комплексных чисел:

;

Пример:и 

Решение:***Замечание*.** При выполнении умножения можно использовать формулы:

(*ab*)2 = *a*2 2*ab* + *b*2,  
(*a**b*)3 = *a*3 3*a*2*b* + 3*ab**b*3

(*a* + *b*)(*a* – *b*) = *a*2 – *b*2

1. Частным комплексных чиселназывается комплексное число , которое удовлетворяет равенству или

**Примечание**. При делении на комплексное число достаточно умножить числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю.

Например

Вычислить:



Операции суммы и произведения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

I. Свойства суммы:

- коммутативности:;

- ассоциативности: ;

II. Свойства произведения:

- коммутативности:;

- ассоциативности:;

III. Свойство дистрибутивности:

**3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.**

Кроме алгебраической формы записи комплексных чисел часто бывает удобна другая форма записи комплексного числа. Пусть (модуль комплексного числа буквой *r*) и (аргументом комплексного числа называется угол ).Тогда по определению аргумента имеем:

|  |
| --- |
|  |

Отсюда получается

Такая форма называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа.

**4. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме**

Тригонометрическая запись комплексного числа удобна для выполнения операций умножения, деления, возведение в степень и извлечения корня.

Если то

1) Умножение комплексных чисел выполняется по формуле:

Пример. Умножить числа



Решение:

****

2)Деление комплексных чисел выполняется по формуле:

, если

Пример. Найти частное комплексных чисел:



Решение:



3) Возведение в степень.

Из формул умножения и деления можно вывести общее правило возведения комплексных чисел в целую степень, называемое формулой *Муавра*.

Если то

4) Извлечение корня выполняется по формуле:

1. **Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами**

Обсудим теперь вопрос о том, как решаются квадратные уравнения в комплексных числах. Рассмотрим уравнение , где ,*b, c*–– произвольные комплексные коэффициенты.

Сделаем это на конкретном примере:

Решение:

Найдем дискриминант по формуле

***D* = *b*2 – 4*ac*.**

Так как ***a* = 1, *b* = – 6, *c* = 13**, то

***D* = 36 – 4\*1\*13 = 36 – 52 = – 16;**

Решение:

Здесь ***a* = 9, *b* = 12, *c* = 29**. Следовательно,

*D* = *b*2 – 4*ac* =122 – 4\*9\*29 = 144 – 1044 = – 900,

***Замечание***: если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то квадратное уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.

**Пример типового задания:**

Пример №1**.** Решите систему линейных уравнений с комплексными коэффициентами.

Решение:

1. Решим данную систему матричным способом по формуле , где - матрица неизвестных; - матрица обратная к матрице системы – матрица свободных членов. Обратную матрицу найдем по формуле где -алгебраические дополнения элемента - определитель матрицы системы *A.*

Для нашей матрицы

Следовательно, тогда

1. Вычислим определитель системы:

Определитель отличен от нуля, поэтому данную систему можно решить, используя метод Крамера:. Найдем определители:

Следовательно, по формулам Крамера получим:

Ответ: а. б.

Пример №2**.** При каких действительных значениях х и у комплексные числа:

и будут равными?

Решение. Комплексные числа

будут равными, если выполняются условия:

Решая систему, находим *.*

Ответ:

Пример №3**.** Даны уравнение, комплексное число   и натуральное число . Требуется:

1) найти корни уравнения на множестве комплексных чисел;

2) найти комплексное число  в алгебраической форме;

Решение:

1. Найдем корни уравненияна множестве комплексных чисел:

(здесь использовано:).

1. Чтобы найти комплексное число  , вычислим сначала

:

(– это число, сопряженное числу   т.е. ).

Затем находим числитель и знаменатель.

Теперь вычисляем , используя домножение числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю:

– получили число в алгебраической форме.

Ответы:1); 2)

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1**.Вычислите:

1. **Задание 2.**Выполнить действия над комплексными числами, представив результат в алгебраической форме:

*Вариант 1*.

*Вариант 2*.

*Вариант 3*.

Найдите числа:

**Задание 3.**Определить, при каких действительных значенияхикомплексные числа и будут равны

**Задание 4.** Решить уравнение

**Задание 5.**Даны уравнение, комплексное число   и натуральное число . Требуется:

1) найти корни уравнения на множестве комплексных чисел;

2) найти комплексное число  в алгебраической форме;

*Вариант №1.*

*Вариант №2.*

*Вариант №3..*

**Контрольные вопросы:**

1. Какие числа называют комплексные?
2. Запишите основное свойство мнимой единицы?
3. Какие правила действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах (сложение, вычитание, умножение, деление) вы знаете?
4. Как выглядит тригонометрическая форма комплексного числа?
5. Как выглядит показательная форма комплексного числа?

***Тема: «Геометрическое представление комплексных чисел»***

**План:**

1. Геометрическое изображение комплексного числа.
2. Геометрическое изображение суммы комплексных чисел.
3. Геометрическое изображение разности комплексных чисел.

**На занятии вы узнаете:**

* Геометрическое изображение комплексного числа,
* Геометрическое изображение суммы и разности комплексных чисел,

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Геометрическое изображение комплексного числа**

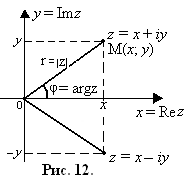
Действительные числа изображаются точками на числовой прямой:



Здесь точка *A* означает число –3, точка *B* – число 2, и  *O* – ноль. В отличие от этого комплексные числа изображаются точками на координатной плоскости.

Геометрическое представление комплексных чисел состоит в том, что на координатной плоскости комплексное число можно изобразить точкой или радиус-вектором этой точки (рис.), где*– действительная часть числа z*, *– мнимая часть числа*.Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек координатной плоскости.

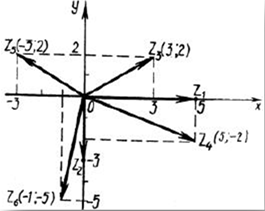
Плоскость, точкам которой сопоставлены комплексные числа, называется **комплексной плоскостью.**



Число называется *сопряженным* комплексному числу .Геометрически точки *z* и симметричны относительно оси *Ох*

*Модулем комплексного числа* называется действительное неотрицательное число. Геометрически модуль комплексного числа*–* это модуль вектора

**Пример.** Изобразить на плоскости числа



Комплексное число можно задать либо парой действительных чисел (декартовы координаты точки (*х*; *у*)), либо его модулем и величиной угла *φ* между вектором и положительным направлением оси *Ох* (полярные координаты точки. Величина угла называется *аргументом* комплексного числа.

Аргумент комплексного числа определен неоднозначно, а с точностью до слагаемого. Значение аргумента, заключенное в промежутке, называется *главным значением аргумента* и обозначается, тогда можно записать:

Для комплексного числааргумент не определен, его модуль.

Запись комплексного числа в виде называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Если использовать формулы связи между декартовыми и полярными координатамито можно записать *тригонометрическую форму* комплексного числа:где .(

Для определения главного значения аргумента можно использовать формулы:

(

Пример. Получим тригонометрическую форму комплексного числа

используя формулы и

Решение:

,следовательно, тригонометрическая форма комплексного числа для имеет вид:

**Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической:**

1. Находят модуль комплексного числа:
2. Для нахождения аргумента сначала определяют геометрически, в какой четверти находится точка комплексного числа.
3. Составляем уравнения и по решению одного из них определяем аргумент.
4. Записываем комплексное число в тригонометрической форме.

**2. Геометрическое изображение суммы комплексных чисел**

Рассмотрим геометрическую интерпретацию сложения двух комплексных чисел. Сумма чисел есть число . Рассмотрим векторы , конец которого находится в точке , , конец которого находится в точке , и, конец которого находится в точке , исходящие из точки *О*. Вектор является диагональю параллелограмма ***(рис.).***

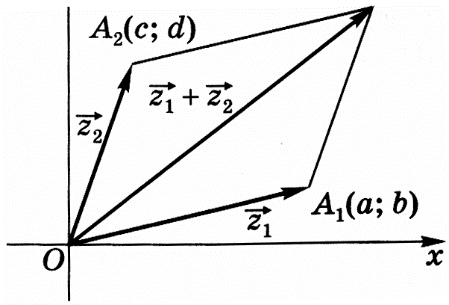
******

Рис.

Таким образом, сложение комплексных чисел иможно интерпретировать, как правило сложение по правилу параллелограмма соответствующих им векторов и.

**3. Геометрическое изображение разности комплексных чисел**

Векторы, изображающие противоположные комплексные числа и, симметричны относительно начала координат, поскольку концы этих векторов – точки и – симметричны относительно начала координат ***(рис.).***

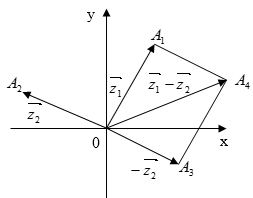
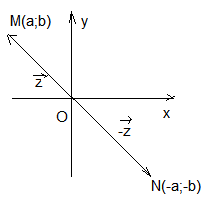


рис.a рис.b

Пусть даны числа .Так как , то вычитание из числа числа можно заменить прибавлением к числу числа, противоположного числу .

Рассмотрим векторы , конец которого находится в точке ; вектор, конец которого находится в точке, и , конец которого находится в точке *,* исходящие из точки *О****(рис.b).***

Построим параллелограмм. Тогда , т.е. вектор изображает разность комплексных чисел Так как

также является параллелограммом, то. Это означает, что длина отрезка, соединяющего точки, соответствующие комплексным числам и, равна и модуль разности двух комплексных чисел и представляет собой расстояние между точками и, изображающими эти числа.

**Пример типового задания:**

Пример. **Даны уравнение , комплексное число   и натуральное число .** Требуется:

3) получить тригонометрическую форму числа и вычислить с ее помощью . Ответ записать в тригонометрической и в алгебраической формах.

Решение:

1. Комплексное число задано в алгебраической форме , где Получим тригонометрическую форму этого числа . Вычислим модуль комплексного числа

и его аргумент:

Таким образом, – тригонометрическая форма числа .

Для вычисления используем формулу возведения комплексного числа в натуральную степень:

.

Здесь аргумент. Выбираем главное значение аргумента, принадлежащее промежутку, используя формулу:

получаем. Тригонометрическая форма комплексного числа дляимеет вид:.

Подставив значения cos0 = 1, sin0 = 0, получим алгебраическую форму этого числа:

Ответы: 3);

Пример. Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:

а) б) ; в) , если

а)

б)

в)

Пример. Найти

Представим в тригонометрической форме – 16:

Найдём модуль этого числа: Аргумент данного числа находится из системы

Значит, один из аргументов числа равен .

Получаем: .

Найдем корень: *=*

Найдем различные корни:

Пример. Найти 



где m=0,1,2



**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание1.**Даны уравнение, комплексное число   и натуральное число . Требуется: 3) получить тригонометрическую форму числа и вычислить с ее помощью . Ответ записать в тригонометрической и в алгебраической формах.

*Вариант №1.*

*Вариант №2.*

*Вариант №3..*

**Задание 2.**Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:

а) б) ; в)

*Вариант №1.*

*Вариант №2.,*

*Вариант№3., n=3*

**Задание 3.** Вычислите корни:

**Контрольные вопросы:**

1. Что такое модуль комплексного числа?
2. Что такое главный аргумент комплексного числа?
3. Геометрическая интерпретация комплексного числа, множество комплексных чисел?

***Практическое занятие № 4. «Действия над комплексными числами»***

**Цель работы:**

Научиться выполнять операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие комплексного числа.

**Умения:**

1. Выполнять операции над комплексными числами в алгебраической форме.

2. Выполнять операции над комплексными числами в тригонометрической форме

3. Решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом.

**Порядок работы на занятии:**

1. Повторить операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.
2. Выполненное задание покажите преподавателю.

**Содержание практической работы:**

**Задание 1.**Решите систему уравнений:

Вариант №1.

Вариант №2.

Вариант №3.

**Задание 2.**

**1).** Даны числа . Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:

Вариант №1.

Вариант №2.

Вариант №3.

**2).**Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

Вариант №1.

Вариант №2.

Вариант №3.

**3).** Выполнить действия в тригонометрической форме и представить результат в тригонометрической, алгебраической формах.

Вариант №1.

Вариант №2.

Вариант №3.

**4).** Найти значения корней.

Вариант №1.

Вариант №2.

Вариант №3.

**Задание 3.** Решить уравнение

*Вариант 1*.

*Вариант 2*.

*Вариант 3*.

***Тема: «Функция одной независимой переменной и способы ее задания. Характеристики функции»***

**План:**

1. Понятие функции.
2. Числовые функции. График функции. Способы задания функции.
3. Основные характеристики функций.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие функции,
* расширите имеющиеся представления о функции,
* познакомитесь с основными характеристиками функции.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

1. **Понятие функции.**

Понятие функции является одним из основных в математике. Оно связано с установлением соответствия между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества иСоответствие которое каждому элементу сопоставляет один и только один элемент , называется ***функцией*** и записывается или . Говорят ещё, что функция отображает множество на множество .

**. .**

**. .**

*X*

*Y*

*X*

*Y*

*g*

*f*

*Y*

*Y*

*X*

**. .**

*X*

*u*

ϕ

Например, соответствия и, изображённые на рисунке, являются функциями, а и ‒ нет. В случае ‒ не каждому соответствует элемент. В случае ‒ не соблюдается условие однозначности.

Элемент, который соответствует данному, называют ***образом*** элемента*.* Все элементы, которым соответствует данный , называют ***полным прообразом*** элемента.

Множество называется ***областью определения*** функции и обозначается *f*). Множество всех, для которых существует прообраз в *Х*, называется ***множеством значений*** функции и обозначается

1. **Числовые функции. График функции. Способы задания.**

Пусть задана функция. Если элементами множеств являются действительные числа, то функцию называют ***числовой функцией***. В дальнейшем будем изучать числовые функции, называть их просто функциями и обозначать.

Переменная *х* называется ***аргументом*** или ***независимой переменной***, а *у* ‒ ***функцией*** или ***зависимой переменной***. Относительно самих величин *х* и *у* говорят, что они находятся в ***функциональной зависимости***.

***Частное значение*** функциипри записывают. Например, если

***Графиком*** функции называется множество всех точек плоскости , для каждой из которых *х* является значением аргумента, а ‒ соответствующее значение функции.

*О*

1

*х*

*у*

*М*(*х*;*у*)

Например, графиком функции является верхняя полуокружность радиуса с центром

Чтобы задать функцию, необходимо задать правило, позволяющее, зная *х*, находить соответствующее значение функции.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный и графический.

***Аналитический способ***: функция задаётся в виде одной или нескольких формул или уравнений.

1.  2) 

Если область определения функции не указана, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл. Так, областью определения функции является отрезок .

Аналитический способ является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию.

***Графический способ***: задаётся график функции; по графику находят значение функции, соответствующее данному значению аргумента и наоборот. Преимущества ‒ наглядность; недостатки ‒ неточность.

***Табличный способ*** применяется, когда целесообразно задать пары *х* и *у* перечислением.

1. **Основные характеристики функций.**

Функция , определённая на множестве , называется ***чётной***, если выполняются условия; ***нечётной***, если выполняются условия .

График чётной функции симметричен относительно оси а нечётной ‒ относительно начала координат.

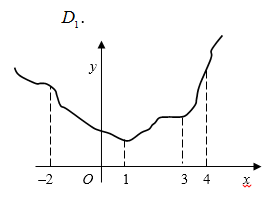
Например,,, ‒ чётные функции, а , ‒ нечётные функции; , ‒ функции общего вида.

Пусть функция определёна на множестве и пусть. Если для любых значений аргументов  из неравенства  вытекает неравенство:

а) , то функция называется ***возрастающей*** на множестве (большему значению аргумента соответствует большее значение функции);

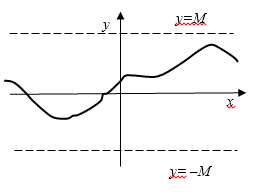
б) , то функция называется ***неубывающей*** на множестве ;

в) , то функция называется ***убывающей*** на множестве  (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции);

г) , то функция называется ***невозрастающей*** на множестве .

Например, функция, заданная графиком на рисунке, убывает на промежутке , не убывает на , возрастает на .

Возрастающие, невозрастающие, убывающие, неубывающие функции на множестве называются ***монотонными*** на этом множестве, а возрастающие и убывающие ‒ ***строго монотонными***. Интервалы, в которых функция монотонна, называются ***интервалами монотонности***.

Функцию, определённую на множестве *D* называют ***ограниченной*** на этом множестве, если существует такое число , что для всех  выполняется неравенство: .

:.

Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми *у*=‒*М* и *у=М*.

Функция , определённая на множестве *D*, называется ***периодической*** на этом множестве, если существует такое число *T>0*, что при каждом  значение  и . При этом число *Т* называется ***периодом функции***. Если *Т* ‒ период функции, то её периодами будут также числа *пТ*, где  Так, для  периодами будут числа  Основной период (наименьший положительный) ‒ это период . Вообще за основной период берут наименьшее положительное число *Т*, удовлетворяющее равенству .

Пример. Найти область определения функции

1)

2)

3)

Пример. Установить четность или нечетность функции.

1)

2)

3)

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1**.Найдите область определения функции

**Задание 2**.Доказать, что функция является четной.

**Задание 3.** Установить четность или нечетность функции.

**Задание 4.**Доказать, что функция является периодической с периодом

**Задание 5.** Описать основные свойства функции по графику:

1)

4)

**Контрольные вопросы:**

1. Сформулируйте определение функции?
2. Что называется областью определения и областью значений функции?
3. Какие существуют способы задания функции?
4. Какая функция называется четной, нечетной? Приведите примеры.
5. Какая функция называется возрастающей, убывающей? Приведите графические примеры.

***Тема: «Основные элементарные функции, их свойства и графики»***

**План:**

1. Линейная функция.
2. Степенная функция.
3. Показательная функция.
4. Логарифмическая функция.
5. Тригонометрические функции.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие элементарные функции,
* познакомитесь с основными характеристиками элементарных функции.

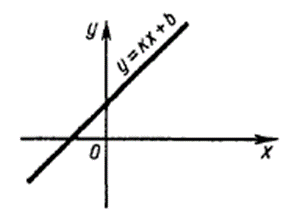
**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитать текст лекции или прослушать лекцию преподавателя.
2. Законспектировать лекцию.
3. Ответить на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

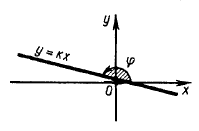
Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

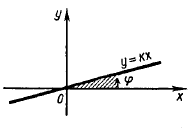
**1. Линейная функция**

Линейная функция задается уравнениемдействительные числа. Область определения-множество всех действительных чисел. Графиком линейной функций является прямая. Чтобы построить прямую достаточно две точки.



Если эта функция выражает прямую пропорциональную зависимость между

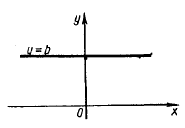
В этом случае прямая проходит через начало координат.

Угловой коэффициент равен где -угол, образованный прямой с

положительным направлением оси абсцисс.

Функция возрастает, если (угол-острый); функция убывает, если (угол-тупой).

При получаем постоянную функцию в частности,если

Если то есть функция четная.

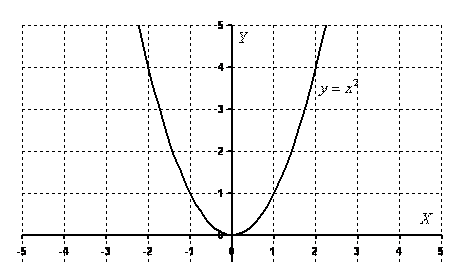
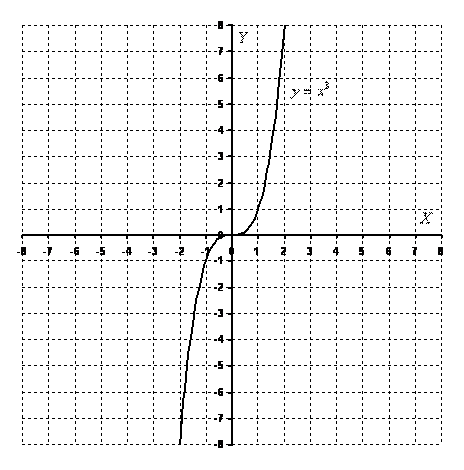
Если то есть в этом случае функция нечетная.

Если то есть в этом случае функция не является ни четной, ни нечетной.

**2. Степенная функция**

Степенная функция

При получим квадратичную функцию . Ее графиком является парабола.

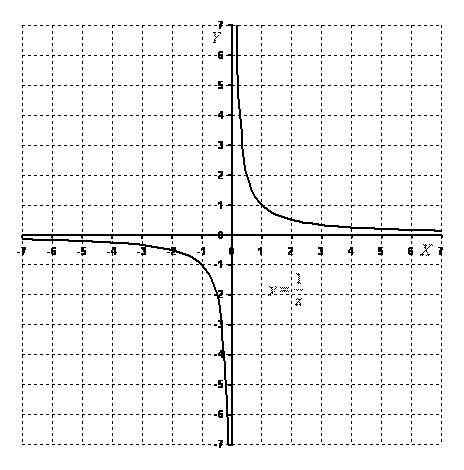
Область определения -множество действительных чисел. Функция четная, поскольку . Она ограничена снизу, так как . Функция возрастает при иубывает при.

При получим функцию , графиком которой является кубическая парабола.

Область определения, область значений – любое действительное число. Функция является нечётной, так как . Функция возрастает во всей области определения.

Степенная функция , обладает теми же свойствами, что и функция , а в случае, когда -нечетное число, -теми же свойствами, что и функция

При получим функцию , которая выражает обратную пропорциональную зависимость между и . Графиком является гипербола.

Область определения: Область значений: Функция является нечётной, так как Гипербола симметрична относительно начала координат. Функция убывает при

**3. Показательная функция**

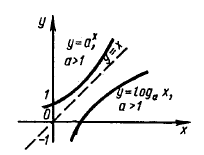
Показательная функция данное положительное число, не равное единице, а показатель степени -переменная величина, которая может принимать любые действительные значения.

Основание степени считается отличным от единицы, так как при всяком значении равна 1, то есть функция становится не зависящей от .

Функция определена для всех действительных значений, то есть

Свойства четности и нечетности функции не обладает

Функция является монотонной; она возрастает при График проходит через точку



**4. Логарифмическая функция**

Логарифмическая функция Эта функция является обратной по отношению к показательной функции, так как если Отсюда следует, что график логарифмической функции симметричен графику показательной функции относительно биссектрисы IиIIIкоординатных углов.

Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел, то есть (отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют).

Область значений функции – множество всех действительных чисел.

Свойствами четности и нечетности функция не обладает.

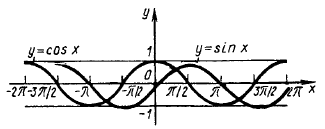
Функция является монотонной; она возрастает при и убывает при

График проходит через точку (1;0) так как

**5. Тригонометрические функции**

Функции определены для всех Они являются периодическими с периодом .

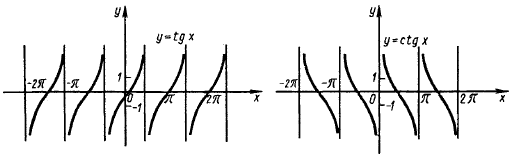
Функция – нечетная, поскольку ; функции четная, так как .Графики этих функции представлены ниже.



Функция не определена только в точках, где то есть в точках , а функция не определена только в точках, где , то есть в точках

При этом – нечетные функции, так как Обе функции являются периодическими с периодом .

Графики функции и изображены ниже.



Элементарными называются функции, образованные из основных элементарных функций с помощью конечного числа математических действий и образования из них сложных функций.

Например, функции являются элементарными.

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1**.Построить график функции*.*

**Задание 2**.Построить график функции

**Задание 3**. Построить правую ветвь гиперболы .

**Контрольные вопросы:**

1. Степенные функции.
2. Логарифмическая функция.
3. Показательная функция.
4. Тригонометрические функции.
5. Линейные функции.

***Тема: «Сложные и обратные функции»***

**План:**

1. Обратная функция.
2. Сложная функция.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие обратной функции, сложной функции.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

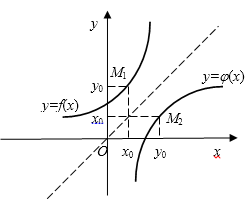
1. **Обратная функция**

Пусть задана функция с областью определения и множеством значений . Если для каждого существует единственный прообраз в , то можно поставить в соответствие элементам элементы , т.е. определить функцию с областью определения и множеством значений Такая функция называется ***обратной*** к функции и записывается . Про функции и говорят, что они являются взаимно обратными.

Чтобы найти функцию, обратную к функции , достаточно решить уравнение относительно и переобозначить зависимые и независимые переменные (чтобы независимая по-прежнему была а зависимая).

Например, для функции обратной является функция . Для функции, , обратной является функция. Заметим, что для функции , заданной на всей числовой прямой, обратной функции не существует, т.к. одному значению *у* соответствуют два значения . В нашем первом примере функция не обратима по той же причине.

Из определения обратной функции вытекает, что функция имеет обратную тогда и только тогда, когда функция задаёт взаимно однозначное соответствие между множествами . Отсюда следует, что строго монотонная функция имеет обратную. При этом, если функция возрастает (убывает), то и обратная функция возрастает (убывает).

Так как мы переобозначили переменные, то, если точка принадлежит кривой , то точка принадлежит кривой . Точки с такими координатами симметричны относительно прямой *.*

Поэтому графики обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

1. **Сложная функция.**

Термин «сложная» используется здесь в смысле «составная», то есть сложная функция составлена из других функций. Дадим точное определение сложной функции.

Пусть функция определена на множестве , а функция – на множестве , причем множество значений функции содержится в области определения функции .Поставим в соответствие каждому числу из число . Тем самым на множестве будет задана функция . Эту функцию называют сложной функцией или композицией функций и .

При этом называют внешней, a — внутренней функцией композиции.

Пример. Пусть . Составьте сложную функцию , если

.

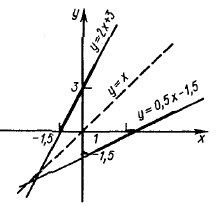
Решение. Подставим вместо в формулу функции , соответственно, и :

*1*. Получаем *1*

*.* В итоге *.*

Пример. Дана функция . Найти функцию, обратную данной.

Решение. Решая данное уравнение относительно*x*, имеем , откуда Переходя к обычным обозначениям, то есть заменяя в последнем равенстве *x*на *y,* а *y* на*x*, получаем функцию, обратную данной: . На рисунке изображены графики данной функции и обратной к ней, а также прямая , относительно которой графики этих функций симметричны.



Пример. Даны две функции , соответственно, *.* Найдите сложную функцию

Решение. *, , .*

Рассмотрим следующую задачу, в которой требуется найти композицию функций и , причем первая функция – внешняя, а вторая - внутренняя. Для удобства имеет смысл ввести новые обозначения для переменных второй функции, обозначив ее аргумент буквой , а зависимую переменную – буквой . Имеем . Важно понимать, что введение других обозначений переменных никак не повлияло на функцию. Записи и представляют одну и ту же функцию, с областью определения , действие которой состоит в возведении аргумента в квадрат и прибавлении числа 2.

Композицией функций и является функция . В этом случае также ничего не мешает обозначить другой буквой аргумент сложной функции, а именно - буквой , то есть так, как обозначены аргументы обеих функций в условии задачи. Таким образом, получаем ответ: . Заметим, что тот же результат можно получить, если формально подставить в формулу первой функции вместо выражение . На практике, конечно, можно пользоваться этим приемом, при этом понимая математический смысл произведенной операции.

Пример. Найдите сложную функцию, составленную из функций и , где первая функция будет внешней, а вторая - внутренней.

Решение. В первую функцию вместо подставим выражение . В итоге получаем .

1. Пусть даны две функции и

* сложная функцию, в которой - внешняя функция, а – внутренняя, то есть функция, имеет вид
* Если, наоборот, в качестве внешней функции взять , а в качестве внутренней - , то есть составить сложную функцию , то получим функцию .

В итоге получены две разные функции: и . Они имеют разные области определения, у первой , а у второй . Кроме того, функции принимают разные значения, например, при : значение первой равно , а второй равно . Таким образом, для заданных функций и оказалось, что . На основании этого можно сделать вывод о том, что если в сложной функции внутреннюю и внешнюю функции поменять местами, то может получиться другая функция.

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1.**

а) Заданы функции , . Найдите

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

б) Заданы функции , Найдите

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

**Задание 2.**Составьте сложные функции и , если

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Задание 3.** Заполните таблицу

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  | **?** |
|  |  |  | **?** |
|  |  | **?** |  |
|  | **?** |  |  |

**Задание 4.**Найти функцию, обратную данной

**Контрольные вопросы:**

1. Какая функция называется обратной? Приведите пример.

2. Какая функция называется сложной? Приведите пример.

***Практическое занятие № 5. «Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований»***

**Цель работы:**

Научиться строить графики реальных функций с помощью геометрических преобразований.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие функции.

**Умения:**

1. Выполнять построение графиков функции с помощью геометрических преобразований.

**Порядок работы на занятии:**

1. Построить графики функций с помощью геометрических преобразований.
2. Выполненное задание покажите преподавателю.

**Теоретический материал**

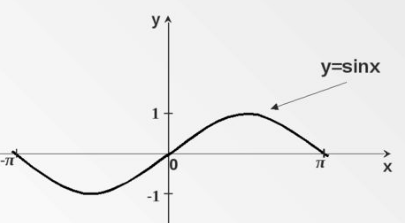
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Функция** | **Преобразование** | **Графики** |
| 1 |  | Сначала строим график функции ƒ(x), а затем симметрично отображаем его относительно оси OX. |  |
| 2 |  | Сначала строим график функции ƒ(x), а затем симметрично отображаем его относительно оси OY. |  |
| 3 |  | Сначала строим график функции ƒ(x), а затем, если А>0 поднимаем полученный график на А единиц вверх по оси OY. Если А<0, то опускаем вниз. |  |
| 4 |  | Сначала строим график функции ƒ(x), а затем, если a>0, то график функции смещаем на а единиц вправо, а если а<0, то на а единиц влево. "−" − → "+" − ← |  |
| 5 |  | Сначала строим график функции ƒ(x), а затем, если K>0, то растягиваем полученный график в K раз вдоль оси OY. А если 0<K<1, то сжимаем полученный график в 1 ∕ K раз вдоль оси OY. ↕ ↓ ↑ |  |
| 6  7 |  | Сначала строим график функции ƒ(x), а затем, если к >1, то сжимаем полученный график в к раз вдоль оси OХ.  А если 0< к <1, то растягиваем полученный график в 1∕ к раз вдоль оси OХ.  к >1 − →← 0< к <1 − ←→ ƒ( x ) → ƒ(к x ) → ƒ(к( х + а ∕ к )) →A ƒ(к( х + а ∕ к )) → A ƒ(к( х + а ∕ к )) +В |  |
| 8 |  | Сначала строим график функции ƒ(x), а затем часть графика, расположенную выше оси ОХ оставляем без изменения, а часть графика, расположенную ниже оси ОХ, заменяем симметричным отображением относительно ОХ. |  |
| 9 |  | Сначала строим график функции ƒ(x), а затем часть графика, расположенную правее оси ОУ, оставляем без изменения, а левую часть графика заменяем симметричным отображением правой относительно ОУ. |  |
| 10 |  |  |  |

**Содержание практической работы:**

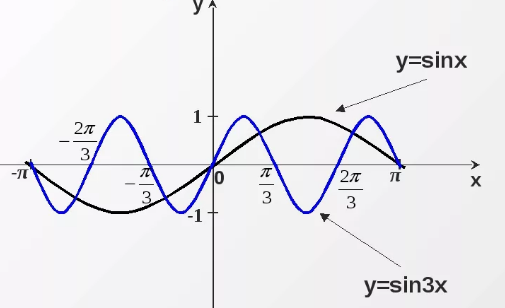
**Пример типового расчета.**

Построить график функции, используя геометрические преобразования

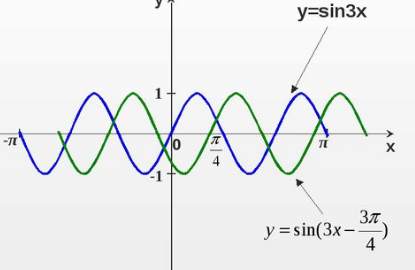
1. Построим график основной функции



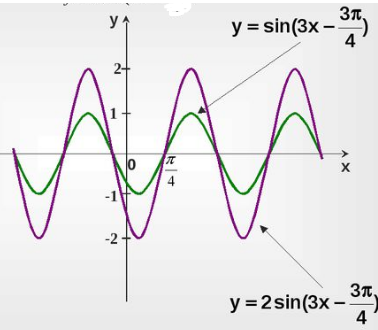
2. Построим график функции , который получается из предыдущего сжатием в 3 раза по оси к оси.



3. Построим график функции который получается из предыдущего сдвигом вправо на



4. Построим график функции , который получается из предыдущего путем растяжения по оси от оси в 2 раза.



**Задания для практической работы:**

Построить графики функций, используя геометрические преобразования

На оценку «3»:

*Вариант №1*. Постройте график функции:

*Вариант №2.*Постройте график функции:

*Вариант №3.*Постройте график функции: .

*Вариант №4.*Постройте график функции:

*Вариант №5.*Постройте график функции:

На оценку «4»:

*Вариант №1*. Постройте график функции:

*Вариант №2*. Постройте график функции:

*Вариант №3*. Постройте график функции:

*Вариант №4*. Постройте график функции:

*Вариант №5*. Постройте график функции:

На оценку «5»:

*Вариант №1*. Постройте график функции:

*Вариант №2*. Постройте график функции:

*Вариант №3*. Постройте график функции:

*Вариант №4*. Постройте график функции: .

*Вариант №5*. Постройте график функции:

***Тема: «Определение предела функции. Основные теоремы о пределах»***

**План:**

1. Предел функции.
2. Основные теоремы о пределах.
3. Типы неопределённостей и их виды.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие предела функции, бесконечно малой функции, бесконечно большой функции,
* Основные теоремы о пределах функции,
* Типы неопределенностей и способы их раскрытия.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Предел функции**

Пусть дана функция:

Число ***А*** называется ***пределом функции***при стремящемся к (в точке), если для любого положительного числа найдется такое положительное число **,** что , как только .

Обозначение:

Функция *y=f(x)* называется ***бесконечно малой*** при *х*, стремящемся к (в точке), если

Функция *y=f(x)* называется ***бесконечно большой*** при *х*, стремящемся к (в точке), если для любого положительного числа *М* найдется такое положительное число**,** что , как только

.

Обозначение:

Функция *y=f(x)*, заданная на всей числовой прямой, называется ***бесконечно большой*** при *х*, стремящемся к , если для любого положительного числа *М* найдется такое положительное число *Т*, что , как только .

Обозначение:

**2. Основные теоремы о пределах:**

**Теорема 1.** Предел суммы, разности, произведения двух функций равен

соответственно сумме, разности и произведению пределов этих функций.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

**1** ;

**2** ;

**3**;

**Теорема 2.** Если функции имеют конечные пределы и , причем последний не равен нулю, то при существует предел частного , и он равен частному их пределов:

**4**.

В простейших случаях вычисление предела функции сводится к подстановке в функцию, стоящую под знаком предела, предельного значения аргумента. Но довольно часто такая подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным значениям вида: , , , (), (. Вычисление предела в этих случаях, называют раскрытием неопределенностей. Для раскрытия неопределенностей преобразуют выражение, стоящее под знаком предела, затем используют теоремы о пределах, замечательные пределы.

**3.Типы неопределённостей и их виды**

*1 тип Неопределённость вида в пределе*

**Примеры***:*

*1)*(т.к. старшие степени числителя и знаменателя равны, то делим коэффициенты при старших степенях *х*).

*2)*(т.к. старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя)

*2 тип Неопределённость вида в пределе*

Для раскрытия неопределённости необходимо либо разложить числитель и знаменатель на множители, либо умножить выражение содержащее корни на сопряжённое.

**Примеры:**

1)

2)==

**Примеры типового расчета.**

Пример. Вычислить

Решение. Подставляем в функцию предельноe значение аргумента получим

Ответ: 5.

Пример. Вычислить

Решение. Подставляем в функцию предельноe значение аргумента получим . Необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, используя формулы сокращенного умножения, правило разложения квадратного трехчлена на множители

( - корни квадратного трехчлена), метод группировки. Решение записывают в виде:

Сокращение на возможно, так как оно не равно нулю, а лишь стремится к нулю.

Ответ: 6.

Пример. Вычислить

Решение. Подставляем в функцию предельноe значение аргумента , получим . Чтобы избавиться от неопределенности, надо функцию умножить на единицу, представив ее в виде дроби, сопряженной к выражению, содержащему корень: . Запишем решение

Ответ

Пример. Вычислить

Решение. Подставляем в функцию предельноe значение аргумента *x* , получим . Чтобы избавиться от неопределенности, надо в числителе и знаменателе вынести множитель, содержащий максимальную степень переменной. Запишем решение

Ответ: 0.

Пример. Вычислить

Решение. Подставляем в функцию предельноe значение аргумента *x* , получим. Чтобы избавиться от неопределенности, надо в числителе и знаменателе вынести множитель, содержащий максимальную степень переменной. Запишем решение

Ответ: .

**Задания для самостоятельного решения:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант №1. | Вариант №2. | Вариант №3. |
| На оценку «3» | | |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| На оценку «4» | | |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| На оценку «5» | | |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Контрольные вопросы:**

1. Какие виды неопределенностей встречались при решении заданий?
2. Что называется пределом функции в точке?
3. Какая функция называется бесконечно малой?
4. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций?

***Тема: «Замечательные пределы»***

**План:**

1. Первый замечательный предел.
2. Второй замечательный предел.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие предела функции.
* Замечательные пределы,
* Типы неопределенностей и способы их раскрытия.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитать текст лекции или прослушать лекцию преподавателя.
2. Законспектировать лекцию.
3. Ответить на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1.Первый замечательный предел**

*3 тип неопределенности I-ый замечательный предел:*

Предел отношения синуса бесконечно малого угла к величине этого угла в радианах равен единице.

При ***х→0*** имеют место следующие неопределённости:

Следствия .

Из первого замечательного предела вытекают и другие следствия

Пример.

Пример.

Пример.

**2.Второй замечательный предел**

*4 тип неопределенности II -ой замечательный предел*

или

**.**

Пример.

Пример.

Имеет неопределенность вида ;

Для раскрытия неопределенности вида лучше всего воспользоваться следующей формулой:

Имеем

Тогда

Следовательно,

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1.** Вычислить пределы:

**Контрольные вопросы:**

1. Какую неопределенность раскрывает первый замечательный предел?
2. Какую неопределенность раскрывает второй замечательный предел?
3. Формула первого замечательного предела?
4. Формула второго замечательного предела?

***Практическое занятие № 6. «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов»***

**Цель работы:**

Закрепить навыки применения первого и второго замечательных пределов

**Знания (актуализация)**:

1. Определения предела функции.

**Умения:**

* + 1. Вычислять пределы функций: раскрывать неопределённости вида .

**Порядок работы на занятии:**

1. Вычислить пределы функции с помощью замечательных пределов.
2. Выполненное задание покажите преподавателю.

**Содержание практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант №1. | Вариант №2. | Вариант №3. |
| На оценку «3» | | |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| На оценку «4» | | |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| На оценку «5» | | |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

***Тема: «Непрерывность функции. Исследование функции на непрерывность»***

**План:**

1. Непрерывность функции.
2. Классификация точек разрыва.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие непрерывной функции,
* Классификацию точек разрыва: что называют точкой разрыва Iрода и точкой разрыва II рода.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитать текст лекции или прослушать лекцию преподавателя.
2. Законспектировать лекцию.
3. Ответить на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Непрерывность функции**

*Определение*: функция непрерывна в точке, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: .

Определение детализируется в следующих условиях:

1) Функция должна быть определена в точке , то есть должно существовать значение .

2) Должен существовать общий предел функции: . Это подразумевает существование и равенство односторонних пределов:

3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке:.

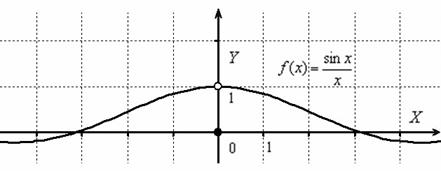
**Замечание!!!** Если нарушено **хотя бы одно** из трех условий, то функция теряет свойство непрерывности в точке.

**2.Классификация точек разрыва**

Функция может иметь разрыв в точках, где она меняет способ своего задания или не определена.Данные точки в свою очередь подразделяются на две большие группы: **разрывы первого рода** и **разрывы второго рода**.

*Точки разрыва первого рода*

Если в точке нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы конечны,** то она называется **точкой разрыва первого рода.**

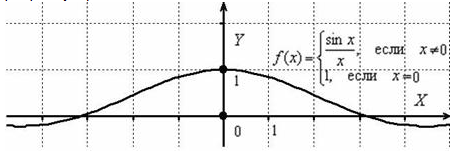
**Пример.** Изобразим на чертеже график функции:

Данная функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки . И в самом деле, знаменатель же не может быть равен нулю. Однако хоть точка и выколота, справедливость первого замечательного пределане нарушена – мы можем приблизиться к «нулю» и слева и справа *бесконечно близко*, таким образом, односторонние пределы существуют и совпадают:=1 (Условие №2 непрерывности выполнено).

Но функция не определена в точке , следовательно, нарушено Условие №1 непрерывности, и функция терпит разрыв в данной точке.

Разрыв такого вида (с существующим общим пределом) называют **устранимым разрывом**. Почему устранимым? Потому что функцию можно доопределить в точке разрыва:

Странно выглядит? Возможно. Но такая запись функции ничему не противоречит! Теперь разрыв устранён и все счастливы:



Выполним формальную проверку:  
1)   – функция определена в данной точке;  
2) =1 – общий предел существует;  
3)  – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, все три условия выполнены, и функция непрерывна в точке  по определению непрерывности функции в точке.

**Пример:**

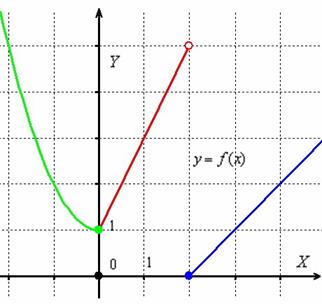
Рассмотрим функцию заданную кусочно

и выполним её чертёж.

Как построить график? Очень просто.

На полуинтервале  чертим фрагмент параболы  , на интервале  – отрезок прямой  и на полуинтервале   – прямую .

Сейчас нас будет интересовать только точка . Исследуем её на непрерывность:

1)– функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы.

В результате получены *конечные числа*, причем они *не равны*. Поскольку односторонние пределы конечны и различны, то наша функция терпит разрыв первого рода неустранимый. Логично, что разрыв не устраним – функцию действительно не доопределить и «не склеить», как в предыдущем примере.

*Точки разрыва второго рода:*

Точка называется точкой разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов существует или равен бесконечности.

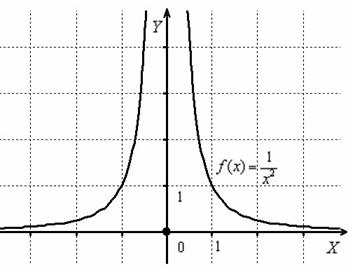
**Пример***:* Рассмотрим функцию .

Исследуем на непрерывность точку   по стандартной схеме:

1) Функция не определена в данной точке, поскольку знаменатель обращается в ноль

2) Вычислим односторонние пределы:

под записью  понимается *бесконечно малое отрицательное число*, а под записью  – *бесконечно малое положительное число*.

Односторонние пределы бесконечные, следовательно является точкой разрыва второго рода. Построим схематичный гафик данной функции, для этого вычислим ещё пределы этой функции на бесконечности .

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1.** Задана функция  и два значения аргумента  и  . Требуется:

* + - 1. установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента;
      2. в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа;
      3. сделать схематический чертеж.

**Задание 2.** Построить график функции , используя график, записать промежутки непрерывности функции, перечислить точки разрыва и указать тип каждого из них.

*Вариант №1.*

*Вариант №2.*

*Вариант №3.*

*Вариант №4.*

*Вариант №5.*

*Вариант №6.*

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение непрерывной функции.
2. Что называется точкой разрыва?
3. На какие два типа делятся точки разрыва? Дайте определение.
4. Какие пределы называются односторонними?
5. Какая точка называется точкой устранимого разрыва?

***Практическое занятие № 7. «Вычисление производных функций. Применение производной к решению практических задач»***

**Цель работы:**

Научиться вычислять производные заданных функций, исследовать и строить графики функций

**Знания (актуализация)**:

1. Определение производной.

2. Признаки возрастания и убывания функции; необходимые и достаточные условия экстремума; алгоритм вычисления экстремума; признаки выпуклости (вогнутости) графика функции, точек перегиба.

**Умения:**

1. Строить графики функций.

**Порядок работы на занятии:**

1. Повторить формулы вычисления производной функции.
2. Повторить схему исследования функции.
3. Выполнить задание.
4. Выполненное задание покажите преподавателю.

**Теоретический материал**

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Производная функции в точке называется предел (если он существует) отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю и обозначается , т.е.

Другие обозначения: ); .

При вычислении производных используют таблицу производных и правила дифференцирования.

**Правила дифференцирования**

Пусть и − непрерывные функции в точке , тогда существуют производные от суммы (разности), произведения, частного этих функций в заданной .

***Производная сложной функции***

Пусть , а тогда ) − сложная функция, ее производная находится по правилу дифференцирования сложной функции. Если каждая функция и , дифференцируема по своему аргументу, то

Таблица производных основных элементарных функций и производных сложных функций

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | функция | производная | функция | производная |
| 1 | *у =хn* | *(xn)′=n · xn-1* | *y = un* | *(un)′= n·un-1·u′* |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 | *y =ax* | *(ax) =ax · ln a* | *y =au* | *(au) =au · ln a ·u′* |
| 5 | *y =ex* | *(ex) =ex* | *y =eu* | *(eu) =eu ·u′* |
| 6 | *y =*log*a x* | (log*a x*)′ = | *y =*log*a u* | (log*a u*)′ = |
| 7 | *y =*ln *x* | (ln *x*)′ = | *y =*ln *u* | (ln *u*)′ = |
| 8 | *y =*sin *x* | (sin *x*)′ = cos *x* | *y =*sin *u* | (sin *u*)′ = cos u *·u′* |
| 9 | *y =*cos *x* | (cos *x*)′ = | *y =*cos *u* | (cos *u*)′ = *·u′* |
| 10 | *y =*tg *x* | (tg *x*)′ = | *y =*tg *u* | (tg *u*)′ = |
| 11 | *y =* ctg *x* | (ctg *x*)′ = | *y =* ctg *u* | (ctg *u*)′ = |
| 12 | *y =*arcsin *x* | (arcsin *x*)′ = | *y =*arcsin *u* | (arcsin *u*)′ = |
| 13 | *y =*arcos *x* | (arcos *x*)′ = | *y =*arcos *u* | (arcos *u*)′= |
| 14 | *y =* arctg *x* | (arctg *x*)′ = | *y =* arctg *u* | (arctg *u*)′ = |
| 15 | *y =* arcctg *x* | (arcctg *x*)′ = | *y =* arcctg *u* | (arcctg*u*)′ = |

*Производной n-го порядка* называется производная от производной -го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка или

Производная третьего порядка или и т. д.

Функция называется **возрастающей** на некотором промежутке, если  бо́льшему значению аргумента из этого промежутка соответствует бо́льшее значение функции. То есть для любых двух значений  из этого промежутка выполняется условие: .

Функция называется **убывающей** на некотором промежутке, если бо́льшему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции. То есть для любых двух значений  из этого промежутка выполняется условие:.

Функцию, возрастающую на промежутке либо убывающую на промежутке, называют монотонной функцией на этом промежутке (или строго монотонной).

Точка называется **точкой максимума функции** если существует такая окрестность точки , что для всех из этой окрестности выполняется равенство *.*

Точка называется **точкой минимума функции** если существует такая окрестность точки что для всех из этой окрестности выполняется равенство .

Точки минимума и точки максимума называются **точками экстремума**. Значения функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции (общее название – экстремум функции).

Точка , в которой производная функции равна нулю, называются стационарной )

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются **критическими точками**

***Теорема I:*** Если на некотором промежутке производная функции положительна в каждой точке некоторого промежутка, то на этом промежутке функция возрастает; если , то на этом промежутке функция убывает.



***Теорема II (достаточные условиях экстремума функции****)****:*** Если при переходе через *стационарную точку* функции  ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. слева от точки и справа от точки , то *– точка максимума функции.* Если при переходе через *стационарную точк*у  функции  ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то *– точка минимума функции;*

*Замечания*: 1. Если при переходе через стационарную точку  функции  ее производная не меняет знак, то эта точка не является точкой экстремума.

2. Если приравнивая производную к нулю стационарных точек не обнаруживается, то исходная функция будет либо всюду возрастающая, либо всюду убывающая (определить по знаку производной)

***Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума:***

1. Найти область определения функции;
2. Вычислить производную функции
3. Найти критические точки функции, т.е. точки в которых не существует;
4. Исследовать знак производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции этими критическими точками;
5. Если в рассматриваемом интервале:

, то на этом интервале функция убывает;

, то на этом интервале функция возрастает.

1. Если - критическая точка и при переходе через нее меняет знак с на , то - точка максимума; если же она меняет знак с на , то - точка минимума.

***Правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба:***

1. Вычислить вторую производную функции
2. Найти у функции критические точки 2-го рода, т.е. точки в которых или не существует;
3. Исследовать знак второй производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции критическими точками 2-го рода;
4. Если в рассматриваемом интервале:

, то на этом интервале график функции выпуклый вверх;

, то на этом интервале график функции выпуклый вниз.

1. Если - критическая точка 2-го рода и при переходе через нее меняет знак, то - точка перегиба.

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при ее удалении по кривой в бесконечность. Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Прямая *у*=*kx*+*b* называется ***наклонной асимптотой*** для графика функции *y*=*f* (*x*) , если . Числа *k* и *b* в уравнении асимптоты находятся из условий:

Если 0 , то прямая называется***горизонтальной асимптотой****.*

Прямая *х =а* называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции если .

Заметим, что при нахождении вертикальных асимптот графика функции  в качестве точки  через которую может проходить вертикальная асимптота, следует рассматривать точку разрыва данной функции.

**Общая схема исследования функции и построение её графика.**

1. Найдите область определения функции.

2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.

3. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат (нули функции).

4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.

5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.

6. Определите наличие асимптот.

7. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

**Содержание практической работы:**

**Пример типового расчета.**

Пример. Найти производную функции

Решение. Используя правила I, III и формулу (1), получим:

Пример. Найти производную второго порядка функции .

Решение. ,поэтому найдём производную первого порядка,   
а затем второго.

**Пример:**

Провести полное исследование и построить график функции

1.Функция не существует, если знаменатель равен нулю, значит

2. Т.к. область определения не симметрична относительно начала координат, то функция не является ни чётной, ни нечётной (т.е. общего вида).

3. График функции пересекает оси координат в единственной точке ,

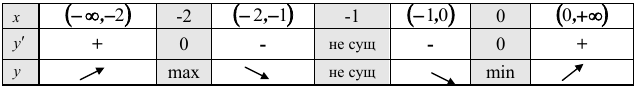
т.к. при

4.Находим интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции,

используя первую производную:

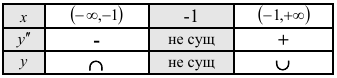
Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:

не существует при , но точка не принадлежит области определения, поэтому и не является критической для данной функции.



5. Находим интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба, используя вторую производную:

y′′ не существует при , но точка не принадлежит области определения. Следовательно, точек перегиба нет. При и график функции выпуклый, а при график функции вогнутый.



6. Определим наличие асимптот:

а) т.е. горизонтальных асимптот нет.

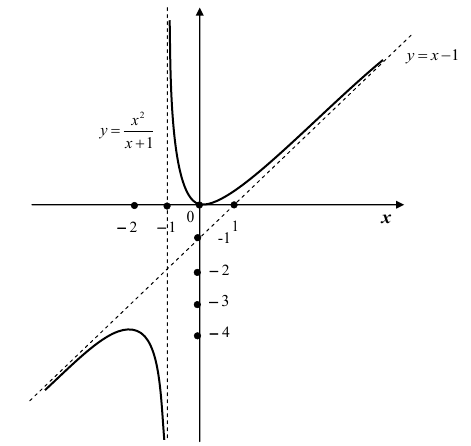
б) Рассмотрим односторонние пределы в точке *:*

Т.к. в точке функция терпит бесконечный разрыв, то график функции имеет вертикальную асимптоту

в) Для отыскания вертикальной асимптоты в виде вычислим следующие пределы:

Таким образом, прямая служит наклонной асимптотой графика.

7. Используя полученные данные, строим график функции:



**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант №1. | Вариант №2. | Вариант №3. |
| На оценку «3»  **Задание 1**. Найти производные заданных функций. | | |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| На оценку «4»  **Задание 2.** Провести полное исследование функции и построить ее график. | | |
|  |  |  |
| На оценку «5»  **Задание 3.**Провести полное исследование функции и построить ее график | | |
|  |  |  |

***Практическое занятие № 8. «Нахождение неопределенных интегралов различными методами»***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить неопределенный интеграл с помощью замены переменных и с помощью формулы интегрирования по частям.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

**Умения:**

1. Вычислять неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования.

2. Вычислять неопределённые интегралы методом замены переменной.

3. Вычислять неопределённые интегралы методом интегрирования по частям.

**Порядок работы на занятии:**

1. Повторить понятие первообразной и неопределенного интеграла.
2. Вспомнить основные свойства неопределенного интеграла.
3. Выполнить задание.
4. Выполненное задание покажите преподавателю.

**Теоретический материал**

Функция называется первообразной для функции , если выполняется условие

**Неопределенным интегралом** функции называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: . Записывают:, где - есть некоторая первообразная функции на этом промежутке, . При этом знак называется знаком интеграла, - подынтегральной функцией, - подынтегральным выражением, - переменная интегрирования, - постоянная интегрирования.

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется интегрированием данной функции.

Интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования. У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределенный интеграл.

***Таблица интегралов***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | 7. | 13. |
| 2. | 8. | 14. |
| 3. | 9. | 15. |
| 4. | 10. | 16. |
| 5. | 11. | 17. |
| 6. | 12. | 18. |

**Свойства неопределенного интеграла:**

1. ;
2. ;
3. ;

**Непосредственное интегрирование**

Это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов. Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

1. деление числителя на знаменатель почленно;
2. применение формул сокращенного умножения;
3. применение тригонометрических тождеств.

Пример. Вычислите.

Решение. Для вычисления интеграла сначала воспользуемся свойствами неопре­деленного интеграла, а затем применим 2 и 4 табличные интегралы:

Пример. Вычислите 

Решение. Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопре­деленного интеграла и применим 1,2 и 3 табличные интегралы



Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

**Интегрирование методом подстановки**

Если интеграл затруднительно привести к табличному с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются методом подстановки (методом замены переменной интегрирования).

Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

**Теорема:** Если требуется найти интеграл , но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены и получается: .

Для интегрирования методом подстановки можно использовать следующую схему:

1. часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной;
2. найти дифференциал от обеих частей замены;
3. все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);
4. найти полученный табличный интеграл;
5. сделать обратную замену.

Пример. Вычислить

Решение. Введем новую переменную ,тогда

Пример. Вычислить

Решение. Введем новую переменную ,тогда

**Интегрирование по частям**

Способ основан на известной формуле производной произведения:

где *u* и – некоторые функции от *х*.

В дифференциальной форме:

Проинтегрировав, получаем:

а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

или

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример.

.

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант №1. | Вариант №2. | Вариант №3. |
| На оценку «3»  **Задание 1**. Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования. | | |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| На оценку «4»  **Задание 2.**Найти неопределенные интегралы методом подстановки. | | |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| На оценку «5»  **Задание 3.** Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям. | | |
|  |  |  |

***Практическое занятие № 9. «Вычисление определенных интегралов. Применение определенного интеграла в практических задачах»***

**Цель работы:**

1. Научиться вычислять определённые интегралы.

2. На конкретных примерах научиться находить площадь криволинейной трапеции.

3. Сформировать навыки решения физических задач с помощью определённых интегралов.

**Знания (актуализация)**:

1. Понятие определённого интеграла.

2. Свойства определённого интеграла.

3. Основные методы вычисления определённых интегралов.

4. Понятие криволинейной трапеции

5. Методы вычисления площади криволинейной трапеции

**Умения:**

1. Вычислять определённые интегралы.

2. Вычислять площадь криволинейной трапеции.

3. Вычислять объём тела вращения с помощью определённого интеграла.

**Порядок работы на занятии:**

1. Повторить понятие определенного интеграла.
2. Вспомнить основные свойства определенного интеграла.
3. Выполнить задание.
4. Выполненное задание покажите преподавателю.

**Теоретический материал**

Приращение любой из первообразных функ­ций при изменении аргумента от до называется **определенным интегралом**, и обозначается:

Таким образом

*а* — нижний предел интеграла,

*b* — верхний предел интеграла.

Для вычисления определенного интеграла

нужно найти соответствующий неопределенный интеграл, в полученное его выражение подставить вместо *х* сначала верхний, а затем нижний пределы определенного интег­рала и из первого результата подстановки вычесть второй.

Пример.

Пример.

**Свойства определенного интеграла**

1. где

2.

3.

**Алгоритм вычисления определенного интеграла методом подстановки:**

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4. Находят новые пределы интегрирования.

5. Производят замену под интегралом.

6. Находят полученный интеграл.

Пример. Вычислить

Решение. Замена: ; *;*

Найдём новые пределы интегрирования. При , ; , .

Получаем:

.

Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена

|  |  |
| --- | --- |
| *y=y(x)*  *a*  *b*  **Рис.1** | * сверху - графиком непрерывной функции * слева – прямой * справа – прямой |

**Утверждение.** Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

**(1)**

**Площадь плоской фигуры.**

**Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.**

Пример 1**.**Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:, и осью

Решение: Данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

|  |  |
| --- | --- |
| **2**  **-1**  X    Y  **Рис. 2** | Ответ: |

Пусть – непрерывная функция при , график которой расположен ниже оси (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

|  |  |
| --- | --- |
| **Рис. 3**  X  Y  **a**  **b** | **(2)** |

Пример 2**.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции и осью .

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси , поэтому применим формулу (2).

|  |  |
| --- | --- |
| **Рис. 4**  Y  X  2  3 | Ответ: кв.ед. |

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций и .

Решение: данная фигура (рис. 5)представляет собой разность криволинейных трапеций.

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: и .

. Можно записать под один интеграл:

|  |  |
| --- | --- |
| Y  **Рис. 5**  X  -2  1  ***y=-x+3*** | Ответ кв.ед. |

Пример 4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций и , и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций , где  и . Получим формулу:

|  |  |
| --- | --- |
| **Рис. 6**  X  0  1  ***y=-x+3***    3 | Ответ: кв.ед. |

**Путь, пройденный точкой***.*

Если точка движется прямолинейно и её скорость есть известная функция времени , то путь, пройденный точкой за промежуток времени , вычисляется по формуле:

(1)

**Пример.** Тело движется прямолинейно со скоростью. Вычислить путь, пройденный телом за первые .

**Решение.** Применяя формулу (1), находим искомый путь:



**Работа силы***.*

Если переменная сила действует в направлении оси , то работа силы на отрезке вычисляется по формуле:

(2)

**Пример.** Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 0,06м, если сила 1 Н растягивает ее на 0,01м?

**Решение.**  Согласно закону Гука сила F, растягивающая или сжимающая пружину на м, равна, где - коэффициент пропорциональности. Из условия следует,, т.е.,и, следовательно . Искомую работу находим по формуле (2):



**Пример.** Сила 196,2 Н растягивает пружину на 18 см. Какую работу она производит?

**Решение.** По закону Гука , откудаН/м).

Значит,. Находим искомую работу по формуле (2):



**Объём тела вращения.**

Объём тела, образованного в результате вращения вокруг оси криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой, осью , отрезками прямых и , вычисляется по формуле:

(4)

Аналогично, объём тела, образованного вращением вокруг оси криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой, осью , отрезками прямых и, вычисляется по формуле:

(5)

**Пример.** Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси площадей, ограниченных линиями: параболой, прямыми ,

**Решение.** Применяя формулу (4), получаем



**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант №1. | Вариант №2. | Вариант №3. |
| **Задание 1**. Найти определенные интегралы методом методом подстановки. | | |
|  |  |  |
|  |  |  |
| **Задание 2.**Вычислить площадь. | | |
| а) | а) | а) |
| б.) | б) | б) |
| **Задание 3.** Найти путь тела, движущегося с заданной скоростью за данный промежуток времени. | | |
|  |  |  |
| **Задание 4.**Вычислить работу, совершаемую при сжатии или растяжении пружины, пропорционально приложенной силе. | | |
|  |  |  |
| **Задание 5.**Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: | | |
|  | | |

**Список используемых источников**

*Основные источники:*

1. Пехлецкий, И.Д. Математика: учебник / И.Д. Пехлецкий. – Москва: Издательский центр «Академия», 2018. – 320 с.

*Дополнительные источники:*

1. Григорьев, В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2018. – 160 с.

*Интернет - ресурсы*

* Электронно-библиотечная система ZNANIUM.COM Режим доступа: http://www.znanium.com/
* Электронно-библиотечная система "ЮРАЙТ" Режим доступа http://www. biblio-online. ru
* Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru/
* Информационные, тренировочные и контрольные материалы. Режим доступа: http:// www. fcior. edu. ru.
* Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. Режимдоступа: http:// www. school-collection. edu. ru.