Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**Учебное пособие**

по учебной дисциплине:

**«Математика»**

для специальности

**23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей**

**Часть II**

Челябинск, 2020

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Учебное пособие составлено в соответствии с утвержденной программой учебной дисциплины «Математика» для специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  комиссией ЕМД  протокол № \_\_\_\_  от «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2020 г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_О.И. Макаренко | УТВЕРЖДАЮ  Заместитель директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2020 г. |

Составитель: Воронина Алена Викторовна, преподаватель ГБПОУ «Южно-Уральский государственный технический колледж»

**АКТ СОГЛАСОВАНИЯ**

**на учебное пособие по учебной дисциплине «Математика»**

**для студентов специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей,**

**разработанное преподавателем ГБПОУ «ЮУрГТК» Ворониной А.В.**

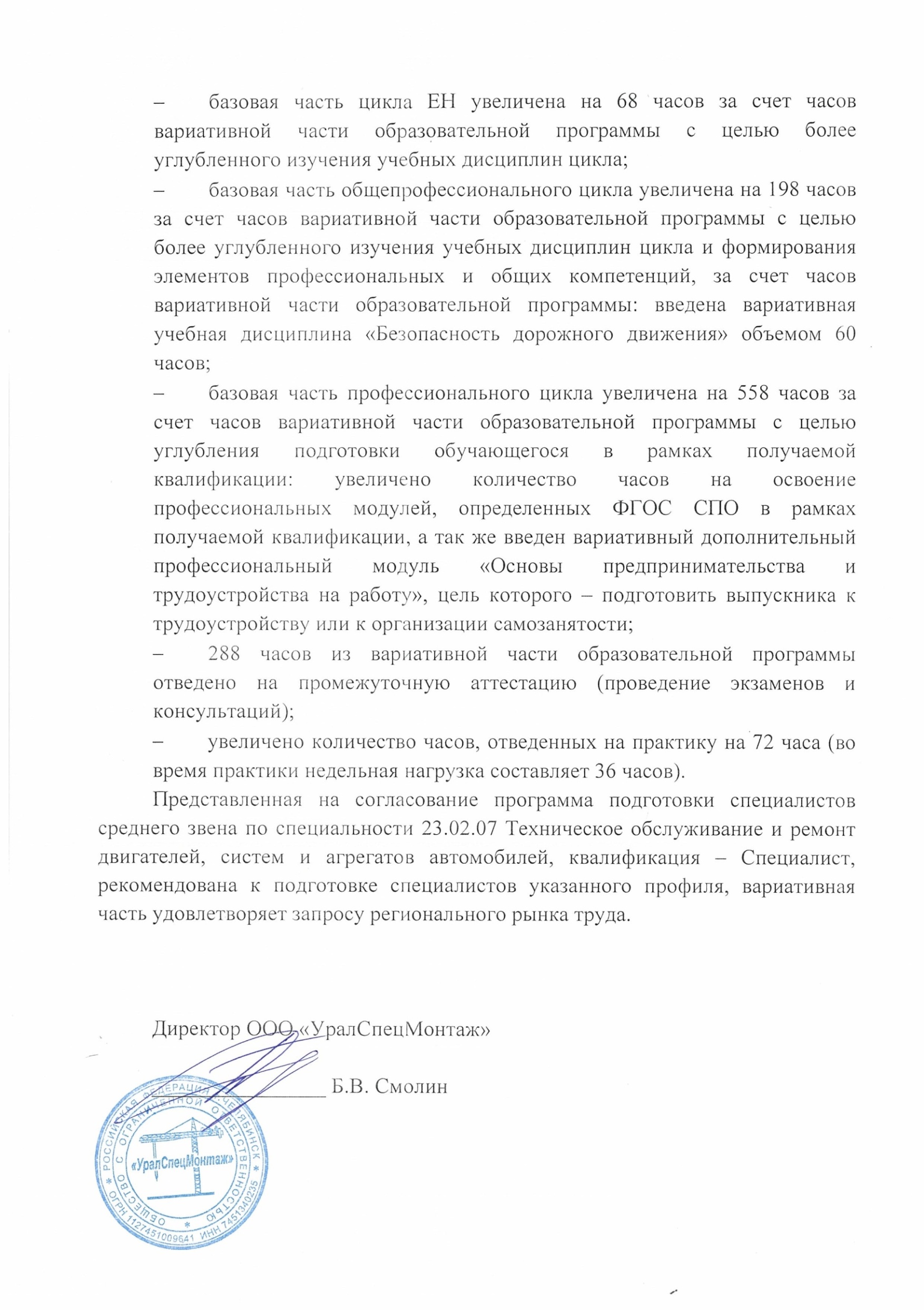
Представленное на согласование учебное пособие разработано преподавателем Южно-Уральского государственного технического колледжа Ворониной А.В. и предназначено для студентов специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей с целью обеспечить успешное освоение учебной дисциплины математического и естественно-научного цикла «Математика».

В учебном пособии подробно представлен теоретический материал, направленный на формирование знаний об основных понятиях и методах математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики.

Учебное пособие также включает типовые задачи и примеры их решения, задания для самостоятельного решения, задания практических работ, направленные на систематизацию и закрепление знаний по учебной дисциплине «Математика» и формирование практических умений применять основные математические методы при решении прикладных задач.

Применение данной учебного пособия в учебном процессе позволит обеспечить качественное преподавание учебной дисциплины «Математика».

Данное издание рекомендовано к использованию в учебном процессе в среднем профессиональном образовательном учреждении, при обучении студентов по специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей.

****

**Пояснительная записка**

Учебное пособие составлено в соответствии с утвержденной программой учебной дисциплины математического и естественно-научного цикла «Математика» и предназначено для студентов 2 курса специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей.

Учебная дисциплина математического и естественно-научного цикла «Математика» изучается в течение третьего семестра и завершается «зачетом».

Данное учебное пособие разработано как для самостоятельного освоения учебного материала при дистанционном обучении, так и в помощь студентам, испытывающим затруднения в усвоении учебного материала, разобранного на аудиторных занятиях и нуждающихся в дополнительной систематизации полученных знаний.

Учебное пособие содержит теоретический (лекционный) материал, изучаемый на аудиторных занятиях во взаимодействии с преподавателем. При изложении теоретического материала используется принцип «достаточной полноты при максимально возможной простоте представления учебного материала». Для систематизации и закрепления теоретического материала в учебное пособие включены контрольные вопросы. Практически весь теоретический материал сопровождается примерами и решением типовых задач, с целью формирования первоначальных умений выполнять типовые расчеты.

При самостоятельном изучении представленного в учебном пособии материала рекомендуется делать сопутствующие рабочие записи, а также формировать глоссарий-справочник, в который следует заносить основные формулы, правила, соотношения и определения используемых математических понятий. Впоследствии такой глоссарий-справочник может быть использован при выполнении заданий практических работ, которые также включены в учебное пособие.

**Содержание**

**Часть II**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | Пояснительная записка | стр. 4 |
| 23. | Тема: «Элементы и множества. Задание множеств» | стр.6 |
| 24. | Тема: «Операции над множествами и их свойства. Отношения и их свойства» | стр.13 |
| 25. | Практическое занятие № 10. Выполнение операций над множествами. | стр.21 |
| 26. | Тема: «Основные понятия теории графов» | стр.24 |
| 27. | Тема: «Понятия события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятности» | стр.41 |
| 28. | Тема: «Теоремы сложения вероятностей» | стр.56 |
| 29. | Тема: «Теоремы умножения вероятностей» | стр.59 |
| 30. | Практическое занятие № 11. Решение практических задач на определение вероятности события. | стр.64 |
| 31. | Тема: «Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины» | стр.70 |
| 32. | Тема: «Закон распределения случайной величины» | стр.74 |
| 33. | Практическое занятие № 12. Решение задач с реальными дискретными случайными величинами. | стр.85 |
| 34. | Тема: «Характеристики случайной величины» | стр.86 |
| 35. | Список используемых источников | стр.95 |

***Тема: «Элементы и множества. Задание множеств»***

**План:**

1. Понятие множества.
2. Способы задания множества.
3. Подмножества.
4. Изображение множеств.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие множества, элементы множества, подмножесва, конечное и бесконечное множество, пустое множество,
* Изображение множеств,
* Способы задания множества.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Понятие множества**

Понятие множества относится к аксиоматическим понятиям математики.

**Множество** – совокупность определённых, различимых между собой объектов, рассматриваемых как единое целое, и обладающая некоторым общим свойством.

Имеется три важных момента, характеризующих понятие множества:

1) объекты, входящие во множество, определённые – т.е. для каждого объекта можно однозначно сказать, принадлежит ли он данному множеству или нет;

2) объекты, входящие во множество, различимы между собой – т.е. во множестве не может быть двух или более одинаковых объектов;

3) все объекты, входящие во множество, мыслятся как единое целое – т.е. во множестве абстрагируются от свойств отдельных объектов, но говорят об общем свойстве множества, как единого целого; такое общее свойство называют характеристическим.

*Например*, можно говорить о множестве всех книг данной библиотеки, множестве всех вершин данного многоугольника, множестве всех натуральных чисел, множестве всех точек данной прямой.

Объекты, входящие в эту совокупность, называются **элементами множества.**

Множества принято обозначать прописными латинскими буквами: а элементы множества – малыми:

*Например:*

– множество букв русского алфавита;

– множество натуральных чисел;

 – множество студентов, сидящих на 1-м ряду.

Если множество А состоит из элементов    , то записывают это так:

Множества, элементами которых являются числа, называются **числовыми множествами.**

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандарты:

множество натуральных чисел;

— множество целых чисел;

— множество рациональных чисел.

—множество действительных чисел.

– множество комплексных чисел.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется **конечным**, в противном случае множество называется **бесконечным**. Множество может содержать и всего лишь один элемент. Количество элементов конечного множества называют **его мощностью.**

Мощность множества А обозначается

Для конечных множеств мощность – это число его элементов.

Пример: 1) .

Для удобства вводится также и множество с числом элементов равным нулю, то есть множество, не имеющее элементов.

Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обозначается .

Множества , рассмотренные выше, – конечные, а множество – бесконечное.

Принадлежность элемента множеству записывается значком .

- знак множества.

Например:

– буква «бэ» принадлежит множеству букв русского алфавита;

– буква «бета» не принадлежит множеству букв русского алфавита;

– число 5 принадлежит множеству натуральных чисел;

– число 5,5 – не принадлежит множеству натуральных чисел;

– Вольдемар не сидит в первом ряду.

Утверждение: «элемент принадлежит множеству » символически записывается так**:**

*-*означает, что элемент не принадлежит множеству .

**2. Способы задания множества**

**Множество считают заданным**, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

Существуют **два способа задания множества.**

1. **Перечисление всех элементов.**

Если множество содержит немного элементов, то его можно задать, перечислив все его элементы. Если множество задано списком, то его элементы записывают в фигурных скобках через точку с запятой. Множество цифр можно записать следующим образом: ; множество простых чисел, меньших ; множество дней недели –  {понедельник; вторник; среда; четверг; пятница; суббота; воскресенье}.

Однако задать множество списком можно только тогда, когда оно содержит конечное число элементов (но и это неудобно, если число элементов множества велико). Существует универсальный способ задания множеств.

**2. Указание характеристического свойства.**

Множество может быть задано с помощью ***Характеристического свойства***, то есть такого свойства, которым обладают все элементы множества, и не обладают объекты, не принадлежащие множеству. Задание множества с помощью характеристического свойства записывают следующим образом:

– характеристическое свойство.

Например: (множество натуральных чисел меньших 10).

При записи правило, задающее множество, отделяется вертикальной чертой или двоеточием.

Например,

1)  - множество чисел, принадлежащих отрезку (подразумевается множество действительных чисел, которые перечислить через запятую уже невозможно);

2) - множество рациональных чисел, то есть, чисел, представимых в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем.

3) Запись означает, что тогда и только тогда, когда *х* - натуральное число и меньше 9.

**3. Подмножества**

Множество  называется **подмножеством** множества , если каждый элемент множества  одновременно является элементом множества . В этом случае множество является **надмножеством**. Иными словами, множество содержится во множестве Значок называют *значком включения*.

Прочитать эту запись можно по-разному:

* ***В*** является подмножеством ***А***,
* ***А*** является надмножеством ***В***,
* ***В*** включается во множество ***А***,
* ***А*** включает в себя множество ***В***.

Например*:*

1. – это множество букв русского алфавита. Обозначим через – множество его гласных букв, которое будет подмножеством множества . Тогда:.
2. Пусть заданы множества  Очевидно, что ***В*** есть подмножество ***А***, т.е. .
3. Множество  натуральных чисел является подмножеством множества  целых чисел, т. е. .
4. . В результате можно сделать заключение:

1. Множество натуральных чисел является подмножеством целых чисел.

2. Множество целых чисел является подмножеством рациональных чисел.

3. Множество рациональных чисел является подмножеством действительных чисел.

4. Множество иррациональных чисел является подмножеством действительных чисел.

Пример. Пусть множество четных чисел, – множество целых чисел. Следовательно, множество В включено во множество А, что записывается так: , но множество А не включено во множество В, что записывается так: . Например, множества и являются подмножествами множества , а числа - его элементы.

Из определения подмножества следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т. е. справедливо утвержде­ние . Говорят, что А – самое широкое подмножество А.

Пустое множество является подмножеством любого множества: Пустое множество является самым узким подмножеством любого множества.

Любое непустое подмножество ***В*** множества ***А***, не совпадающее со множеством ***А***, называется **собственным подмножеством**.

Для множества **А** пустое множество и само множество **А** называют **несобственными подмножествами** множества **А**.

Пример. Дано некоторое множество, состоящее из трёх элементов: . Найти все его под­множества.

*Решение.*

Во-первых, это – пустое множество .

Во-вторых, множества, содержащие по одному элементу:

В-третьих, множества, содержащие по два элемента: .

И, наконец, само множество

*Ответ:* .

Если одновременно и , то говорят, что множества , т.е. состоят из одних и тех же элементов. В этом случае принадлежность элемента множеству *А* необходима и достаточна для его принадлежности множеству *В*. Равенство множеств обозначают так: .

Например: равны множества Если множество X равно множеству Y ,то можно записать . В противном случае . Другой пример. Даны множества: Они равны , так как они состоят из одних и тех же элементов.

Множество не равны , так как элементами второго множества являются множества. Таким образом, данные множества состоят из элементов различной природы и не могут быть равны.

**Булеаном** множества назовем множество всех его подмножеств.

Пример: Рассмотрим множество . Составим все подмножества множества .

Подмножества и являются **несобственными подмножествами** множества *М*, остальные – **собственные подмножества**. Всего мы нашли 16 различных подмножеств множества *М*. Это число равно .

В общем случае, для любого конечного множества, состоящего из элементов, число возможных подмножеств равно**.**

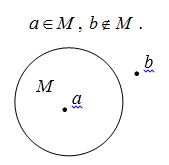
Множество , состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком, называется универсальным.

**Универса́льное мно́жество** (универсум) — в [математике](https://infourok.ru/go.html?href=https%3A%2F%2Fru.wikipedia.org%2Fwiki%2F%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) [множество](https://infourok.ru/go.html?href=https%3A%2F%2Fru.wikipedia.org%2Fwiki%2F%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE), содержащее все объекты и все множества. В тех аксиоматиках, в которых универсальное множество существует, оно единственно.

Универсальное множество обычно обозначается **U** (от [англ.](https://infourok.ru/go.html?href=https%3A%2F%2Fru.wikipedia.org%2Fwiki%2F%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) universe, universal set), реже E.

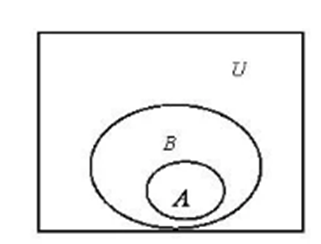
**4.Изображение множеств**

Любое множество можно изобразить графически, нарисовав замкнутый контур и представив себе, что элементы этого множества изображены точками, находящимися внутри этого контура.

 Показывать на рисунке точки не обязательно.

Универсальное множество изображается в виде прямоугольника.

Такой способ изображения множеств носит название **диаграмм Венна** (или **кругов Эйлера**). Чаще называется **диаграммами Эйлера-Венна**.

****

**Примеры типового решение:**

**Пример 1.** Задать три множества A, B, C из строчных букв русского алфавита. Сравнить их между собой.

Решение.

Задаем три множества A, B, C. Множество

. Множество А является подмножеством множеств B и С. Множество С равно множеству B, так как состоит из одних элементов.

**Пример 2.** Заданы три множества X,Y, Z. Множества равны: Сравнить их между собой.

Решение.

Множество X является подмножеством множеств Y и Z, так как все элементы множества X входят как в множество Y, так и в Z. Множество Z равно множеству Y, так как они состоят из одних и тех же элементов.

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1.** По примеру 1 каждый студент придумывает три любых множества A, B, C из строчных букв русского алфавита. Сравнить их между собой. Сделать вывод в каком отношении они находятся (включение, не равенства, равенства).

**Задание 2.** По примеру 2 каждый студент самостоятельно записывает три любых множества X,Y,Z. из цифр. Сравнить их между собой. Сделать вывод в каком отношении они находятся (включение, не равенства, равенства).

**Задание 3.** Среди перечисленных ниже множеств укажите конечные и бесконечные множества: *(подчеркните верные варианты)*

а) множества чисел, кратных 13;

б) множество делителей числа 15;

в) множество деревьев в лесу;

г) множество натуральных чисел;

д) множество рек Ростовской области;

е) множество корней уравнения ;

ж) множество решений неравенства .

**Задание 4.** Назовите и запишите множество зверей из басни

И.А. Крылова «Квартет», используя способ:

а) перечисления элементов;

б) задания характеристического свойства.

Принадлежит ли Соловей этому множеству?

**Задание 5.** Приведите примеры множеств, элементами которых являются :

 а)неодушевленные предметы,

 б)геометрические фигуры,

 в)животные,

 г)растения.

**Задание 6.** Задайте множество с помощью перечисленных элементов:

**Задание 7.** В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им:

**а)**};

**б)**};

**в)**

**г)**

**д)**

**Контрольные вопросы:**

1. Что называется множеством, элементами множества?
2. Какие виды множеств бывают?
3. Способы задания множеств?

***Тема: «Операции над множествами и их свойства. Отношения и их свойства»***

**План:**

1. Отношения между множествами.
2. Операции над множествами.
3. Свойства операций.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятия: пересечение множеств, объединение множеств, вычитание множеств, дополнение множеств.
* Операции над множествами и их свойства.

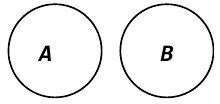
**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Отношения между множествами**

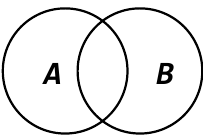
Если множества ***А*** и ***В*** не имеют общих элементов, то говорят, что эти множества **находятся в отношении непересечения**.

Записывают это так:

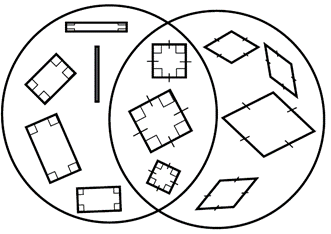
Например, -множество треугольников, -множество трапеций. Эти множества не имеют общих элементов, то есть не существует фигуры, которая была бы одновременно и треугольником и трапецией. Поэтому множества **А** и **В** находятся в отношении непересечения.

Например, , общих элементов у этих множеств нет, поэтому множества не пересекаются.

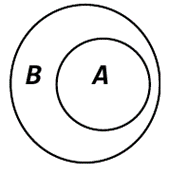
Если множества ***А*** и ***В*** имеют общие элементы, то говорят, что эти множества **находятся в отношении пересечения**.

Записывают это так:

Множество **А** и **Внаходятся в общем положении пересечения**, если существует элемент (хотя бы один), принадлежащий исключительно множеству А, элемент, принадлежащий исключительно множеству В, а также элемент, принадлежащий обоим множествам.

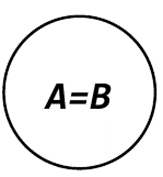
Например, ***А***-множество прямоугольников, ***В***-множество ромбов. Множества ***А*** и ***В*** находятся в общем положении пересечения, так как существует фигура, которая является одновременно и ромбом, и прямоугольником – это квадрат, а так же есть прямоугольники, которые не являются ромбами, и есть ромбы, которые не являются прямоугольниками.

Например, множества пересекаются, т. к. у них есть общие элементы



Два множества **находятся в отношении включения**, если все элементы одного множества являются элементами другого. Например, если все элементы множества ***А*** являются элементами множества ***В***, то ***А*** включается в ***В***, а ***В*** включает в себя множество ***А***.

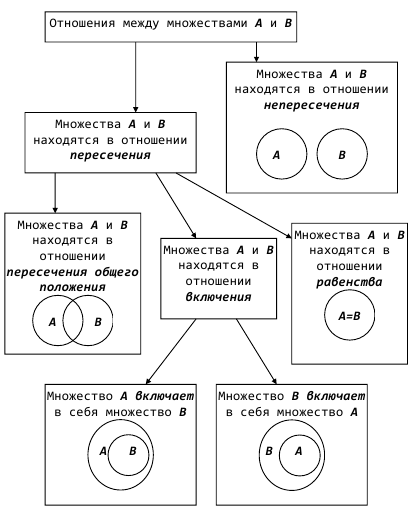
Например, .так как все элементы множества *А* являются одновременно и элементами множества *В*.



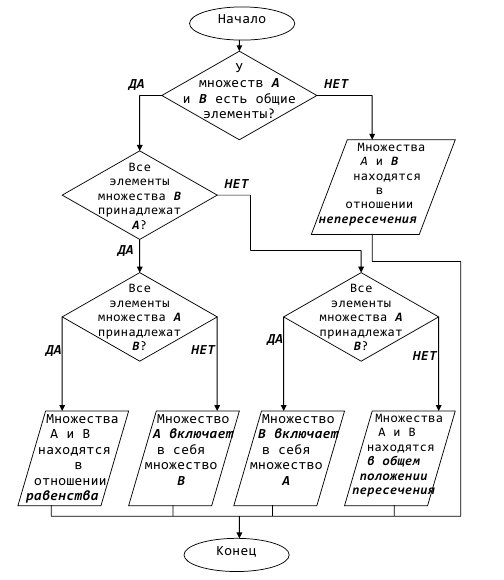
Два множества ***А*** и ***В*находятся в отношении равенства**, если каждый элемент ***А*** будет также являться элементом ***В***, и каждый элемент множества ***В*** будет также являться элементом ***А***, то есть

Например, . Множества А и В равны, так как состоят из одних и тех же элементов:

**Опорная схема**



Алгоритм определения вида отношения между двумя множествами *А* и *В*

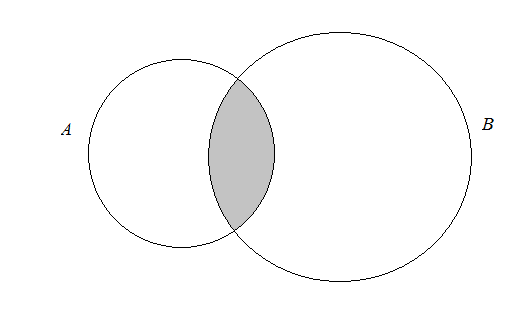


**2. Операции над множествами**

Над множествами, как и над многими другими математическими объектами, можно совершать различные операции. В результате операции из исходных множеств получаются новые. Операции бывают **бинарными** (которые выполняются над двумя множествами) **и унарные** (которые выполняются над одним множеством. К бинарным операциям относятся : пересечение, объединение, вычитание, симметрическая разность, декартово или прямое произведение и другие. К унарным операциям можно отнести: нахождение мощности множества, разбиение множества и другие. Рассмотрим основные из них.

1. ***Пересечением*** множеств *А* и *В* называется множество , состоящее из элементов, которые принадлежат одновременно как множеству *А* так и множеству *В.*

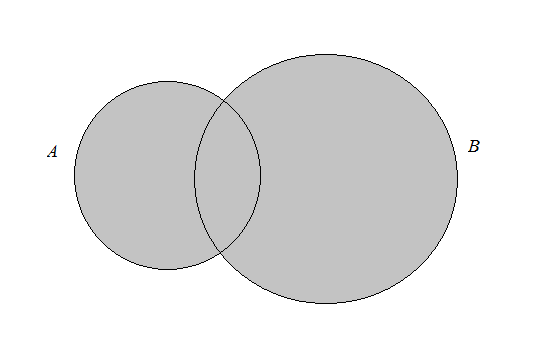
Пример: Если , то.

При помощи диаграмм Эйлера-Венна пересечение множеств изображается следующим образом:

1. ***Объединением*** множеств *А* и *В* называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат или множеству *А* или множеству *В.*

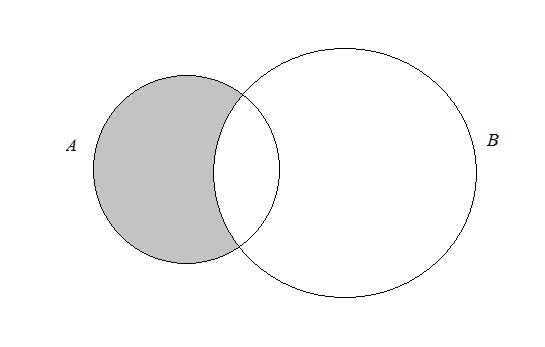
*Пример*: Если,то.

При помощи диаграмм Эйлера-Венна объединение множеств изображается следующим образом:



1. ***Разностью*** множеств *А* и *В* называется множество , состоящее из элементов множества А, которые не принадлежат множеству *В.*

*Пример*: Если ,то.

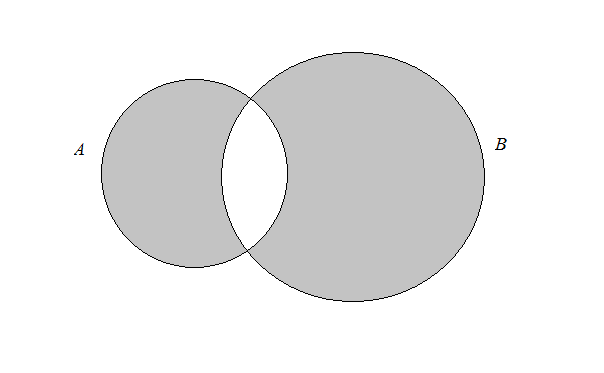
При помощи диаграмм Эйлера-Венна разность множеств изображается следующим образом:

По диаграмме видно, что можно заменить на.

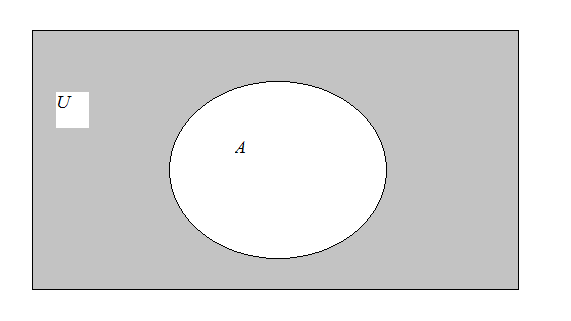
1. ***Симметрической разностью*** *А* и *В* называется множество, состоящее из элементов множеств *А* или *В*, но не принадлежащих этим множествам одновременно*.*

*Пример:* Если,то.

При помощи диаграмм Эйлера-Венна симметрическая разность множеств изображается следующим образом:



1. ***Дополнением множества А*** до множества *U* называется множество , состоящее из элементов множества *U*, которые не принадлежат множеству А.

При помощи диаграмм Эйлера-Венна дополнение множества изображается следующим образом:

**3. Свойства операций.**

Операции над множествами обладают рядом свойств, похожих на свойства операций сложения и умножения чисел.

|  |  |
| --- | --- |
| **Объединение (сложение)** | **Пересечение (умножение)** |
| *1. Коммутативность (переместительное свойство)* | |
| Коммутативность объединения | Коммутативность пересечения |
| *2. Ассоциативность (сочетательное свойство)* | |
| Ассоциативность объединения | Ассоциативность пересечения |
| 1. *Дистрибутивность пересечения относительно объединения*   *(распределительный закон)* | |
|  | |
| 1. *Дистрибутивность объединения относительно пересечения* | |
|  | |
| *5. Закон поглощения* | |
|  |  |
| *6. закон де Моргана* | |
|  |  |
| *7. закон склеивания* | |
|  |  |
| *8. закон Порецкого* | |
|  |  |
| Закон идемпотентности объединения | Закон идемпотентности пересечения |
| Законы действия с пустым и универсальным множествами  , , | Законы действия с пустым и универсальным множествами  , |
|  |  |

**Приоритет выполнения операции**

Сначала выполняются операции дополнения и пересечения, а затем объединения и разности, которые имеют одинаковый приоритет и выполняются в порядке записи. Симметрическая разность рассматривается как комбинация операций объединения, вычитания и пересечения. Последовательность выполнения операций может быть изменена скобками.

**Примеры типового решения:**

Пример. Дано: ,

Найти:

Решение.

Пример. Пусть А – множество различных букв в слове «математика», а В – множество различных букв в слове «стереометрия». Найти пересечение и объединение множеств А и В.

Решение*.*

Пример. Универсальное множество состоит из 33 строчных букв русского алфавита Заданы множества *A, B, C* . Найти множества *X* и *Y* и вычислить их мощность (количество элементов в множествах).

Пусть даны множества:

Требуется найти множества ; ).

Решение.

; };

Мощность множества *X* равна 4. Мощность множества *Y* равна 2.

Пример. Заданы множества .Какое из множеств является подмножеством? Найти .

Решение.

**Пример\*\*\*.** Дано три множества

Найти:

Решение.

1)

2) .

3) }.

4)

5) .

6)

7)

8) .

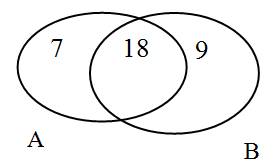
9)

10) .

11)

.

Пример.В классе английский язык изучают 25 человек, а немецкий – 27 человек, причем 18 человек изучают одновременно английский и немецкий языки. Сколько человек в классе: а) изучают иностранные языки? б) изучают только английский язык? в) изучают только немецкий язык?

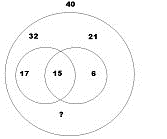
Решение.

А - множество школьников, изучающих английский язык, В – множество школьников, изучающих немецкий язык. Изобразим эту ситуацию с помощью диаграммы. Два языка изучают 18 школьников, поставим это число в пересечение множеств А и В. Английский язык изучают 25 человек, но среди них 18 человек изучают и немецкий язык, значит, только английский язык изучают 7 человек, укажем это число на диаграмме. Аналогично, только немецкий язык изучают 27 – 18 = 9 человек. Поместим и это число на диаграмму. По диаграмме получаем: а) 7 человек, б) 9 человек, в) 7 + 18 + 9 = 34 человека.

Пример. Из 40 учащихся 32 любят молоко, 21 – соки, а 15 – молоко и соки. Сколько учащихся не любят молоко и соки?

Решение:

Построим диаграмму Венна:

Количество учащихся, которые любят только молоко:32-15=17 человек, количество учащихся, которые любят только соки: 21-15=6 человек. Тогда, количество учащихся, которые не любят молоко и соки будет:

40-17-15-6=2 человека.

***Ответ***: 2 человека.

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1**. В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им.

а) {сумма; разность; множитель; частное};

б) {4; 16; 22; 27; 30; 34};

в) {1; 15; 16; 25; 64; 121};

г) {синий; красный; круглый; бежевый; зеленый};

д) {4; 6; 12; 81; 441; 1113};

е) {Обь; Иртыш; Волга; Байкал; Ангара; Амур};

ж) {шар; пирамида; параллелограмм; цилиндр; конус}.

**Задание 2.** На множестве *U* всех букв русского алфавита заданы множества:

, ,.

Найдите следующие множества, укажите их мощность и изобразите их диаграммами Эйлера-Венна:

а), б), в),

г) , д) , е).

**Задание 3.** Пусть,, . Найти:

а) ; б) ;

в); г) ;

д) .

**Контрольные вопросы:**

1. Что называется объединением множеств?
2. Что называется разностью множеств?
3. Что называется симметрической разностью множеств?
4. Что называется дополнением?
5. Что такое пустое множество?
6. Что называется дополнением множества?
7. Что такое диаграмма Эйлера-Венна?
8. Мощность множества.
9. Свойства операций над множествами.

***Практическое занятие № 10. «Выполнение операций над множествами»***

**Цель работы:**

Систематизация умений выполнять операции над множествами

**Знания**:

1. Понятие множества и операций над множествами;

**Умения:**

1. Построение диаграмм Венна.

**Порядок работы на занятии:**

1. Повторить основные операции над множествами.
2. Вспомнить основные свойства операции над множествами.
3. Выполнить задание.
4. Выполненное задание покажите преподавателю.

**Задания для практической работы:**

**Задание 1.** *Дано:* Универсальное множество состоит из 10 цифр

Заданы множества A, B, C , D(табл.).

*Найти:*

1 Множества X и Y.

2 Вычислить мощность (количество элементов во множествах) множеств X и Y.

*Алгоритм выполнения* ***задания 1****.*

1. Переписать задание, которое является для всех одинаковым. Отличаются множества A, B, C, D, X, Y.
2. В таблице выбрать свой вариант.
3. Вставить в свой вариант задания множества A, B, C, D, X, Y из таблицы .

Выполненное задание 1 должно содержать три раздела:

1. Дано.
2. Найти.

Первые два раздела заданы выше.

1. Решение. Решение и оформление выполнять по **Пример\*\*\*.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант №1. | Вариант №2. | Вариант №3. |
|  |  | , |
| Вариант №4. | Вариант №5. | Вариант №6. |
| , | ,  ,  , |  |
| Вариант №7. | Вариант №8. | Вариант №9. |
| , | , | ,  , |

**Задание 2*.*** Решите задачу используя круги Эйлера:

1. В третьем классе дети коллекционируют марки и монеты. Марки собирают 8 человек, монеты – 5 человек. Всего коллекционеров – 11. Сколько человек коллекционируют только марки?
2. Каждый учащийся в классе изучает английский или французский язык. Английский язык изучает 25 учащихся, французский-27 учащихся, а два языка-18 учащихся. Сколько учащихся в классе?
3. На фирме работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 немецкий язык, а 23-оба языка. Сколько человек в фирме не знают ни английского, ни немецкого языков?
4. В группе английский язык изучают 15 студентов, немецкий – 10 студентов, а французский – 5, причем 3 студента изучают одновременно английский и немецкий языки, 2 студента изучают одновременно английский и французский языки, 1 студент изучает одновременно французский и немецкий языки. Сколько всего человек в классе изучают эти иностранные языки? Сколько человек изучают только английский язык? немецкий язык? французский язык?
5. Среди 100 студентов института иностранными языками занимались: немецким – 30 человек, французским – 42 человека, испанским – 28, испанским и немецким – 8 человек, немецким и французским – 5 человек, испанским и французским – 10; три студента изучали все три языка. Сколько студентов изучали французский язык? Сколько студентов не изучали ни одного из иностранных языков?
6. В ящике лежат 120 деталей, из них на автомате №1 обработано 82 штуки, на автомате №2 – 23, а на автомате №3 – 42 штуки. 18 деталей было обработано на автоматах №1 и №2, 17 деталей на автоматах №1 и №3 и 15 – на автоматах №2 и №3. 10 деталей прошли обработку на всех трех автоматах. Сколько деталей не обработано ни на одном из автоматов?
7. На одну специальность в одном из СУЗов поступало 120 человек. Абитуриенты сдавали три экзамена: по математике, по информатике и русскому языку. Математику сдали 60 человек, информатику – 40. 30 абитуриентов сдали математику и информатику, 30 - математику и русский язык, 25 - информатику и русский язык.20 человек сдали все три экзамена, а 50 человек - провалили. Сколько абитуриентов сдали русский язык?

***Тема: «Основные понятия теории графов»***

**План:**

1. Понятие графа. Элементы графа.
2. Типы графов.
3. Степень вершины. Однородные графы.
4. Изоморфные графы.
5. Плоские и неплоские графы.
6. Части графа.
7. Маршруты, цепи и циклы.
8. Связность и разделимость графов.
9. Эйлеровы графы.
10. Способы задания графов.
11. Понятие ориентированного графа.
12. Степени вершин орграфа.
13. Ориентированные маршруты.
14. Связаность орграфов.
15. Понятие дерева. Свойства свободных деревьев.
16. Дерево с корнем, ветви дерева.
17. Типы вершин и центра деревьев.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие графа, вершины, ребра, дуги, ориентированные и неориентированные графы, простой граф, петли,кратные ребра, виды графов, подграфы и дополнения,
* Теорема Эйлера,
* Способы задания графов.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

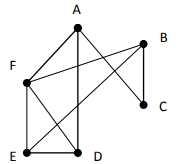
**1.Понятие графа. Элементы графа**

**Графом** называется совокупность 2-х множеств: (линий, соединяющих какие-либо две точки). Элементы множества V называются вершинами графа, а элементы множества

Геометрическая интерпретация графа называется **диаграммой**.

Обычно граф представляют **диаграммой и называют ее графом.**

Пример. Построим граф игр, сыгранных командами, если в соревнованиях участвуют 6 команд , причем некоторые команды уже сыграли друг с другом:



Из рисунка видно, какие команды еще не играли друг с другом.

*(!!) Точки пересечения некоторых ребер графа могут не являться его вершинами. Поэтому вершины графа должны отличаться отчетливо.*

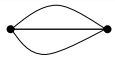
Две вершины, которые соединяет ребро графа, называются **граничными вершинами** этого ребра и являются **смежными**.

При этом говорят, что вершины инцидентны ребру.

Ребро, граничные вершины которого совпадают, называется **петлей.**



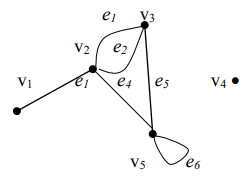
Ребра с одинаковыми граничными вершинами называются **кратными**.



Их можно изобразить так:

Вершины, которые не имеют инцидентных ребер, называются изолированными вершинами

Пример. В графе:



– петля, – кратные ребра, – изолированная вершина,

–

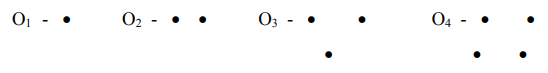
**2.Типы графов**

Если множества конечны, то граф называется **конечным**. Конечный граф, содержащий вершин иребер, называется **– графом.**

Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется **пустым** или **нуль-графом.**

Обозначение: где – число вершин

Пример.

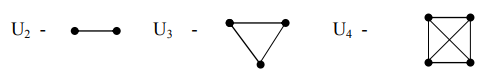


Граф без петель и кратных ребер называется **простым.**

Простой граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется **полным.**

Обозначение: – число вершин

Пример.



Если множество вершин простого графа допускает такое разбиение на два непересекающиеся подмножества , что не существует ребер, соединяющих вершины одного и того же подмножества, то он называется **двудольным** или **биграфом.**

Пример.



Граф без петель, но с кратными ребрами называется **мультиграфом.**

Граф, содержащий хотя бы одну петлю, называется **псевдографом**

*(!!) В псевдографе могут быть кратные ребра.*

**3.Степень вершины. Однородные графы**

Число ребер, инцидентных вершине, называется **степенью вершины**.

Обозначение

*(!!) При подсчете степени вершины петля учитывается дважды.*

Так, для графа игр:

Вершины, степени которых являются четными числами, называются **четными вершинами**. Вершины с нечетной степенью называются **нечетными.**

Вершина, степень которой равна 1, называется **концевой вершиной**.

*(!!) Очевидно, что:*

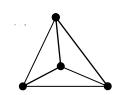
*1) степень изолированной вершины равна 0;*

*2) сумма степеней всех его вершин равна удвоенному числу ребер, т.е. является четным числом;*

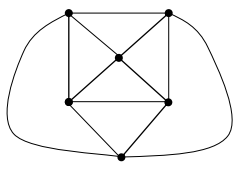
*3) число нечетных вершин любого графа четно.*

Граф, степени вершин которого одинаковы и равны , называется **однородным степени**

Пример.



- однородный степени 3 (полный)

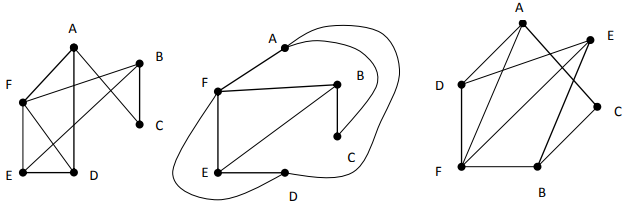


- однородный степени 4 (неполный)

*(!!) Полный граф с вершинами – всегда однородный степени а пустой граф – однородный степени 0.*

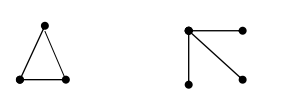
**4.Изоморфные графы**

Один и тот же граф можно изобразить по-разному, т.к. вершины можно располагать на плоскости произвольно и ребра рисовать либо прямыми линиями, либо кривыми. Так, например, три графа, изображенные на рисунках,



в некотором смысле, один и тот же граф, т.к. они содержат одну и ту же информацию.

Два графа называются **изоморфными**, если они имеют одно и то же число вершин, и для любых 2-х вершин первого графа, соединенных ребром, соответствующие им вершины второго графа тоже соединены ребром и обратно. Нередко приходится решать вопрос о том, являются ли два данных графа изоморфными. Иногда сразу ясно, что это не так. Например, графы



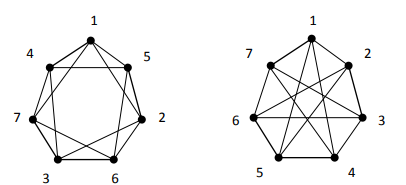
не могут быть изоморфными, т.к. они имеют разное число вершин.

Не могут быть изоморфными и графы



т.к. у них неодинаковое число ребер.

Однако, если сразу не видно, как доказать, что два графа не изоморфны, то вопрос об их изоморфности может оказаться довольно трудным. Например, рассмотрим два изоморфных графа:



Их изоморфность становится очевидной только после соответствующего обозначения их вершин.

**5.Плоские и неплоские графы**

Сравним два изоморфных графа, изображенных на рисунках:



На первом из них ребра пересекаются в точке, не являющейся вершиной графа, на втором – все точки пересечения ребер графа служат его вершинами.

Граф называется **плоским**, если его ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин данного графа.

Граф называется **планарным**, если существует изоморфный ему плоский граф, т.е. если его можно изобразить на плоскости таким образом, чтобы его ребра пересекались только в вершинах.

Так, граф, изображенный на первом рисунке, является планарным, т.к. существует изоморфный ему граф, не имеющий лишних точек пересечения.

Примерами плоских графов являются карты дорог, планы городов, где улицы служат ребрами, а площади и уличные перекрестки – вершинами. Еще одним примером применения плоских графов служит построение схем электрических цепей.

Наиболее важным результатом в теории плоских графов является следующая теорема Эйлера: **Теорема о количестве граней связанного планарного графа.**

Пусть G– связный планарный граф с p вершинами и q ребрами. Число граней в любом его правильном изображении на плоскости равно - формула Эйлера (\*).

**6.Части графа. Операции с частями графа**

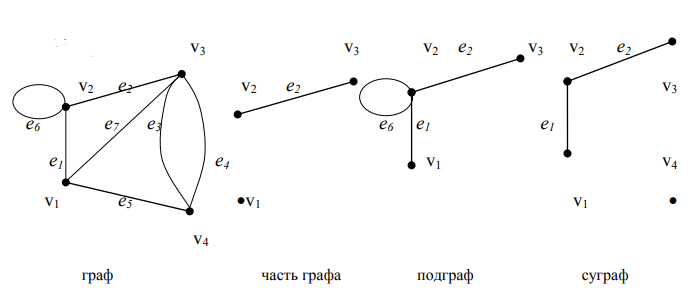
Граф называется частью графа если

Часть графа, которая не содержит изолированные вершины, называется **подграфом.**

**Подграфом графа** называется граф, являющийся подмоделью исходного графа. Иначе говоря, подграф содержит некоторые вершины исходного графа и некоторые рёбра (только те, оба конца которых входят в подграф).

Часть графа, которая, наряду с некоторым подмножеством ребер графа, содержит и все вершины графа, называется **суграфом.**

Пример.



Пусть даны две части графа G: G1 и G2

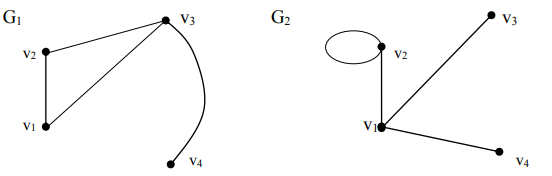
1. **Объединение графов** – это граф множества вершин и ребер которого определяются так:

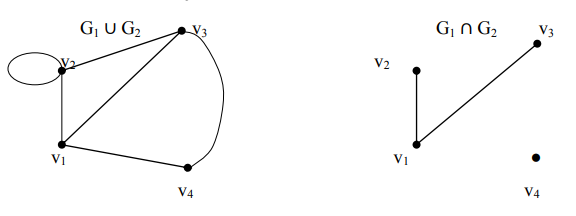
2. **Пересечение графов** – это граф , множества вершин и ребер которого определяются так:

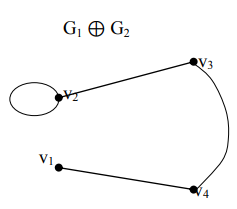
Еслии , то графы называются **непересекающимися.**

**3. Сложение по модулю 2 –** это граф G = G1⊕ G2, множество вершин которого V = V1∪ V2, а множество ребер E = (E1∪ E2) \ (E1 ∩ E2).

Пример. Найдем G1∪ G2, G1 ∩ G2 и G1⊕ G2, если - части графа

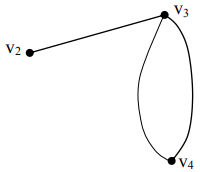






4. **Дополнение графа**

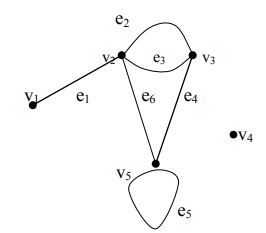
Пусть - часть графа , тогда совокупность всех ребер графа , не принадлежащих его части , вместе с инцидентными вершинами образует дополнение частидо графа Так, дополнением для G2 будет граф:



**7.Маршруты, цепи и циклы**

**Маршрутом длины**  называется последовательность ребер графа (не обязательно различных) таких, что два соседних ребра имеют общую вершину.

Пример.



1) Маршрут имеет длину , проходит через вершины и соединяет вершины

2) Маршрут имеет длину , проходит через вершины и соединяет вершины

Маршрут, все ребра которого различны, называется **цепью**, а маршрут, для которого различны все вершины, называется **простой цепью**.

Пример.

– цепь

– простая цепь

Маршрут, который приводит в ту же вершину, из которой начался, называется **замкнутым.**

Замкнутая цепь называется **циклом**, а простая замкнутая цепь – **простым циклом.**

Пример.

– цикл

– простой цикл

Граф называется **циклическим**, если он содержит хотя бы один цикл, в противном случае он называется **ациклическим.**

*(!!) Очевидно, что мультиграфы и псевдографы являются циклическими.*

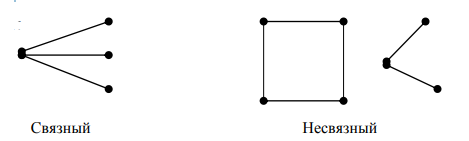
**8.Связность и разделимость графов**

Две вершины графа называется **связанными**, если существует маршрут, соединяющий эти вершины. Граф, любая пара вершин которого связана, называется **связным графом**.

Очевидно, в связном графе между любыми двумя вершинами существует простая цепь, т.к. из связывающего их маршрута всегда можно удалить циклический участок, проходящий через некоторую вершину более одного раза.

Если граф несвязный, то множество его вершин можно единственным образом разделить на непересекающиеся подмножества, каждое из которых содержит все связанные между собой вершины и вместе с ребрами образует связный подграф. Такие подграфы называются **компонентами несвязного графа**.

Пример.

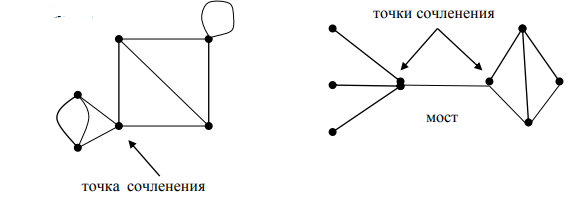


Связный граф можно разделить на несвязные подграфы, если удалить из него некоторые вершины и ребра. При удалении вершин исключаются и все ребра, для которых эта вершина является граничной, при удалении же ребер вершины сохраняются.

Вершина, удаление которой превращает связный граф в несвязный, называется **точкой сочленения**. Ребро с такими свойствами называется **мостом**.

*(!!) При наличии моста в графе имеются, по крайней мере, одна точка сочленения.*

Пример.



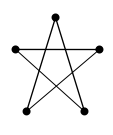
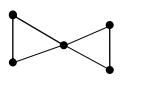
Связный граф называется **разделимым**, если он имеет хотя бы одну точку сочленения, в противном случае граф называется **неразделимым.**

**9.Эйлеровы графы**

Цикл, который содержит все ребра графа, называется **эйлеровым циклом**, а граф, в котором имеется такой цикл, называется **эйлеровым графом**.

Эйлеров цикл можно считать следом пера, вычерчивающего этот граф, не отрываясь от бумаги. Таким образом, эйлеровы графы – это такие графы, которые можно изобразить одним росчерком пера, причем процесс такого изображения начинается и заканчивается в одной и той же точке.

Пример.



**10.Способы задания графов**

**1.Рисунок.**

Cамый наглядный способ задания графа. Вершины графа на рисунке обозначаются точками, а рёбра, соединяющие некоторые вершины — линиями.

**2.Матрица смежности.**

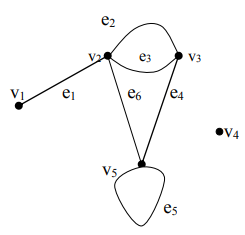
Отношение смежности на множестве вершин можно определить, представив каждое ребро как пару смежных вершин, т.е.

Очевидно, что петля при вершине представляется парой .

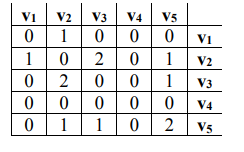
Множество вершин вместе с определенным на нем отношением смежности полностью определяет граф. При этом граф можно представить **матрицей смежности,** строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а ее - элемент равен числу кратных ребер, связывающих вершины .

Пример.

Для графа:



матрица смежности имеет вид:



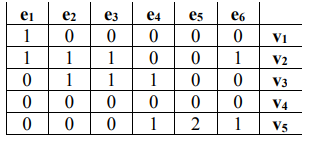
*(!!)1 Матрица смежности симметрична относительно главной диагонали. В столбцах и строках, соответствующих изолированной вершине, все элементы равны нулю. Петле соответствует «2» на главной диагонали.*

*(!!)2 Элементы матрицы простого графа равны нулю или единице, причем все элементы главной диагонали нулевые.*

**3. Матрица инцидентности.**

Рассматривая инцидентность вершин и ребер – графа, можно представить его матрицей инцидентности размера строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. Элементы этой матрицы определяются по правилу: - элемент равен 1, если вершина vi инцидентна ребру еj, и равен 0, если vi и еj не инцидентны.

Так, для изображенного в предыдущем пункте графа матрица инцидентности имеет вид:

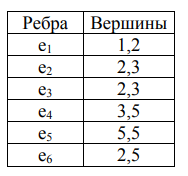


*(!!) Каждый столбец матрицы инцидентности содержит два единичных элемента. Если в вершине vi имеется петля, то в соответствующей клетке ставится цифра 2. Нулевая строка соответствует изолированной вершине.*

**4.Список ребер.**

Это еще один способ задания графа. Каждая строка этого списка соответствует ребру: в ней записаны номера вершин, инцидентных ему.

Для рассмотренного выше графа список ребер можно записать следующим образом:

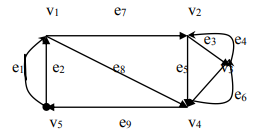


**11.Понятие ориентированного графа**

Если направление рёбер не указано, то граф называется неориентированным.

Направленные ребра называется **дугами**, а граф, содержащий их, - **ориентированным графом**. Первая по порядку вершина дуги называется ее **началом**, вторая – **концом**.

Пример.



Две кратные дуги называются **строго параллельными**, если они одинаково направлены, и **нестрого параллельными**, если противоположно направлены.

Пример.

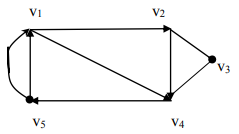
– строго параллельные дуги

– пары нестрого параллельных дуг

*(!!) Нестрого параллельные дуги, отображающие ориентацию связи в обоих направлениях, по существу, равноценны неориентированной связи и могут быть заменены ребром.*

Граф, который содержит ребра и дуги, называется **смешанным**.

Так, изображенный выше ориентированный граф можно изобразить в виде смешанного:



*(!!) Всякий неориентированный граф можно превратить в ориентированный, заменив в нем каждое ребро на пару нестрого параллельных дуг.*

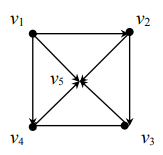
Если изменить направления всех дуг орграфа на противоположные, то получится орграф, **обратный исходному.**

Примером неориентированного графа является карта дорог. ориентированного графа – река с притоками. Примером смешанного графа – карта дорог, где часть дорог с односторонним движением.

**12.Степени вершин орграфа**

В орграфе различают положительные ρ+(𝑣𝑖)и отрицательные ρ−(𝑣𝑖 ) степени вершин, которые равны соответственно числу исходящих из vi и входящих в vi дуг.

Пример.



ρ+(𝑣1) = 3ρ+(𝑣4) = 1

ρ−(𝑣1) = 0ρ−(𝑣4) = 2

*(!!) Очевидно, суммы положительных и отрицательных степеней всех вершин орграфа равны между собой и равны числу всех дуг.*

Вершина, степень которой равна нулю, называется .

Так, v1 – исток, v5–сток

*(!!) Концевая вершина орграфа может быть либо стоком, либо истоком*.

**13.Ориентированные маршруты**

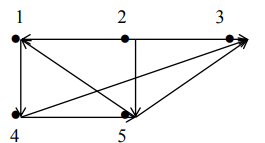
Маршруты на орграфе определяются аналогично, с той лишь разницей, что начальная вершина каждой последующей дуги маршрута должна совпадать с конечной вершиной предыдущей дуги. Иначе говоря, движение по маршруту допускается только в указанных направлениях (по направлению стрелок).

Маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется **путем**, а не содержащий повторяющихся вершин, - **простым путем.**

Замкнутый путь называется **контуром**, а простой замкнутый путь – **простым контуром.**

Орграф, содержащий хотя бы один контур, называется **контурным.**

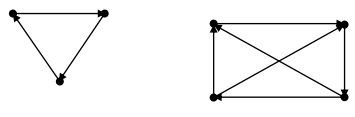
Пример. Дан орграф. Сколько в нем маршрутов длины 3? (8)



**14.Связность орграфов**

Связность орграфов определяется так же, как и для неориентированных (без учета направлений дуг). Специфичным для орграфа является понятие сильной связности.

Орграф называется **сильно связным**, если для любой пары вершин существует путь из одной вершины в другую и обратно.



**15.Понятие дерева. Свойства свободных деревьев**

Связный ациклический граф называется **деревом.**

*(!!) Очевидно, что деревья не имеют петель и кратных ребер, т.е. являются простыми графами.*

Среди различных деревьев выделяют 2 важных частных случая:

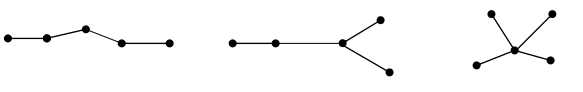
1) **Последовательное дерев**о, представляющее собой простую цепь.

2) **Звездное дерево**, в котором одна из вершин смежна со всеми остальными вершинами.

Пример. а) Различные свободные деревья с 4-мя вершинами:



б) Различные свободные деревья с 5-ю вершинами:

Очевидно:

1) Для каждой пары вершин дерева существует единственная соединяющая их простая цепь.

2) Дерево на множестве вершин всегда содержит ребер.

3) Любое ребро дерева является мостом.

4) В любом дереве имеются, по крайней мере, 2 концевые вершины.

5) При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из которых представляет собой также дерево или изолированную вершину.

Несвязный граф, компонентами которого являются деревья, называется **лесом**.

*(!!) Лес из к деревьев, содержащий р вершин, имеет в точности р – к ребер.*

**Остовным деревом** (остовом, каркасом или скелетом) неориентированного графа называется его подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом.

Ребра графа, не входящие в остов, называются хордами графа относительно остова.

**16.Дерево с корнем, ветви дерева**

Если в дереве отметить некоторую вершину 𝑣0, то ее называют **корнем дерева**, а само дерево – **деревом с корнем.**

Обозначая вершины, смежные с вершиной *v0* соответственно *v1, v2*,…, с *v1 – v11, v12,…*,а с *v2 – v21, v22*,…и т.д., можно построить дерево с корнем.

*(!!) Очевидно, что каждая вершина дерева может служить его корнем.*

Если *v* – вершина дерева с корнем *v0*, тогда множество всех вершин, связанных с корнем цепями, проходящими через вершину *v*, порождает подграф, который называется **ветвью вершины***v* в дереве с корнем *v0*. Очевидно, что эта ветвь связна и сама является деревом с корнем в этой вершине *v*.

**17.Типы вершин и центры деревьев**

Пусть дано конечное дерево . Все его концевые вершины называются **вершинами типа 1**. Если удалить из графа все такие вершины вместе с инцидентными им ребрами, то получится подграф , который будет деревом. Концевые вершины дерева называются **вершинами типа 2** в дереве Аналогично определяются вершины типов 3, 4, и т.д.

Ясно, что в конечном дереве имеются вершины лишь конечного числа типов.

Вершины максимального типа называются **центрами дерева.**

*(!!) Дерево имеет либо 1, либо 2 центра.*

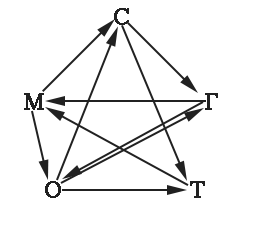
Каждая цепь, соединяющая центр дерева с его концевой вершиной, называется **радиальной**, а цепь, соединяющая две концевые вершины дерева и проходящая через его центр или оба центра (если их два), - **диаметральной цепью**.

*(!!) Если в дереве , то длина диаметральной цепи равна , где к – максимальный тип вершин дерева.*

Типовые задания:

***Задача1.*** Пять девочек, Оля, Маша, Света, Галя и Тома, подружились в лагере и после окончания отдыха договорились послать друг другу открытки. Но Оля послала три открытки, Маша, Света и Галя – по две, Тому – одну, и каждая послала открытки разным девочкам. Оля, Маша, Света и Галя получили по две открытки. Сколько открыток получила Тома?

***Решение.*** Построим граф, вершины которого обозначают девочек, и если одна послала открытку второй, то от вершины, изображенной первую девочку, идет дуга к вершине, изображающей вторую.



Построенный ориентированный граф содержит 5 вершин, степени исхода которых равны 3, 2, 2, 2 и 1. Степени захода каждой из четырех вершин орграфа равны 2. Для решения задачи нужно ответить на вопрос, чему равна степень захода пятой вершины?

Используем следующую теорему**:**

|  |
| --- |
| *Сумма полустепеней исхода всех вершин орграфа равна сумме полустепеней захода и равна числу его дуг.* |

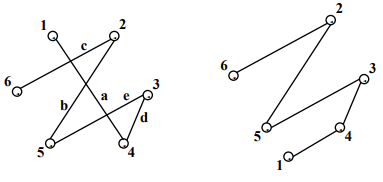
Согласно данной теореме сумма степеней исхода вершин орграфа равна сумме степеней захода, в нашем случае (3+2+2+2+1) = 10. Для выполнения равенства необходимо, чтобы пятая вершина также имела степень захода 2

***Задача 2.* исходные данные:**

**1.Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вершин.**

Решение.

1.Изобразим граф, соединив вершины: Реброа соединяет вершины 1 и 4, b соединяет вершины 2 и 5 и т. д. Затем преобразуем этот граф в плоский:



2.Составим матрицу смежности. В первом столбце и первой строке выпишем вершины. Ребру а инцидентны вершины 1 и 4, следовательно в колонке 1 и строке 4 ставим 1, а также колонке 4 и строке 1 ставим 1. Ребру b инцидентны вершины 2 и 5, следовательно в колонке 2 в строке 5 и колонке 5 строке 2 ставим 1 и т.д. Остальные ячейки таблицы содержат нули.

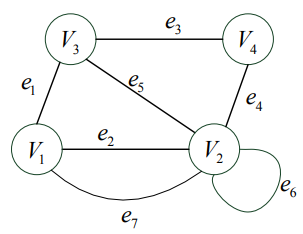
3.Составим матрицу инцидентности. В первом столбце выпишем вершины, первой строке – ребра. Ребру а инцидентны вершины 1 и 4, следовательно в колонке а в строке 1 и строке 4 ставим 1. Ребру b инцидентны вершины 2 и 5, следовательно в колонке b в строке 2 и строке 5 ставим 1и т.д. Остальные ячейки таблицы заполняем нулями.



4. Вычислим степени вершин:

**Задания для самостоятельного решения:**

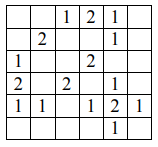
**Задание 1.**Дан граф



Определить:

* + - 1. Множества V и E .
      2. Пары смежных вершин.
      3. Инцидентность ребра вершинам.
      4. Пары смежных ребер.
      5. Степени вершин.
      6. Параллельные ребра.
      7. Наличие петель.

**Задание 2.** Постройте граф, соответствующий данной матрице смежности:

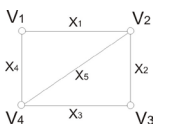


* + - 1. Охарактеризуйте полученный граф.
      2. Найдите степени всех его вершин.
      3. Найдите в нем точки сочленения и мосты, если они есть.
      4. Запишите для него матрицу инцидентности.

**Задание 3.**

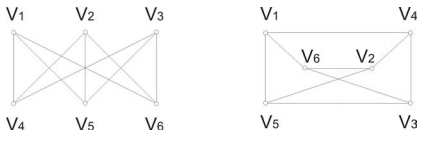
1)Сколько вершин? Какие смежные, а какие нет?

2)Сколько ребер? Какие смежные, а какие нет?

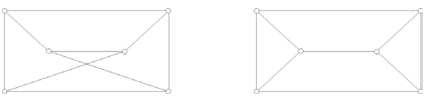


**Задание 4.**

А) Будут ли графы изоморфны?



Б) Будут ли графы изоморфны?



**Задание 5.**На 8 марта каждый студент группы подарил каждой студентке поцветку. Какое максимальное количество цветков могло быть подарено, если в

группе 20 человек.

**Контрольные вопросы**:

1.Что такое граф?

2. Что такое инцидентное ребро или инцидентная вершина?

3. Что такое петля?

4. Какое ребро называется ориентированным?

5. Что такое кратные ребра?

6. Что такое неограф?

7. Что такое орграф?

8. Какие вершины называются смежными?

9. Что такое конечный граф?

10. Что такое пустой граф?

11. Что такое полный граф?

12. Что такое локальная степень вершины?

13. Как связаны степени вершин в орграфе?

14. Что такое изоморфные графы?

15. Способы задания графов.

16.Что такое матрица смежности?

17. Что такое матрица инцидентности?

18. Что такое маршрут?

19. Что такое цикл?

20. Что такое цепь?

21. Что такое путь?

22. Что такое связные вершины?

23. Что такое связный граф?

24. Что такое плоский граф?

25. Что такое изолированные вершины?

26. Что такое дерево?

***Тема: «Понятия события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятности»***

**План:**

1. События. Виды событий.
2. Совместные и несовместные события. Противоположные события. Полная группа событий.
3. Алгебра событий.
4. Вероятность события.
5. Классическое определение вероятности.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие случайного события, их виды, понятие вероятности события,
* Классическое определение вероятности и формулу классического определения вероятности.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1.События. Виды событий**

Теория вероятностей – это математическая наука, которая изучает закономерность в случайных событиях. К основным понятиям теории вероятностей относятся **испытания** и **события.**

Под **испытанием** (опытом) понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие. Пример. Подбрасывание монеты вверх - испытание, а возможный результат, т.е. выпадение на верхней стороне монеты либо герба, либо цифры является событием.

**Событие бывает:**

1. Достоверное (всегда происходит в результате испытания).
2. Невозможное (никогда не происходит).
3. Случайное (может произойти или не произойти в результате испытания).

**Достоверным** называют событие, которое в результате испытания (осуществления определенных действий, определённого комплекса условий) обязательно произойдёт. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

Пример. Если в урне содержатся только белые шары, то взятый наудачу из урны шар будет обязательно белый. В данных условиях факт появления белого шара будет достоверным событием.

**Невозможным** называют событие, которое заведомо не произойдёт в результате испытания. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

Пример. Нельзя извлечь белый шар из урны, содержащей только черные шары. В этих условиях факт появления белого шара будет невозможным событием.

И, наконец, событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может, **как произойти, так и не произойти**, при этом должен иметь место принципиальный критерий случайности: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл». В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила/направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

Пример. Монета, брошенная вверх, может упасть так, что на ее верхней стороне окажется либо герб, либо цифра. Здесь появление сверху той или другой стороны монеты является случайным событием.

Подчёркнутый критерий случайности очень важен – так, например, карточный шулер может очень ловко имитировать случайность и давать выигрывать жертве, но ни о каких случайных факторах, влияющих на итоговый результат, речи не идёт.

**Любой** результат испытания называется **исходом**, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые) обозначают большими латинскими буквамилибо теми же буквами с подстрочными индексами, например:

Запишем следующие случайные события:

– в результате броска монеты выпадет «орёл»;

– в результате броска игральной кости (кубика) выпадет 5 очков;

– из колоды будет извлечена карта трефовой масти *(по умолчанию колода считается полной)*.

Да, события прямо так и записывают в практических задачах, при этом в уместных случаях удобно использовать «говорящие» подстрочные индексы (хотя можно обойтись и без них).

Следует в третий раз подчеркнуть, что случайные события обязательно удовлетворяют вышеприведённому критерию случайности. В этом смысле снова показателен 3-й пример: если из колоды изначально удалить все карты трефовой масти, то событие становится *невозможным*. Наоборот, если испытателю известно, что, например, дама треф лежит снизу, то он при желании может сделать событие *достоверным*. Таким образом, в данном примере предполагается, что **карты хорошо перемешаны и их рубашки неразличимы**, т.е. колода не является краплёной. Причём, здесь под «крапом» понимаются даже не «умелые руки», ликвидирующие случайность вашего выигрыша, а видимые дефекты карт. Например, рубашка той же дамы треф может быть грязной, порванной, заклеенной скотчем и т.д.

Таким образом, при розыгрыше важного жребия всегда есть смысл невзначай посмотреть, а не одинаковы ли грани монеты.

Другая важная характеристика событий – это их ***равновозможность***. Два или бо́льшее количество событий называют ***равновозможными***, если ни одно из них не является более возможным, чем другие.

Например:

* выпадение орла или решки при броске монеты;
* выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;
* извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Могут ли быть те же события **не равновозможными**? Могут! Например, если у монеты или кубика смещён [центр тяжести](http://www.mathprofi.ru/primery_reshenij_proizvolnyh_troinyh_integralov.html), то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани. Как говорится, ещё одна лазейка для мошенников. События – извлечение трефы, пики, червы или бубны тоже равновозможны. Однако равновозможность легко нарушит фокусник, который, тасуя колоду (даже «идеальную»), ловко подсмотрит и спрячет в рукаве, например, туза треф. Здесь становится *менее возможным*, что оппоненту будет сдана трефа, и, главное, *менее возможно*, что будет сдан туз.

Тем не менее, в рассмотренных трёх случаях при потере равновозможности всё же сохраняется случайность событий.

**2.Совместные и несовместные события. Противоположные события.  
Полная группа событий**

События называют **несовместными**, если в одном и том же испытании появление одного из событий **исключает** появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара **противоположных** событий. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой вверху. Например:

– в результате броска монеты выпадет орёл;

– в результате броска монеты выпадет решка.

Совершено ясно, что в отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными.

Пример. Герб и цифра являются единственно возможными и несовместными событиями при однократном бросании монеты.

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

– в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;

– в результате броска игрального кубика выпадет число очков, отличное от пяти.

Либо пять, либо не пять – третьего не дано, т.е. события несовместны и противоположны.

Аналогично – или трефа или карта другой масти:

– из колоды будет извлечена карта трефовой масти;

– из колоды будет извлечена пика, черва или бубна.

Пример. Попадание в цель и промах; выигрыш и проигрыш по билету лотереи - все это примеры противоположных событий.

Множество несовместных событий образуют **полную группу событий**, если в результате отдельно взятого испытания **обязательно появится одно из этих событий**. Очевидно, что любая пара противоположных событий (в частности, примеры выше) образует полную группу. Однако в различных задачах с одним и тем же объектом могут фигурировать разные события, например, для игрального кубика характерно рассмотрение следующего набора:

– в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;

– … 2 очка;

– … 3 очка;

– … 4 очка;

– … 5 очков;

– … 6 очков.

События-**несовместны***(поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других)***и образуют полную группу***(так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий)*.

Ещё одно важное понятие, которое нам скоро потребуется – это ***элементарность*** исхода (события). Если совсем просто, то элементарное событие «нельзя разложить на другие события». Например, события элементарны, но событие не является таковым, так как подразумевает выпадение 1, 2, 3, 4 или 6 очков (включает в себя 5 элементарных исходов).

В примере с картами события (извлечение трефы, пики, червы или бубны соответственно) несовместны и образуют полную группу, но они неэлементарны. Если считать, что в колоде 36 карт, то каждое из перечисленных событий включает в себя 9 элементарных исходов. Аналогично – события (извлечение шестёрки, семёрки, …, короля, туза) несовместны, образуют полную группу и неэлементарны (каждое включает в себя 4 исхода).

Таким образом, элементарным исходом здесь считается лишь извлечение какой-то конкретной карты, и, разумеется, 36 несовместных элементарных исходов тоже образуют полную группу событий.

**Совместные** события менее значимы с точки зрения решения практических задач, но обходить их стороной не будем. События называются **совместными**, если в отдельно взятом испытании появление одного из них **не исключает** появление другого.

Например:

– из колоды карт будет извлечена трефа;

– из колоды карт будет извлечена семёрка.

Если быть совсем лаконичным, одно не исключает другого.

Понятие совместности охватывает и бо́льшее количество событий:

– завтра в 12.00 будет дождь;

– завтра в 12.00 будет гроза;

– завтра в 12.00 будет солнце.

**3.Алгебра событий**

Пожалуйста, запомните **ВАЖНЕЙШЕЕ ПРАВИЛО**:

**Операция сложения событий** означает [***логическую связку***](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html) **ИЛИ**, а **операция умножения событий** – [***логическую связку***](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html) **И**.

1. **Суммой** двух событий A и B называется событие , которое состоит в том, что наступит **или** событие A **или** событие B **или** оба события одновременно. В том случае, если события **несовместны**, последний вариант отпадает, то есть может наступить **или** событие A**или** событие B.

Правило распространяется и на бо́льшее количество слагаемых, например, событие состоит в том, что произойдёт **хотя бы одно** из событий , а **если события несовместны**–**то одно и только одно** событие из этой суммы: **или** событие , **или** событие , **или** событие , **или** событие , **или** событие .

**Примеры:**

События (при броске игральной кости не выпадет 5 очков) состоит в том, что выпадет **или** 1, **или** 2, **или** 3, **или** 4, **или** 6 очков.

Событие (выпадет **не более** двух очков) состоит в том, что появится 1 **или** 2 **очка**.

Событие (будет чётное число очков) состоит в том, что выпадет **или** 2 **или** 4 **или** 6 очков.

Событие заключается в том, что из колоды будет извлечена карта красной масти (черва **или** бубна), а событие– в том, что будет извлечена «картинка» (валет **или** дама **или** король **или** туз).

Чуть занятнее дело с совместными событиями:

Событие состоит в том, что из колоды будет извлечена трефа **или** семёрка **или** семёрка треф. Согласно данному выше определению, **хотя бы что-то**– или любая трефа или любая семёрка или их «пересечение» – семёрка треф. Легко подсчитать, что данному событию соответствует 12 элементарных исходов (9 трефовых карт + 3 оставшиеся семёрки).

Событие состоит в том, что завтра в 12.00 наступит **ХОТЯ БЫ ОДНО из суммируемых совместных событий**, а именно:

– или будет только дождь / только гроза / только солнце;

– или наступит только какая-нибудь пара событий (дождь + гроза / дождь + солнце / гроза + солнце);

– или все три события появятся одновременно.

То есть, событиевключает в себя 7 возможных исходов.

1. **Произведением** двух событий *A*и *B*называют событие *AB*, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение *AB*означает, что при некоторых обстоятельствах наступит **и** событие *A***и** событие *B*. Аналогичное утверждение справедливо и для бо́льшего количества событий, так, например, произведениеподразумевает, что при определённых условиях произойдёт **и** событие , **и** событие , **и** событие , …,**и** событие .

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются две монетыи следующие события:

А1– на 1-й монете выпадет орёл;

– на 1-й монете выпадет решка;

А2– на 2-й монете выпадет орёл;

– на 2-й монете выпадет решка.

Тогда:

– событие А1 А2 состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й**и**на 2-й) выпадет орёл;

– событие – состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й**и**на 2-й) выпадет решка;

– событие А1- состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл**и**на 2-й монете решка;

– событие - состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка**и**на 2-й монете орёл.

Нетрудно заметить, что события А1 А2, , А1, **несовместны** *(т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки)*и образуют **полную группу** *(поскольку учтены* ***все*** *возможные исходы броска двух монет)*. Просуммируем данные события: Как интерпретировать эту запись? Очень просто – умножение означает логическую связку **И**, а сложение –**ИЛИ**. Таким образом, сумму  легко прочитать: «выпадут два орла **или** две решки **или** на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й решка **или** на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл »

Это был пример, когда **в одном испытании** задействовано несколько объектов, в данном случае – две монеты. Другая распространенная в практических задачах схема – это **повторные испытания**, когда, например, один и тот же игральный кубик бросается 3 раза подряд. В качестве демонстрации рассмотрим следующие события:

– в 1-м броске выпадет 4 очка;

– во 2-м броске выпадет 5 очков;

– в 3-м броске выпадет 6 очков.

Тогда событиесостоит в том, что в 1-м броске выпадет 4 очка **и** во 2-м броске выпадет 5 очков **и** в 3-м броске выпадет 6 очков. Очевидно, что в случае с кубиком будет значительно больше [комбинаций](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html)(исходов), чем, если бы мы подбрасывали монету.

**4.Вероятность события**

***Вероятность события***– это центральное понятие теории вероятностей. Существует несколько подходов к её определению:

***Классическое определение вероятности***;

[***Геометрическое определение вероятности***](http://www.mathprofi.ru/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti.html);

[***Статистическое определение вероятности***](http://www.mathprofi.ru/statisticheskoe_opredelenie_verojatnosti.html).

**Обозначения**. Вероятность некоторого события*A*обозначается большой латинской буквойP, а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента. Например:

– вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

– вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

– вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Также для обозначения вероятности широко используется маленькая буква*p*. В частности, можно отказаться от громоздких обозначений событийи их вероятностейв пользу следующей стилистики:

– вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

– вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

– вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

**5.Классическое определение вероятности**

Вероятностью наступления события *А* в некотором испытании называют отношение

,где:

– общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий;

– количество элементарных исходов, ***благоприятствующих*** событию *A*.

При броске монеты может выпасть либо орёл, либо решка – данные события образуют полную группу, таким образом, общее число исходов ; при этом, каждый из них элементарен и равновозможен. Событию благоприятствует исход (выпадение орла). По классическому определению вероятностей: .

Аналогично – в результате броска кубика может появиться элементарных равновозможных исходов, образующих полную группу, а событию благоприятствует единственный исход (выпадение пятёрки). Поэтому: .

Особое внимание обратим на третий пример. Здесь будет некорректным сказать *«раз в колоде 4 масти, то вероятность извлечения трефы »*. В определении речь идёт об элементарных исходах, поэтому правильный порядок рассуждений таков: всего в колоде 36 карт *(несовместные элементарные исходы, образующие полную группу)*, из них 9 карт трефовой масти*(кол-во элементарных исходов, благоприятствующих событию)*; по классическому определению вероятности:. Именно так!

Вероятности можно выразить и в процентах, например: вероятность выпадение орла равна , выпадения пятёрки , извлечения трефы, но в теории вероятностей этого делать не принято (хотя не возбраняется прикидывать проценты в уме).

Принято использовать доли единицы, и, очевидно, что вероятность может изменяться в пределах . При этом если , то событие A является *невозможным*, если– *достоверным*, а если , то речь идёт о *случайном* событии.

**! Если в ходе решения любой задачи у вас получилось какое-то другое значение вероятности – ищите ошибку!**

При классическом подходе к определению вероятности крайние значения (ноль и единица) получаются посредством точно таких же рассуждений. Пусть из некой урны, в которой находятся 10 красных шаров, наугад извлекается 1 шар. Рассмотрим следующие события:

K– из урны будет извлечён красный шар;

Z– из урны будет извлечён зелёный шар.

Общее количество исходов: СобытиюKблагоприятствуют все возможные исходы (), следовательно,, то есть данное событие*достоверно*. Для 2-го же события благоприятствующие исходы отсутствуют (), поэтому , то есть событие Z*невозможно*.

Особый интерес представляют события, вероятность наступления которых чрезвычайно мала. Хоть такие события и являются случайными, для них справедлив следующий постулат:

**в единичном испытании маловозможное событие не произойдёт.**

Именно поэтому Вы не сорвёте в лотерее Джек-пот, если вероятность этого события, скажем, равна 0,00000001. Да-да, именно Вы – с единственным билетом в каком-то конкретном тираже. Впрочем, бо́льшее количество билетов и бо́льшее количество розыгрышей Вам особо не помогут.

Но грустить не нужно, потому что есть противоположный принцип: если вероятность некоторого события очень близка к единице, то в отдельно взятом испытании оно *практически достоверно* произойдёт. Поэтому перед прыжком с парашютом не надо бояться, наоборот – улыбайтесь! Ведь должны сложиться совершенно немыслимые и фантастические обстоятельства, чтобы отказали оба парашюта.

Рассмотрим одну важную теорему:

**Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице**.

То есть**,** если события образуют полную группу, то со 100%-й вероятностью какое-то из них произойдёт. В самом простом случае полную группу образуют противоположные события, например:

– в результате броска монеты выпадет орёл;

– в результате броска монеты выпадет решка.

По теореме:

Совершенно понятно, что данные события равновозможны и их вероятности одинаковы.

По причине равенства вероятностей равновозможные события часто называют ***равновероятными***.

Пример с кубиком: события противоположны, поэтому.

Рассматриваемая теорема удобна тем, что позволяет быстро найти вероятность противоположного события. Так, если известна вероятность того, что выпадет пятёрка, легко вычислить вероятность того, что она не выпадет: .

Это гораздо проще, чем суммировать вероятности пяти элементарных исходов. Для элементарных исходов, к слову, данная теорема тоже справедлива: .

События, как отмечалось выше, равновозможны – и теперь мы можем сказать, что равновероятны. Вероятность выпадения любой грани кубика равна :

Ещё один пример: поскольку нам известна вероятность того, что будет извлечена трефа, то легко найти вероятность того, что будет извлечена карта другой масти: .

Заметьте, что рассмотренные пары событий и не равновероятны, как оно чаще всего и бывает.

В упрощенной версии записи решения вероятность противоположного события стандартно обозначается строчной буквой. Например, если– вероятность того, что стрелок попадёт в цель, то – вероятность того, что он промахнётся.

**Пример:** В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

Решение.

**Пример:** Участники жеребьёвки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлечённого жетона, не содержит цифры 5.

Решение. Из чисел от 1 до 100 содержат число 5 девятнадцать чисел. Не содержит число пять – 81 число. Тогда

**Пример**: Бросается один раз игральная кость. Какова вероятность выпадения нечетного числа очков?

Решение: Опыт состоит в бросании игральной кости 1 раз и наблюдении за числом очков, появившихся на верхней грани.

Все исходы опыта: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Число всех исходов: .

Рассмотрим событие А – выпало нечетное число очков. Исходы благоприятствующие А: 1, 3, 5.

Число исходов, благоприятствующих А :

**Пример**: Ребенок играет с шестью буквами разрезной азбуки А, В, К, М, О, С. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд получится слово «МОСКВА»?

Решение: Опыт состоит в случайном расположении шести букв в ряд. Все исходы опыта – множество перестановок из шести различных букв.

Число всех исходов:

Рассмотрим событие А – при случайном расположении шести букв в ряд получено слово «МОСКВА». Очевидно, что такое расположение букв единственно, т.е. Найдем вероятность события А:

**Пример**: В ящике находится 20 деталей, из них 8 бракованных. Из ящика наудачу извлекают 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажутся две бракованные детали.

Решение: Опыт состоит в выборе наудачу 5 деталей из 20. Все исходы опыта – множество сочетаний из 20 деталей (находящихся в ящике) по 5.

Число всех исходов опыта

Рассмотрим событие А – среди 5 деталей, извлеченных из ящика, две бракованные.

Если среди 5 деталей две бракованные, то остальные 3 небракованные. Тогда число исходов, благоприятствующих событию А, можно найти по принципу умножения. Нужно выполнить одно за другим два действия: из 8 бракованных выбрать 2 детали и затем из 12 небракованных выбрать 3 детали. Первое действие можно выполнить второе действие можно выполнить способами. Итак,

Найдем вероятность события А:

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1**. События обозначаются буквами А, В, С, … Среди данных событий определите, какие из них случайные, какие достоверные, какие невозможные.

А: летних каникул не будет;

В: учебный год когда-нибудь закончится;

С: завтра пойдёт снег;

D: черепаха научится говорить;

Е: день рождения вашего друга – 30 февраля;

F: свалившийся со стола бутерброд упадёт маслом вниз;

G: вы позвонили, а в трубке короткие гудки;

H: в следующем году снег не выпадет;

К: после субботы будет воскресенье;

L: в следующем году первый снег выпадет в понедельник;

М: при бросании игрального кубика выпадет не более 6 очков;

N: при бросании игрального кубика выпадет 4 очка;

Р: при бросании игрального кубика выпадет более 6 очков

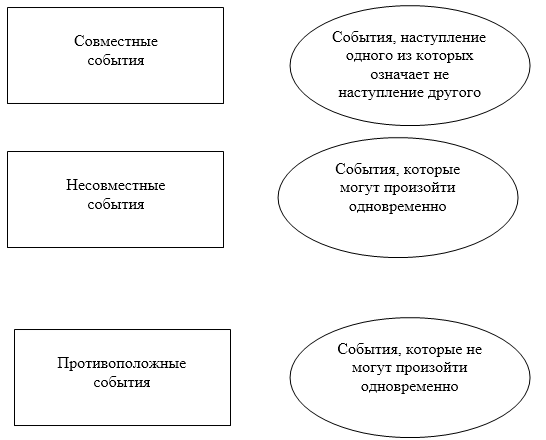
невозможные

случайные

достоверные

**Задание 2.**

Установите стрелками соответствие между названием события и его определением:



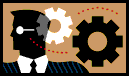
**Задание 3.**

Определите, какими событиями – совместными, несовместными или противоположными – являются следующие события:

1) Выпадение «орла» при подбрасывании монеты. Выпадение «решки» при подбрасывании монеты.



2) Идущий впереди человек работает инженером. Идущего впереди человека зовут Иван



3) Вышедший из библиотеки человек является офицером. Вышедший из библиотеки человек является допризывником.

j0233018

**Задание 4.** Корреспонденция разносится в *5* адресов. Разносчик забыл дома очки и разнес корреспонденцию случайным образом. Какова вероятность того, что вся корреспонденция попала к своим адресатам?

**Задание 5.** Цифры 0,1,2,3 написаны на четырех карточках. Карточки расположили в случайном порядке. Какова вероятность того, что из них сложено 4-х-значное число?

**Задание 6.** В хоккейном турнире участвуют 6 равных по силе команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. У Вас есть любимая команда. Вы пришли «поболеть» на турнир на одну из игр, выбранных случайно. Какова вероятность того, что в этой игре будет играть Ваша любимая команда?

**Задание 7.** В ящике разложено 20 деталей. Известно, что 5 из них являются стандартными. Рабочий случайным образом берет 3 детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь стандартная?

**Задание 8.** Из 7 карточек разрезной азбуки составлено слово колокол. Эти карточки рассыпали и затем собрали в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово ***колокол*?**

**Задание 9.** В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

**Задание 10.** В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

**Контрольные вопросы**:

1. Что такое случайное событие?
2. Какие виды событий вы знаете?
3. Какое событие называют достоверным?
4. В каком случае два события называются несовместимыми?
5. Что называют суммой двух событий?
6. Что называют произведением двух событий?
7. Сформулируйте классическое определение вероятности.

***Тема: «Теоремы сложения вероятностей»***

**План:**

1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.
2. Теорема сложения 2-х совместных событий.

**На занятии вы узнаете:**

* Теорему сложения вероятностей несовместных событий и её следствия,
* Теорему сложения 2-х совместных событий.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий**

**Теорема сложения вероятностей несовместных событий**: вероятность появления одного из двух **несовместных** событий *А* или *В* *(без разницы какого)*, равна сумме вероятностей этих событий:

Следствие 1. Аналогичный факт справедлив и для бОльшего количества несовместных событий, например, для трёх несовместных событий *А, В* и *С:*

Давайте сразу вспомним [**алгебру событий**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html): сложение событий означает появление **хотя бы одного** из суммируемых событий, и, поскольку события в данном случае НЕсовместны, то **одного и только одного** из этих событий (безразлично какого).

Следствие 2. Сумма вероятностей событий образующих полную группу равна единице

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них.

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, то есть: .

2.**Теорема сложения 2-х совместных событий**

Если события *А* и *В* совместимые, то вероятность суммы этих событий равна сумме вероятности событий минус вероятность совместного появления.

А сейчас возьмём в руки уже знакомое и безотказное орудие труда учёбы – игральный кубик с [**полной группой событий**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) , которые состоят в том, что при его броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков соответственно.

Рассмотрим событие – в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: *(выпадет 5* ***или*** *6 очков)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий: – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Рассмотрим событие , состоящее в том, что выпадет не более 4 очков и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

По той же теореме, вероятность того, что выпадет нечётное число очков:

и так далее.

С помощью рассматриваемой теоремы можно решить некоторые задачи:

Пример. *Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3 вопросов?*

Но здесь вместо [**правила сложений комбинаций**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html) в ходу и другая схема рассуждений. Рассмотрим два несовместных события:

*А*– студент ответит на два вопроса из трёх;

*В*– студент ответит на все три вопроса.

Возможно, некоторые читатели ещё не до конца осознали **суть** несовместности. Вдумаемся ещё раз: студент не может ответить на 2 вопроса из 3 **и в то же самое время** ответить на все 3 вопроса. Таким образом, события *А* и *В* – несовместны.

Теперь, пользуясь [**классическим определением**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html), найдём их вероятности:

.

Факт успешной сдачи экзамена выражается суммой *А+В* *(ответ на 2 вопроса из 3****или****на все вопросы)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий: – вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Этот способ решения совершенно равноценен, выбирайте, какой больше нравится.

Пример. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

**Решение**:всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.

В данной задаче удобнее воспользоваться «быстрым» способом оформления без расписывания событий большими латинскими буквами. По классическому определению:

  – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;

– вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

Бесконечных «хвостов» после запятой тут нет и не ожидается, поэтому можно работать с десятичными дробями – компактнее будет запись.

По теореме сложения несовместных событий:

 – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

**Ответ**:

Пример. Производится бомбометание по трем складам боеприпасов.

Сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в 1 склад 0,01, во 2 – 0,003, в 3 – 0,025. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

Решение.

Пусть А – событие попадания в 1-ый склад; В – событие попадания во 2-ой склад; С – событие попадания в 3-ий склад.

Тогда:

Пример. В цехе 3 станка, вероятность что 1 станок работает 0,7, вероятность, что 2 станок работает – 0,8, вероятность, что 3 станок работает – 0,4. Найти вероятность, что хотя бы один станок не работает.

Решение.

Обозначим события, соответствующие работе каждого из станков.

– 1-ый станок работает;

– 2-ой станок работает;

– 3-ийстанок работает.

Тогда вероятности отказа в работе станков равны:

Искомую вероятность найдем по формуле:

Пример. Найти вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число кратно двум или пяти.

Решение.

Пусть

В задаче требуется найти . Вычислим следующие вероятности где

Всего двузначных чисел 90, из них чётных ровно половина, значит

Чисел, кратных пяти всего18,следовательно,

Если число делится на 2 и на 5 одновременно, то оно делится на 10. Таких двузначных чисел ровно 9, значит

По формуле, приведённой выше, имеем:

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1**. На эк­за­ме­не по гео­мет­рии школь­ни­ку достаётся один во­прос из спис­ка эк­за­ме­на­ци­он­ных во­про­сов. Ве­ро­ят­ность того, что это во­прос на тему «Впи­сан­ная окруж­ность», равна 0,2. Ве­ро­ят­ность того, что это во­прос на тему «Па­рал­ле­ло­грамм», равна 0,15. Во­про­сов, ко­то­рые од­но­вре­мен­но от­но­сят­ся к этим двум темам, нет. Най­ди­те ве­ро­ят­ность того, что на эк­за­ме­не школь­ни­ку до­ста­нет­ся во­прос по одной из этих двух тем.

**Задание 2**. Ве­ро­ят­ность того, что новый элек­три­че­ский чай­ник про­слу­жит боль­ше года, равна 0,97. Ве­ро­ят­ность того, что он про­слу­жит боль­ше двух лет, равна 0,89. Най­ди­те ве­ро­ят­ность того, что он про­слу­жит мень­ше двух лет, но боль­ше года.

**Задание 3**. В тор­го­вом цен­тре два оди­на­ко­вых ав­то­ма­та про­да­ют кофе. Ве­ро­ят­ность того, что к концу дня в ав­то­ма­те за­кон­чит­ся кофе, равна 0,3. Ве­ро­ят­ность того, что кофе за­кон­чит­ся в обоих ав­то­ма­тах, равна 0,12. Най­ди­те ве­ро­ят­ность того, что к концу дня кофе оста­нет­ся в обоих ав­то­ма­тах.

**Задание 4**. Ав­то­ма­ти­че­ская линия из­го­тав­ли­ва­ет ба­та­рей­ки. Ве­ро­ят­ность того, что го­то­вая ба­та­рей­ка не­ис­прав­на, равна 0,02. Перед упа­ков­кой каж­дая ба­та­рей­ка про­хо­дит си­сте­му кон­тро­ля. Ве­ро­ят­ность того, что си­сте­ма за­бра­ку­ет не­ис­прав­ную ба­та­рей­ку, равна 0,99. Ве­ро­ят­ность того, что си­сте­ма по ошиб­ке за­бра­ку­ет ис­прав­ную ба­та­рей­ку, равна 0,01. Най­ди­те ве­ро­ят­ность того, что слу­чай­но вы­бран­ная ба­та­рей­ка будет за­бра­ко­ва­на си­сте­мой кон­тро­ля.

**Задание 5.** Стре­лок стре­ля­ет по ми­ше­ни один раз. В слу­чае про­ма­ха стре­лок де­ла­ет вто­рой вы­стрел по той же ми­ше­ни. Ве­ро­ят­ность по­пасть в ми­шень при одном вы­стре­ле равна 0,7. Най­ди­те ве­ро­ят­ность того, что ми­шень будет по­ра­же­на (либо пер­вым, либо вто­рым вы­стре­лом).

**Задание 6.** Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,19. Покупатель в магазине выбирает одну такую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

**Задание 7.** Вероятность того, что будет снег (событие A), равна 0.6, а того, что будет дождь (событие B), равна 0.45. Найти вероятность плохой погоды, если вероятность дождя со снегом (событие AB) равна 0.25

**Задание 8.** В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

**Задание 9.** Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую — 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

**Задание 10.** Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов А, В и С. Вероятность получения пакета из города А равна 0,7, из города В —0,2.Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города С.

**Задание 11.** Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: . Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

**Задание 12.** В большой популяции плодовой мушки 25% мух имеют мутацию глаз, 50% - мутацию крыльев, а 40% мух с мутацией глаз имеют мутацию крыльев. Какова вероятность того, что у мухи, неудачу выбранной из этой популяции, окажется хотя бы одна из этих мутаций?

**Контрольные вопросы**:

1. Какие события называются несовместными?
2. Что такое полная группа несовместных событий?
3. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
4. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
5. Сформулируйте теорему о вероятности суммы совместных событий.
6. При каком условии вероятность суммы двух случайных событий равна сумме вероятностей этих событий?

***Тема: «Теоремы умножения вероятностей»***

**План:**

1. Зависимые и независимые события.
2. Условная вероятность.
3. Теоремы умножения вероятностей.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие зависимые события, понятие независимые события, условная вероятность,
* Теоремы умножения вероятностей.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1. Зависимые и независимые события**

Два события A и B называются **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от наступления или ненаступления другого.

Пример. Пусть A - событие, состоящее в появлении герба при первом бросании монеты, а B - событие, состоящее в появлении герба при втором бросании монеты, то события A и B не зависят друг от друга, т.е. результат первого бросания монеты не может изменить вероятность появления герба при втором бросании монеты.

Два события A и B называются **зависимыми**, если вероятность одного из них зависит от наступления или ненаступления другого.

Пример, две производственные установки связаны единым технологическим циклом. Тогда вероятность выхода из строя одной из них зависит от того, в каком состоянии находится другая.

*Как определить зависимость/независимость событий?*

Иногда об этом прямо сказано в условии задачи, но чаще всего приходится проводить самостоятельный анализ. Какого-то однозначного ориентира тут нет, и факт зависимости либо независимости событий вытекает из естественных логических рассуждений.

**2.Условная вероятность**

Вероятность события B, вычисленная в предположении, что перед этим наступило связанное с ним событие A, называется **условной вероятностью** события B и обозначается

**3. Теоремы умножения вероятностей**

Теорема. Вероятность совместного наступления двух зависимых событий (A и B) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло, т.е.

Теорема. Вероятность совместного наступления нескольких зависимых событий равно произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных событий, вычисленные в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

Теорема. Вероятность совместного наступления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий

Теорема. Вероятность совместного наступления нескольких независимых событий равна произведению их вероятностей, т.е.

Пример. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение*:*

Пример. Два стрелка делают одновременно по одному выстрелу в одну цель. Какова вероятность того, что оба попадут, если известно, что первый стрелок в среднем дает 7 попаданий, а второй 8 попаданий на каждые 10 выстрелов? Какова вероятность поражения мишени?

Решение. Вероятность попадания первого стрелка (событие A) равна вероятность попадания второго стрелка (событие B) равна . События A и B независимы друг от друга, поэтому вероятность совместного наступления этих событий (совместное попадание в цель) найдем по теореме умножения для независимых событий:

Вероятность поражения мишени означает попадание в мишень хотя бы одного стрелка. Так как попадание в мишень первого и второго стрелков являются событиями совместными, то применение теоремы сложения вероятностей для совместных событий дает следующий результат:

Пример. В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй- 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть - из первой урны извлечен белый шар; - из второй урны извлечен белый шар. Очевидно, что события и независимы.

Так как **, ,** то по формуле находим

.

Следствие. Вероятность наступления хотя бы одного из независимых событий можно найти используя противоположное событие:

Пример. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.

Решение. Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим, считая что первый валик – конусный, т.е. условная вероятность: Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим, считая что первый валик – конусный, т.е. условная вероятность: По теореме умножения, искомая вероятность

Пример. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают последовательно без возвращения два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Рассмотрим события:

;

.

Поскольку , то по теореме умножения имеем:

**4.Зависимые события и условная вероятность**

Кратко повторим, что такое независимость событий: события *А* и *В* являются НЕзависимыми, если вероятность любого из них **не зависит** от появления либо непоявления другого события. Простейший пример – подбрасывание двух монет. Вероятность выпадения орла либо решки на одной монете никак не зависит от результата броска другой монеты.

Понятие зависимости событий вам тоже знакомо и настал черёд заняться ими вплотную.

Сначала рассмотрим традиционный набор, состоящий из двух событий: событие *В*  является ***зависимым***, если помимо случайных факторов его вероятность зависит от появления либо непоявления события *А*. Вероятность события *В*, вычисленная в предположении того, что событие  *А* **уже произошло**, называется ***условной вероятностью*** наступления события *В* и обозначается через . При этом события*А* и *В* называют ***зависимыми событиями*** *(хотя, строго говоря, зависимо только одно из них)*.

Пример. Из колоды в 36 карт последовательно извлекаются 2 карты. Найти вероятность того, что вторая карта окажется червой, если до этого:

а) была извлечена черва;

б) была извлечена карта другой масти.

Решение: рассмотрим событие: *B*– вторая карта будет червой. Совершенно понятно, что вероятность этого события зависит от того, черву или не черву вытянули ранее.

а) Если сначала была извлечена черва (событие*A*), то в колоде осталось 35 карт, среди которых теперь находится 8 карт червовой масти. По *классическому определению*: – вероятность того, что вторая карта окажется червой *при условии*, что до этого тоже была извлечена черва.

б) Если же сначала была извлечена карта другой масти (событие ), то все 9 черв остались в колоде. По*классическому определению*: – вероятность того, что вторая карта окажется червой *при условии*, что до этого была извлечена карта другой масти.

Всё логично – если вероятность извлечения червы из полной колоды составляет , то при извлечении следующей карты аналогичная вероятность изменится: в первом случае – уменьшится (т.к. черв стало меньше), а во втором – возрастёт: (т.к. все червы остались в колоде).

Ответ: а)б) .

Пример. В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу один за другим извлекают два шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что:

а) оба шара будут белыми;

б) оба шара будут чёрными;

в) сначала будет извлечён белый шар, а затем – чёрный.

Обратите внимание на уточнение «не возвращая их обратно». Этот комментарий дополнительно подчёркивает тот факт, что события зависимы. Действительно, а вдруг извлечённые шары возвращают обратно? В случае возвратной выборки вероятности извлечения чёрного и белого шара меняться не будут, а в такой задаче уже следует руководствоваться *теоремой умножения вероятностей независимых событий*.

Решение: всего в урне: 4 + 7 = 11 шаров:

а) Рассмотрим события *А*– первый шар будет белым, *В*– второй шар будет белым и найдём вероятность события, состоящего в том, что 1-й шар будет белым**и**2-й белым.

По классическому определению вероятности: . Предположим, что белый шар извлечён, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых, поэтому:– вероятность извлечения белого шара во 2-м испытании при условии, что до этого был извлечён белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

– вероятность того, что оба шара будут белыми.

б) Найдём вероятность события, состоящего в том, что 1-й шар будет чёрным **и** 2-й чёрным

По классическому определению: – вероятность того, что в 1-м испытании будет извлечён чёрный шар. Пусть извлечён чёрный шар, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 6 чёрных, следовательно:

– вероятность того, что во 2-м испытании будет извлечён чёрный шар при условии, что до этого был извлечен чёрный шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

– вероятность того, что оба шара будут чёрными.

в) Найдём вероятность события (сначала будет извлечён белый шар **и** затем чёрный).

После извлечения белого шара (с вероятностью) в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых и 7 чёрных, таким образом: – вероятность того, что во 2-м испытании будет извлечён чёрный шар при условии, что до этого был извлечен белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий: – искомая вероятность.

Ответ: а) ; б) ; в) .

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1.** Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут извлечены два туза подряд?

**Задание 2.** В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно извлекают три шара. Найти вероятность того, чтоа) третий шар окажется белым, если до этого был извлечён черный и красный шар;б) первый шар окажется черным, второй – красным и третий – белым.

**Задание 3.** Какова вероятность того, что при десятикратном бросании монеты герб выпадет 10 раз ?

**Задание 4.** В первом ящике 1 белый и 5 чёрных шаров, во втором 8 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – чёрный.

**Задание 5.** В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

**Контрольные вопросы**:

1. Какие события называются независимыми?
2. Какие события называются зависимыми в данном испытании? Приведите примеры.
3. Определение условной вероятности.
4. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.

***Практическое занятие № 11. «Решение практических задач на определение вероятности события»***

**Цель работы:**

Научиться применять теоремы сложения и умножения вероятностей при решении задач на определение вероятности событий.

**Знания**:

1.Понятие совместных и несовместных событий;

2.Зависимые и независимые события.

3.Условная вероятность

4.Теоремы сложения и умножения вероятностей;

**Умения:**

1. Использование теорем сложения и умножения вероятностей.

**Порядок работы на занятии:**

1. Повторить теоремы сложения и умножения вероятностей.
2. Выполнить задание.
3. Выполненное задание покажите преподавателю.

**Содержание практической работы:**

**Примеры типового расчета.**

На основе конкретных примеров покажем способы вычисления вероятностей события.

**Пример.**

В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

**Решение.**

Общее число различных исходов есть . Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет . Согласно формуле , получим

**Пример.**

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

**Решение.**

Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через А. Общее число случаев Число случаев m, благоприятствующих появлению события А, равно 3. По формуле получим

**Пример.**

Из урны в которой находится 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

**Решение.**

Обозначим событие, состоящее в проявлении черного шара, через А. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов по два:

.

Число случаев m, благоприятствующих событию А, составляет

По формуле находим вероятность появления двух черных шаров:

**Пример.**

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

**Решение.**

Пусть А- событие, состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3, а В- в том, что оно кратно 5. Найдем Так как А и В совместные события, то воспользуемся формулой.

Всего имеется 90 двузначных чисел: 10,11,…,98,99. Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют наступлению события А); 18- кратными 5 (благоприятствуют наступлению события В) и 6- кратными одновременно 3 и 5 (благоприятствуют наступлению события АВ). Таким образом,, , , т.е.

**Пример.**

В одной урне находится 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

**Решение.**

Пусть А - появление белого шара из первой урны, а В - появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события А и В независимы.Найдем

По формуле получим .

**Задания для практической работы:**

Найти вероятности данных событий.

**Вариант 1.**

1. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди пяти наугад выбранных билетов два окажутся выигрышными?

2. На карточках разрезной азбуки написаны 32 буквы русского алфавита. 4 карточки вынимают наугад одну за другой и укладывают на стол в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово

3. В урне 6 белых и 9 черных шаров. Из урны вынимают одновременно два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

**Вариант 2.**

1. Из шести одинаковых карточек разрезной азбуки: наудачу выбирают четыре карточки и складывают их в ряд в порядке их извлечения. Какова вероятность при этом получить слово

2. В партии из 15 деталей имеется 9 стандартных. Найдите вероятность того, что среди семи взятых наугад деталей 5 стандартных?

3. Из букв слова «производная» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: а) согласной; в) гласной; с) буква

**Вариант 3.**

1. На шести одинаковых карточках написаны буквы . Карточки перемешивают и раскладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, чтобы получилось слово

2. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Найдите вероятность того, что среди двух взятых наугад деталей одна бракованная?

3. В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

**Вариант 4.**

1. Из урны, содержащей 5 шаров с цифрами 1, 2, 3,4,5 извлекают наудачу все шары один за другим. Какова вероятность того, что номера извлеченных шаров идут в порядке возрастания?

2. Экзаменационные билеты пронумерованы числами от 1 до 35. Какова вероятность того, что номер выбранного билета нечётный?

3. Из букв слова «математика» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: а) согласной; в) гласной; с) буква «а».

**Вариант 5.**

1. В партии из 100 деталей 5 % бракованных. Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется стандартной?

2. Трехтомное собрание сочинений М.Ю. Лермонтова расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят по порядку номеров?

3. Из 60 электронасосов имеется 5 бракованных. Какова вероятность того, что три взятых наугад насоса окажутся бракованными?

**Вариант 6.**

1. Из полного набора домино наудачу извлекают одну кость. Какова вероятность того, что число очков на ней четно?

2. Из 50 электролампочек имеется 4 бракованных. Какова вероятность того, что две взятые наугад лампы окажутся бракованными?

3. Задания программированной контрольной работы пронумерованы всеми двухзначными числами. Какова вероятность того, что номер наугад выбранного задания состоит из одинаковых цифр?

**Вариант 7.**

1. Из 60 экзаменационных вопросов учащийся подготовил 50. На экзамене он должен ответить на два вопроса. Какова вероятность того, что учащийся ответит на оба вопроса?

2. В книжном магазине на полке лежит 20 книг, причем 10 книг стоят по 20 руб. каждая, 3 книги - по 40 руб. и 7 книг - по 10руб. Найти вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 50 руб.?

3. Из букв слова «вероятность» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: а) согласной; в) гласной; с) буква «о».

**Вариант 8.**

1. Из 10 билетов лотереи выигрышными являются два. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов два выигрышных?

2. На пяти одинаковых карточках написаны буквы . Карточки перемешивают и раскладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, чтобы получилось слово ?

3. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет нечётное число очков?

**Вариант 9.**

1. В урне 100 шаров, помеченных номерами . Из урны наугад выбирают один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара содержит цифру 5?

2. В партии из 10 деталей имеется 6 стандартных. Найдите вероятность того, что среди трёх взятых наугад деталей одна бракованная?

3. Ребёнок имеет на руках 5 кубиков с буквами: . Какова вероятность того, что ребёнок соберет из кубиков слово

**Вариант 10.**

1. В урне 6 белых и 9 черных шаров. Из урны вынимают одновременно два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

2. На карточках разрезной азбуки написаны 32 буквы русского алфавита. Шесть карточек вынимают наугад одну за другой и укладывают на стол в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово “призма”?

3. Цифры выписанные на отдельные карточки, складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) чётное; б) нечётное; в) двузначное.

**Вариант 11.**

1. В партии из 8 деталей имеется 6 стандартных. Какова вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей ровно 3 стандартных?

2. Четырехтомное собрание сочинений А.С. Пушкина расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят по порядку номеров?

3. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

**Вариант 12.**

1. Восемь различных книг расставляют наугад на одной полке. Какова вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом?

2. Экзаменационные билеты пронумерованы числами от 1 до 35. Какова вероятность того, что номер выбранного билета чётный?

3. Цифры 1, 2, 3,4,5,6,7,8,9, выписанные на отдельные карточки, складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) нечётное; б) чётное; в) трехзначное.

**Вариант 13.**

1. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что два шара белые.

2. В книжном магазине на полке лежит 20 книг, причем 10 книг стоят по 20 руб. каждая, 3 книги - по 40 руб. и 7 книг - по 10руб. Найти вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 30 руб.?

3. Ребенок имеет на руках 4 кубика с буквами: . Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово

**Вариант 14.**

1. В урне 8 красных и 5 синих шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что они разного цвета.

2. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет чётное число очков?

3. Из букв слова «комбинаторика» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: а) согласной; в) гласной; с) буква «о».

**Вариант 15.**

1. Десять различных книг расставляют наугад на одной полке. Найдите вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными рядом.

2. В партии из 12 деталей имеется 9 стандартных. Найдите вероятность того, что среди семи взятых наугад деталей 6 стандартных?

3. В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

***Тема: «Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины»***

**План:**

1. Случайные величины.
2. Понятие дискретной и непрерывной случайной величины.
3. Закон распределения случайной величины.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие ДСВ, понятие НСВ,
* Понятие ряда распределения ДСВ.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1.Случайные величины**

В жизни мы сталкиваемся с различными величинами. Например, когда мы отправляемся в путешествие при покупке авиабилета, нас интересует его стоимость, продолжительность полета и в дополнение, сколько билетов уже продано. Первые две величины являются постоянными, а последняя величина будет меняться от опыта к опыту, то есть принимать любое из возможных значений.

Величины, которые могут принимать в результате опыта любое из возможных значений, заранее неизвестное, являются предметом нашего дальнейшего изучения.

**Случайной** называют величину, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через*X, Y, Z* , а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например,  .

Пример:

*X* – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только** грань, какая именно – не предсказать *(фокусы не рассматриваем)*; при этом случайная величина *X*  может принять одно из следующий значений:

*Y* – количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

либо   мальчиков – **один и только один** из перечисленных вариантов.

*Z* – дальность прыжка в длину *(в некоторых единицах)*. Её не в состоянии предугадать даже мастер спорта. Случайная величина*Z* может принять *несчётно много* значений из некоторого числового промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Задание 1. Сыграно три партии в шахматы. *X* – число выигранных шахматных партий. Записать возможные значения случайной величины *Х*.

Решение: Возможные значения

Задание 2. Подбрасываем монету. *Y* – выпадение одной из граней. Записать возможные значения случайной величины *Y*.

Решение: Возможные значения .

Задание 3. Выстрел из орудия. *Y* - расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия. Записать возможные значения случайной величины *Y*.

(Дальность полета зависит от установки прицела, силы и направления ветра, температуры и т. д., которые не могут быть полностью учтены).

Решение: возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку

**2.Понятие дискретной и непрерывной случайной величины**

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы** в зависимости от того, какое значение принимает случайная величина – отдельное или из промежутка:

1) **Дискретная *(прерывная)* случайная величина** – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно*.

**Счетным** называется множество, элементы которого можно пронумеровать числами натурального ряда:

Например, число бракованных деталей среди *n* проверенных; число выпавших «гербов» при *n*–кратном бросании монеты; число девочек, родившихся в течении суток в определенной стране; число учащихся, опрошенных на уроке; число солнечных дней в году. Т.е. случайная величина может принимать отдельные изолированные значения, которые можно заранее перечислить.

Например, *X* - число шахматных партий, окончившихся ничейным результатом, из трех сыгранных. В этом случае величина *X* может принять следующие значения: .

2) **Непрерывная случайная величина** – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Примерами непрерывной случайной величины служат: время безаварийной работы станка; расход горючего на единицу расстояния; количество осадков, выпавших в сутки.

Рассмотрим непрерывную случайную величину на примере дальности полета артиллерийского снаряда. Предположим, что расчетная дальность полета снаряда 7000 м. Пусть при первом выстреле снаряд пролетел 7020 м, а при втором -7040 м. При последующих выстрелах снаряд может пролететь и 7030, и 6995 м. Другими словами, снаряд может попасть в любую точку некоторого промежутка и невозможно указать какие-либо два возможных значения дальности полета снаряда, между которыми не найдется хотя бы одного возможного значения рассматриваемой случайной величины.

***Примечание****: в учебной литературе популярны аббревиатуры ДСВ и НСВ*

Задание для самостоятельного решения:

Определить вид случайной величины. Отметить буквой **Д-** дискретные случайные величины, **Н**- непрерывные случайные величины.

* Время безаварийной работы станка.
* Расход горючего на единицу расстояния.
* Число студентов в группе.
* Бросаем игральную кость один раз? Два раза? n раз?
* Количество осадков, выпавших в сутки.
* Выстрел по мишени.
* Измерение температуры больного при обследовании.

**3.Закон распределения случайной величины**

– это *соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается рядом распределения. Рядом распределения дискретной случайной величины *Х* называется таблица, в верхней строке которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины *X* : , а внижней – вероятности этих значений: .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Так как случайная величина *Х* о*бязательно* примет одно из значений: то соответствующие события образуют полную группу и сумма вероятностей их наступления равна единице: или

**Алгоритм построения ряда распределения:**

1. Определить все возможные различные значения СВ.
2. Расположить их в возрастающем порядке и записать в первую строку таблицы.
3. Вычислить вероятности каждого значения (при подсчете использовать классическое определение вероятности или другие формулы).
4. Занести найденные во вторую строку таблицы.

**Замечание**. Если ряд распределения построен правильно, то выполнено

Пример. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50рублей и 10 выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины *Х* – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Напишем возможные значения *Х*:Вероятности этих возможных значений таковы:

Напишем закон распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 10 | 50 |
|  |  |  |  |

Контроль:

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1.** Случайная величина *Х* принимает значения с вероятностями, соответственно равными Написать ряд распределения дискретной случайной величины *X.*

**Задание 2.** В издательстве выпущено 100 книг по овцеводству. Лоте­реей разыграны одна книга в 500 руб. и 10 по 10 руб. Найти закон рас­пределения случайной величины *х*- возможного выигрыша одной книги.

**Задание 3.** Определить вид случайной величины. Отметить буквой Д- дискретные случайные величины, Н- непрерывные случайные величины.

1. число присутствующих на лекции;
2. время безотказной работы устройства;
3. рост и вес;
4. число рассмотренных жалоб;
5. ошибки при измерениях;
6. число кандидатов на выборах.

**Контрольные вопросы:**

1. Сформулируйте определение случайной величины.
2. Назовите виды случайных величин.
3. В чем состоит отличие дискретной случайной величины от непрерывной.
4. Какая случайная величина называется дискретной? Приведите примеры дискретной случайной величины.

***Тема: «Закон распределения случайной величины»***

**План:**

1. Закон распределения дискретной случайной величины.
2. Многоугольник распределения.
3. Функция распределения случайной величины и ее свойства.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие ряда распределения ДСВ, понятие многоугольник распределения,
* Способы задания закона распределения случайной величины,
* Понятие функция распределения случайной величины и ее свойства.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1.Закон распределения дискретной случайной величины**

**Законом распределения дискретной случайной величины** называет соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения может иметь разные формы. Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в виде таблицы, аналитически (в виде **явной функции**  и графически.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины *X* является таблица (матрица), в которой в порядке возрастания перечислены все возможные значения случайной величины и соответствующие их вероятности, т. е.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Или , где.

Такая таблица называется **рядом распределения**дискретной случайной величины *X*.

Пример. Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Найти.

Решение: так как случайная величина*X*может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют *полную группу*, а значит, сумма их вероятностей равна единице:

Ответ:

Пример. В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины *X*– размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

Решение: как вы заметили, значения случайной величины принято располагать в *порядке их возрастания*. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно рублей.

Всего таковых билетов 50 – 12 = 38, и по классическому определению:

– вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша рублей составляет: . И для

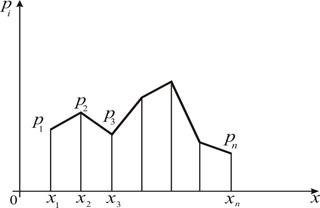
Проверка: *.*

Ответ: искомый закон распределения выигрыша:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**2.Многоугольник распределения**

*Графическое изображение ряда распределения (см. рис.) называется****многоугольником (или полигоном) распределения****.*



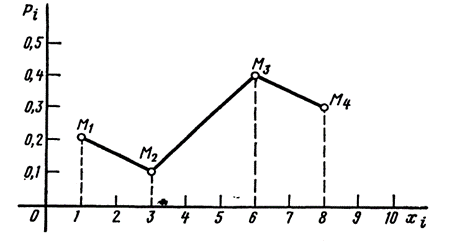
Он представляет собой ломаную линию, соединяющую точки ( прямоугольной системы координат.

Многоугольник распределения, как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину и является одним из способов (графическим) задания закона распределения.

Пример. Дискретная случайная величина Х задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 6 | 8 |
|  | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,3 |

Решение*.* Для построения многоугольника распределения в прямоугольной системе координат построим точки (, а затем соединим их отрезками прямых.



При выполнении чертежа от руки по возможности придерживайтесь следующего масштаба:

горизонтальная ось:1 ед. = 2 тетрадные клетки (1 см);

вертикальная ось: 0,1 = 2 тетрадные клетки.

Если значения  достаточно велики, то ось абсцисс можно «разорвать» *(не чертить её кусочек после единицы)*, и справа продолжить нумерацию, например, с 20.

**3.Функция распределения случайной величины и ее свойства**

Одним из наиболее удобных и универсальных способов задания закона распределения случайной величины *X* является функция распределения.

Функцией распределения случайной величины *Х* называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее *х*:

Геометрически функция распределения интерпретируется вероятность того, что случайная точка *X* попадет левее данной точки *x*



Функция существует, как для дискретных, так и непрерывных случайных величин.

**Свойства функции распределения**:

1. Функция распределения является неубывающей функцией, то есть
2. *; .* В частности, если все возможные значения *X*лежат на интервале , то при и при .
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала равна разности значений функции распределения на концах интервала:

Непрерывную случайную величину можно задать с помощью функции распределения . Этот способ задания не является единственным. Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют *плотностью распределения* или *плотностью вероятности* (иногда её называют дифференциальной функцией).

*Плотность распределения случайной величины* – производная от функции распределения:

.

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения. Заметим, что для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

**Свойства плотности вероятности**

Дифференциальная функция распределения – неотрицательная, т.е. .

Площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от до :

.

Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от до равен единице:

.

Последнее равенство называется также *условием нормировки непрерывной случайной величины*.

Пример. Задана плотность вероятности случайной величины

Найти вероятность того, что в результате испытания примет значение, принадлежащие интервалу.

Решение: Искомая вероятность

.

Зная плотность распределения , можно найти функцию распределения по формуле

**.**

Действительно, .

Следовательно,

или .

Таким образом, *зная плотность распределения, можно найти функцию распределения.*

Пример. Найти функцию распределения по заданной плотности распределения:

Решение: Воспользуемся формулой

Если, то , следовательно,. Если, то , следовательно,

.

Если , то

.

Итак, искомая функция распределения

Пример. Плотность распределения случайной величины имеет следующий вид:

.

Найти постоянный параметр .

Решение**:** Плотность распределения должна удовлетворять условию нормировки:

.

Поэтому потребуем, чтобы выполнялось равенство

.

Отсюда. Найдём определённый интеграл:

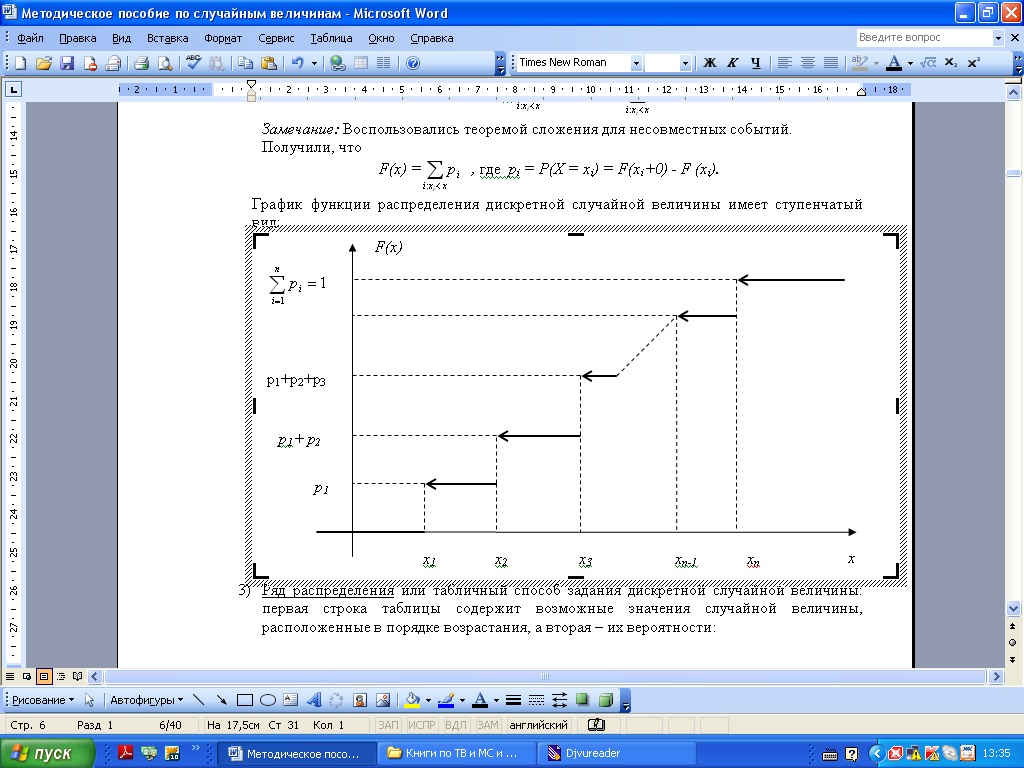
.

Таким образом, искомый параметр

.

Следовательно, функция плотности вероятности примет вид:

Для дискретной случайной величины значение в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции. Соответственно график функции распределения имеет ступенчатый вид.



Построим функцию распределения случайной величины *X*, ряд распределения которой представлен в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* |  |  | … |  | … |  |
| *P* |  |  | … |  | … |  |

При ;

При

При ;

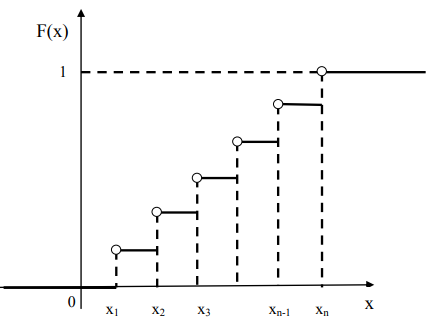
…………………………………………………………………………………….

При

;

При

График построенной функции изображен на рисунке.



Для дискретной случайной величины график функции распределения представляет собой разрывную ступенчатую линию. Когда переменная x проходит через какое-нибудь из возможных значений случайной величины, значение функции распределения меняется скачкообразно, т.е. функция имеет скачок в тех точках, в которых случайная величина принимает конкретное значение согласно ряду распределения, причем величина скачка равна вероятности этого значения. Сумма величин всех скачков функции распределения равна единице. В интервалах между значениями случайной величины функция постоянна.

Пример. Смысл функции распределения хорошо иллюстрирует наша любимая игра:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Чему, например, равно значение Это вероятность того, что выигрыш будет меньше, чем И это **невозможное событие**: . Совершенно понятно, чтои для всех «икс» из интервала,а также для Почему? По определению функции распределения:

– вы согласны? Функция означает вероятность того, что в точке выигрыш будет **строго меньше «минус»** пяти. Таким образом:, если.

На интервале функция , поскольку левее любой точки этого интервала есть только одно значение случайной величины, которое появляется с вероятностью 0,5. Кроме того, сюда же следует отнести точку, так как: – очень хорошо осознайте этот момент!

Таким образом, если, то .

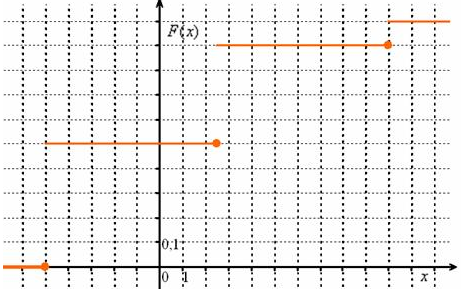
Далее рассматриваем промежуток . строго левее любой точки этого промежутка находятся два выигрыша, поэтому:

И, наконец, если , то , ибо **все** значения случайной величины *X* лежат строго левее **любой** точки

Заметим, что функция характеризует вероятность, то она может принимать значения лишь из промежутка

Итак, функция распределения вероятностей ДСВ является кусочной и записывается в виде:

График данной функции имеет разрывный «ступенчатый» вид:



Причём, функция или её график однозначно определяют сам закон распределения:

– в точке «**скачок» разрыва** равен 0,5(следим по чертежу) – и это в точности вероятность этого значения;

– в точке «скачок» составляет;

– и для выигрыша «высота ступеньки» равна .

Таким образом, функция распределения вероятностей – это ещё один способ задать случайную величину.

Пример. В денежной лотерее выпущено билетов. Разыгрывается один выигрыш в рублей и десять выигрышей по рублей. Найти ряд распределения, функцию распределения случайной величины  *–* стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Построить многоугольник распределения.

Решение: Случайная величина принимает значения вероятностями: *,,* .

Таким образом, ряд распределения имеет следующий вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Условие нормировки выполняется:

*.*

Найдем функцию распределения данной случайной величины *X*:

Если*,* то . Если *,* то. Действительно, может принять значение с вероятностью*.* Если *,* то.

Действительно, если удовлетворяет неравенству *,* то равно вероятности события , которое может быть осуществлено, когда примет значение с вероятностью или с вероятностью*.* Поскольку эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события равна сумме вероятностей . Если *,* то. Итак, функция распределения аналитически может быть записана следующим образом:

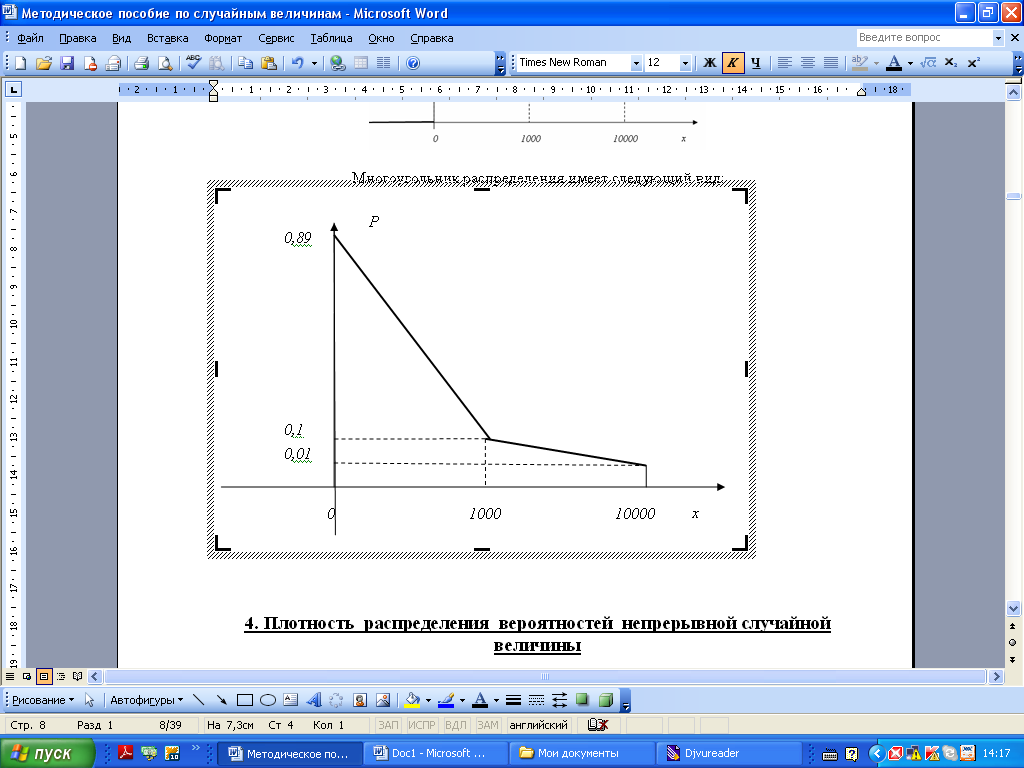
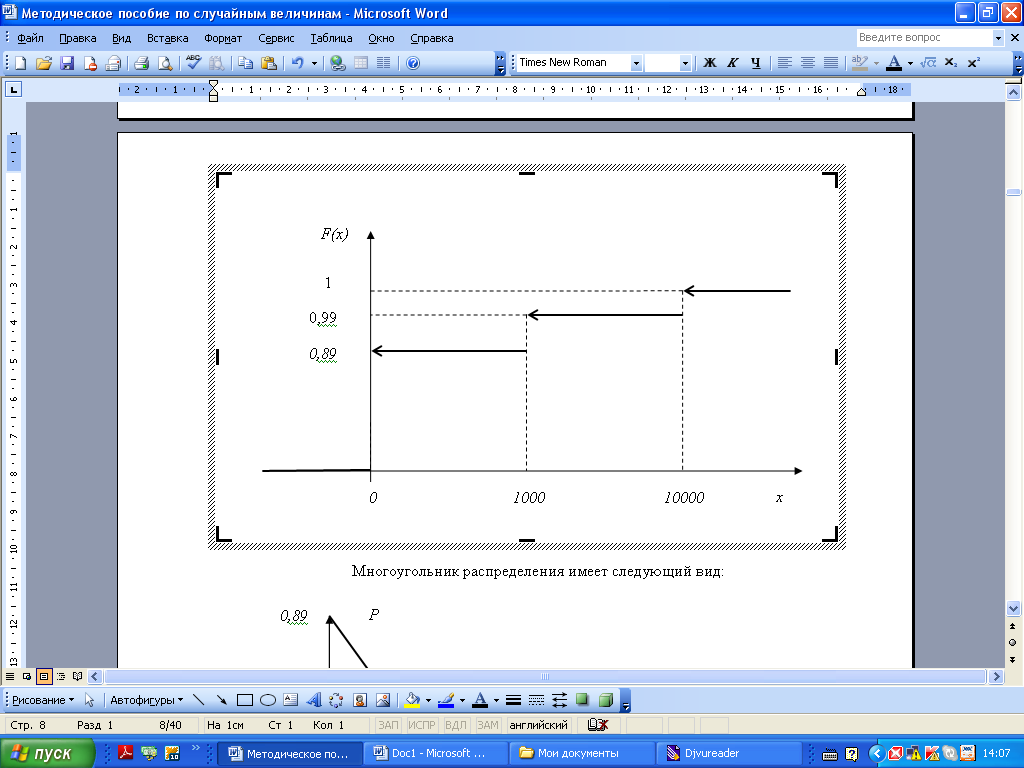


Рис. График функции распределения Рис. Многоугольник распределения

Пример. Дискретная случайная величина *X* имеет распределение вероятностей,

заданное таблицей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Требуется:

1) найти число ;

2) построить многоугольник распределения;

3) найти функцию распределения и построить ее график;

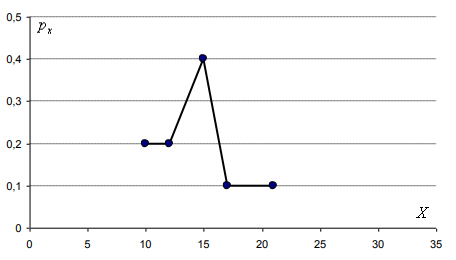
4) вычислить вероятность попадания случайной величины на промежутки

Решение:

1) Найдем неизвестное значение вероятности .

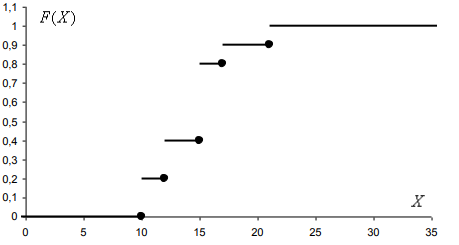
Случайная величина может принимать только 5 значений, поэтому:

2) Построим многоугольник распределения:



3) Найдем функцию распределения и построим ее график:

Выполним чертеж:



4) Вычислим вероятность попадания случайной величины *X* на промежутки:

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1.** Возможные значения случайной величины таковы: , Известны вероятности первых двух возможных значений: Найти вероятность **.**

**Задание 2.** Дискретная случайная величина *Х* задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**Задание 3.** В лотерее среди 100 билетов 5 с выигрышем 1000 руб., 15 – 100 руб., 25 – 10 руб., остальные по 0. Найти закон распределения случайной величины *Х* – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

**Задание 4.** Дискретная случайная величина *Х* имеет закон распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Чему равна вероятность ? Построить многоугольник распределения.

**Задание 5**. Дискретная случайная величина Х задана законом распределения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Найти функцию распределения и построить её график.

**Задание 6**. Дискретная случайная величина *X*задана законом распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Найти:

а)

б) найти функцию распределения и построить ее график;

в) вычислить вероятность попадания случайной величины на промежуток

**Контрольные вопросы:**

1. Что называется случайной величиной?
2. Какие случайные величины называются дискретными? непрерывными?
3. Что называется законом распределения с. в.?
4. Что называется функцией распределения с. в.?
5. Объясните, что такое "многоугольник распределения вероятностей". Как его построить?

***Практическое занятие № 12. «Решение задач с реальными дискретными случайными величинами»***

**Цель работы:**

Научиться вычислять вероятность дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

**Знания**:

1. Понятие случайной и дискретной величины.

2. Определение функции распределения случайной величины и ее свойства.

**Умения:**

1. Составление закона распределения случайной величины.

2. Вычисление вероятности случайной величины, заданной законом распределения.

**Порядок работы на занятии:**

1. Рассмотреть теоретический материал по теме.
2. Выполнить задание.
3. Выполненное задание покажите преподавателю.

**Содержание практической работы:**

**Задания для практической работы:**

**Задание 1**. Возможные значения случайной величины таковы: Известны вероятности первых двух возможных значений: Найти вероятность .

**Задание 2.** Дискретная случайная величина задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**Задание 3.** В лотерее 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 200 рублей и десять выигрышей по 100 рублей. Пусть *Х* – величина возможного выигрыша для человека, имеющего один билет. Составить закон распределения этой случайной величины *Х*.

**Задание 4.** Два стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна ; вторым Составить закон распределения числа попаданий в мишень.

**Задание 5.** Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Построить функцию распределения этой случайной величины и ее график.

**Задание 6.** Задан закон распределения дискретной случайной величины ***Х***:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Найти функцию распределения и построить ее график.

**Задание 7.** Монета брошена 2 раза. Записать закон распределения СЛ вел Х – числа появления герба. Найти функцию распределения и построить ее график.

**Задание 8.** Найти значение , функцию распределения дискретной случайной величины *Х* – температурной кривой за сутки , заданной рядом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 0,1 |

Построить график.

**Задание 9.** В библиотеке выдают учебную литературу. Вероятность того, что отдельный студент получит учебник по математике, равна 0,8, статистике-0,6,макроэкономике - 0,4. Составить закон распределения случайной величины *X*-числа учебников, которые получит студент.

**Задание 10.** Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число гербов на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина *Х* – число выпадений гербов на обеих монетах. Записать закон распределения случайной величины *Х*.

**Задание 11**. Дискретная случайная величина *Х* имеет закон распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Чему равна вероятность Построить многоугольник распределения.

***Тема: «Характеристики случайной величины»***

**План:**

1. Характеристики случайных величин.

**На занятии вы узнаете:**

* Понятие математическое ожидание случайной величины, свойства математического ожидания,
* Понятие дисперсиислучайной величины, свойства дисперсии, среднеквадратическое отклонение, мода, медиана.

**Порядок работы на занятии:**

1. Прочитайте текст лекции или прослушайте лекцию преподавателя.
2. Законспектируйте лекцию.
3. Ответьте на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.

Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

**1.Характеристики случайных величин**

Числовые характеристики случайных величин количественно определяют различные свойства случайных величин. Они позволяет проводить сравнительный анализ случайных величин, давать оценку ожидаемым результатам опыта, находить связь и определять зависимость между различными случайными величинами и многое другое. К числовым характеристикам случайной величины относятся характеристики положения и характеристики разброса.

Из характеристик положения в теории вероятностей важнейшую роль играет **математическое ожидание** случайной величины, которое иногда называют просто **средним значением** случайной величины.

Рассмотрим дискретную случайную величину, имеющую возможные значения с вероятностями .

**Математическое ожидание для дискретной случайной величины** – сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений или среднее взвешенное значение случайной величины:

.

Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины *X*– количества выпавших на игральном кубике очков:

очка.

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то **среднее значение** выпавших очков будет близко к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе.

**Свойства математического ожидания**

1. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной:
2. Математическое ожидание от алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме математических ожиданий от слагаемых:
3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий от сомножителей:
4. Постоянный сомножитель можно вынести за знак математического ожидания:

Для вычисления математического ожидания непрерывной случайной величины используются формулы:

или

Пример. Случайная величина представлена законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  | 0.3 |

Определить математическое ожидание.

Решение:

По определению , следовательно, математическое ожидание будет равно:

.

**Модой** называют значение случайной величины, имеющее у дискретной величины наибольшую вероятность, а у непрерывной – наибольшую плотность вероятности.

Если кривая распределения имеет один максимум, то мода равна значению случайной величины, соответствующей этому максимуму. Такая кривая называется унимодальной (одномодальной). Если кривая распределения имеет два или несколько случайной величины одинаковых максимумов, то она соответственно называется двухмодульной, или многомодальной.

Пример. Распределение пациентов по палатам характеризуется следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер палаты |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Количество пациентов |  |  |  |  |  |  |  |  |

Определить моду данной случайной величины.

Решение:

В этом ряду распределения модой является палата, т.е. .

Пример. Найти моду непрерывной случайной величины, представленной функцией распределения:

Решение: По определению медианы непрерывной случайной величины, необходимо определить максимальное значение функции плотности вероятности, т.е. найти экстремум функции.

Находим производную и прораниваем ее к нулю:

.

Из последнего выражения получаем , следовательно .

Убедимся, что в точке действительно максимум, для этого найдем вторую производную:

.

Определим значение второй производной в точке:

.

Вторая производная в точке всегда меньше нуля, т.к. и , следовательно, в точке функция имеет максимум. Таким образом .

**Медианой случайной величины** называют такое ее значение , для которого функция распределения равна . Это означает, что вероятность случайной величины принять значение меньше медианы в точности равна вероятности этой величины принять значение, большее медианы.

Для непрерывной случайной величины медиана определяется из соотношения

Геометрически медиана представляет собой абсциссу точки, которая делит площадь, ограниченную кривой распределения пополам.

Для дискретной случайной величины необходимо расположить ее значения в порядке возрастания и в качестве медианы принять такое срединное значение, для которого выполняется условие:

Пример. Определить медиану: 1) Стаж пяти рабочих составил: , , , и лет. 2) Стаж работы шести рабочих составил , , , , и лет.

Решение:

В первом ряду медиана равна , т.е.

Дискретный упорядоченный ряд состоит из чётного числа членов, следовательно, медианой будет средняя арифметическая из двух смежных вариант, стоящих в центре ряда, это варианты и . Средняя арифметическая из этих значений и будет медианой ряда:

Наряду с характеристиками положения используются числовые характеристики, по которым судят о рассеивании случайной величины. К ним, в частности, относят дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

**Дисперсией**случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

или

Дисперсия непрерывной случайной величины определяется выражением:

.

Дисперсия характеризует рассеивание значений случайной величины, в окрестности ее математического ожидания. Само слово «дисперсия» означает рассеивание.

**Свойства дисперсии:**

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

3. Дисперсия суммы (разности) конечного числа независимых в совокупности случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

Пример. Найти дисперсию случайной величины , если известны дисперсии случайных величин *Х* и *Y*: .

Решение: Используя свойства дисперсии получим

Наряду с дисперсией в качестве меры рассеивания широко используется среднее квадратичное отклонение случайной величины.

**Средним квадратичным отклонением** случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

.

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию. Например, если выражается в метрах, то будет выражаться тоже в метрах, а – в квадратных метрах.

Пример. Дискретная случайная величина представлена законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Определить дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение:

Найдем сначала математическое ожидание:

Тогда дисперсия будет равна:

.

Находим среднее квадратическое отклонение:

Пример. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины, заданной функцией распределения:

Решение:

Найдем дифференциальную функцию распределения:

Определяем математическое ожидание:

.

Дисперсия непрерывной величины определяется выражением:

.

Подставляя численные значения, получаем:

Среднее квадратическое отклонение равно: .

Пример. Плотность вероятности случайной величинызадана выражением:

Найти:

1. постоянный параметр ,
2. функцию распределения
3. математическое ожидание
4. среднее квадратическое отклонение,
5. вероятность попадания  в ,

Решение: 1) Находим постоянный параметр

По свойству плотности вероятности

учитывая, что при и   , получим

После интегрирования и применения формулы Ньютона-Лейбница, получим уравнением относительно .

Окончательно имеем:

2) Функция распределения с плотностью распределения связаны формулой:

Так как только для то по свойствам имеет: при при Для

Окончательно получаем:

3) Для непрерывной случайной величины математическое ожидание рассчитывается по формуле:

В нашем случае:

так как вне

4) Сначала находим   по формуле:

Тогда найдем по формуле:

5) Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал  можно найти по формуле:

**Задания для самостоятельного решения:**

**Задание 1.**

а)Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, заданной законом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *Y*, заданной законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Задание 2.** Найти математическое ожидание и дисперсию по свойствам числовых характеристик и, используя результаты задания 1.

а) ; б)

**Задание 3.** Дан закон распределения, найти числовые характеристики

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Задание 4**. Найдите математическое ожидание дисперсию и среднее квадратичное отклонение .

***Вариант 1***.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

***Вариант 2***.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Задание 5.** Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения. Найти математическое ожидание произведения и .

***Вариант 1***.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

***Вариант 2***.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Задание 6.** Случайная величина задана плотностью распределения

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины *Х*.

**Задание 7.** Непрерывная случайная величина *X* задана плотностью распределения вероятностей и

Требуется определить:

1. Коэффициент
2. Функцию распределения
3. Найти математическое ожидание , дисперсию и среднее квадратическое отклонение
4. Найти вероятность того, что примет значение из интервала

**а)**

**б)**

**Контрольные вопросы:**

1. Какие числовые характеристики имеет дискретная случайная величина?
2. Какова интерпретация математического ожидания?
3. Какие Вам известны свойства математического ожидания?
4. Что называется дисперсией, средним квадратическим отклонением?
5. Какие Вы знаете свойства дисперсии?
6. Является ли математическое ожидание случайной величиной или нет?
7. Можно ли по результатам наблюдений за случайной величиной: а) составить закон ее распределения? б) найти её математическое ожидание?
8. Случайная величина принимает два значения 0 и 1. Чему равно её математическое ожидание?
9. Является ли дисперсия случайной величиной или нет?

**Список используемых источников**

*Основные источники:*

1. Пехлецкий, И.Д. Математика: учебник / И.Д. Пехлецкий. – Москва: Издательский центр «Академия», 2018. – 320 с.

*Дополнительные источники:*

1. Григорьев, В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2018. – 160 с.

*Интернет - ресурсы*

* Электронно-библиотечная система ZNANIUM.COM Режим доступа: http://www.znanium.com/
* Электронно-библиотечная система "ЮРАЙТ" Режим доступа http://www. biblio-online. ru
* Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru/
* Информационные, тренировочные и контрольные материалы. Режим доступа: http:// www. fcior. edu. ru.
* Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. Режимдоступа: http:// www. school-collection. edu. ru.