Министерство образования и науки Челябинской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**Методические рекомендации**

**по выполнению практических работ**

по учебной дисциплине

**«МАТЕМАТИКА»**

для студентов специальности

**23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей**

Челябинск, 2020

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методические рекомендации составлены в соответствии с утвержденной программой учебной дисциплины «Математика» для специальности 23.02.07 | ОДОБРЕНО  Предметной (цикловой)  комиссией ЕМД  протокол № \_\_\_  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2020 г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/ Макаренко О.И. | УТВЕРЖДАЮ  Зам. директора по НМР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Крашакова  «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2020 г. |

**Автор:** Макаренко О.И, преподаватель Южно-Уральского государственного технического колледжа

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по специальности **23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей.**

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся формируют элементы компетенций будущих специалистов: систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и формируют профессиональные умения.

Методические рекомендации предназначены для организации выполнения практических работ по учебной дисциплине «Математика».

Программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 12 практических работ, направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей.

ПК 5.1. Планировать деятельность подразделения по техническому обслуживанию и ремонту систем, узлов и двигателей.

ПК 5.2. Организовывать материально-техническое обеспечение процесса по техническому обслуживанию и ремонту автотранспортных средств

ПК 6.4. Определять остаточный ресурс производственного оборудования.

***умений*:**

* анализировать сложные функции и строить их графики;
* выполнять действия над комплексными числами;
* вычислять значения геометрических величин;
* производить операции над матрицами и определителями;
* решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
* решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
* решать системы линейных уравнений различными методами.

**обобщение, систематизацию, углубление и закрепление *знаний*:**

* основных математических методов решения прикладных задач;
* основных понятий и методов математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
* основ интегрального и дифференциального исчисления;
* роли и места математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

В методических рекомендациях по выполнению практических работ содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая практическая работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий.

**Ход выполнения практической работы**

Практические работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

*Ход работы:*

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. В тетрадях для практических работ выполнить самостоятельную работу или решить номера, которые указаны в работе.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

**Критерии оценивания практических работ**

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, не искажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

**Перечень практических работ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ работы** | **Наименование практических работ** | **Кол-во**  **часов** |
|  | Действия с матрицами. Нахождение обратной матрицы. | 2 |
|  | Решение систем линейных уравнений методами линейной алгебры. | 2 |
|  | Решение СЛАУ различными методами. |  |
|  | Действия над комплексными числами. | 2 |
|  | Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований. |  |
|  | Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов. | 2 |
|  | Вычисление производных функций. Применение производной к решению практических задач. | 2 |
|  | Нахождение неопределённых интегралов различными методами. | 2 |
|  | Вычисление определенных интегралов. Применение определённого интеграла в практических задачах. |  |
|  | Выполнение операций над множествами. |  |
|  | Решение практических задач на определение вероятности события. | 2 |
|  | Решение задач с реальными дискретными случайными величинами. | 2 |
| **ВСЕГО** | | **24** |

**Практическая работа № 1**

***Действия с матрицами. Нахождение обратной матрицы.***

**Цель работы:**

Научиться выполнять операции над матрицами и вычислять обратную матрицу.

**Знания**:

1. Определения матрицы и операций над матрицами.

2. Понятие определителя матрицы.

3. Понятие обратной матрицы.

**Умения:**

1. Сложение, вычитание, транспонирование и умножение матриц.

2. Вычисление определителя матрицы.

3. Вычисление обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.

**Содержание работы:**

**Теоретические сведения к практической работе**

**Матрицей размером n×m** называется прямоугольная таблица, составленная из n m чисел и имеющая n строк и m столбцов. Числа αij, составляющие матрицу, называются элементами матрицы

*А*=*(αij)=* 

Матрицу *Аt* называют ***транспонированной*** по отношению к матрице *А,* если она получена из матрицы *А* заменой строк этой матрицы её столбцами, и, наоборот, столбцов строками.

.

Пример, , .

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все ее элементы, размещенные над главной диагональю (под ней), равны нулю, т.е.

* - верхняя треугольная матрица,*

* – нижняя треугольная матрица.*

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей.*

Матрица-строка , матрица-столбец .

**Операции над матрицами**.

1) Пусть матрицы и одинаковой размерности. Суммой матриц * и  называется матрица*  той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матрицы * и .*

 для всех  и .

2) *Разностью матриц  и * одинаковой размерности *называется матрица*  той же размерности, каждый элемент которой рамен разности соответствующих элементов матрицы * и .*

 для всех  и .

3) *Произведением матриц на число называется матрица*, каждый элемент которой равен .

4) Матрицу  можно умножить на матрицу  () лишь в то случае, когда число столбцов первой матрицы  равно число строк второй матрицы , т.е. . При этом каждый элемент матрицы-произведения  определяется так:

, для всех  и .

Т.е., элемент  равен сумме произведений элементов -й строки матрицы  на соответствующие элементы -го столбца матрицы .

Найти произведение матрицы-строки и матрицы-столбца:

**Пример 1.**

**1)**,

**2)**,

**3)**,

**4)**,

**5)**.

**Пример 2**

Для заданных матриц , ,  найти матрицы , , , , , , .

, , .

*Решение*

1.1) 

;

1.2) ;

1.3) 

;

1.4) 



;

1.5) 



.

Подчеркнем еще раз, что .

1.6) 



;

***Алгоритм вычисления обратной матрицы:***

1. Вычисляем определитель матрицы (если определитель равен нулю, то обратной матрицы не существует).
2. Находим все алгебраические дополнения матрицы.
3. Записываем обратную матрицу по формуле: 

***Пример*** *:* Для матрицы вычислим обратную:











**Задания для практической работы.**

***Задание 1.*** Для матриц , ,  вычислить:

**1)**, **2)**, **3)**,

**4)**, **5)**, **6)**, если

, , .

***Задание 2.*** Для матриц , ,  вычислить:

**1)**, **2)**,

**3)**, **4)**, если

, , .

***Задание 3.***Найти произведение матриц:

**1)**; **2)**;

**3)**; **4)**;

**5)**; **6)**;

**7)**; **8)**

***Задание 3.***Найти обратную матрицу:

1. **2)**

**Практическая работа № 2**

***Решение систем линейных уравнений методами линейной алгебры.***

**Цель работы:**

1. Научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.
2. Научиться решать системы линейных уравнений матричным методом.

**Знания**:

1. Понятие системы линейных уравнений.
2. Матричный метод, метод Крамера.

**Умения:**

1. Решение систем линейных уравнений матричным методом, методом Крамера.

**Содержание работы:**

Системой из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными называется система вида: (1)

1. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений:



где , 

**Пример:** Решить систему методом Крамера

Вычисляем определители системы:

,

,

,

.

Чтобы получить определитель , мы заменили в определителе первый столбец на столбец из свободных членов; заменяя в определителе  2-ой столбец на столбец из свободных членов, получаем ; аналогичным образом, заменяя в определителе  3-ий столбец на столбец из свободных членов, получаем . Решение системы:

.

*Ответ: (1; 0; -1)*

2. Запишем систему (I) в матричном виде , тогда решение ищем в виде:  (при условии, что матрица А- невырожденная, т.е. ).

**Пример:** Решить систему с помощью обратной матрицы

.

Обозначим 



Найдем матрицу 

, , ,

,  , ,

, , ,

, тогда 

*Ответ: (1; 0; -1)*

**Задания для практической работы.**

Решить системы линейных уравнений, а) матричным методом; б) методом Крамера:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 

10) 

**Практическая работа № 3**

***Решение СЛАУ различными методами***

**Цель работы:**

1. Научиться решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

**Знания**:

1. Понятие системы линейных уравнений.

2. Метод Гаусса.

**Умения:**

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

**Содержание работы:**

Системой из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными называется система вида: (1)

Процесс решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Гаусса состоит из двух этапов.

*Первый этап* (прямой ход метода) – система приводится к треугольному виду.

*Второй этап* (обратный ход) – неизвестные определяются последовательно, начиная с последнего неизвестного и заканчивая первым.

**Пример***:* Решить систему: 

Решение:

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

~~~

полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем, ранг матрицы системы также равен трем, r(A)=3 и число неизвестных n=3, следовательно, система определенная, т.е. имеет единственное решение.

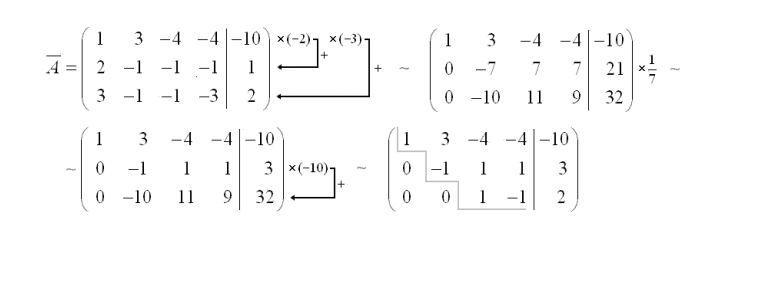
2. Записываем уравнение, используя последнюю строку приведённой матрицы: *z=1.*

Из второй строки: *5y-7z = -7,* т.к*. z=1, то y= 0.*Из третьей строки: *x- 2y +4z=3,* т.к*.z =1 y = 0,* то*x = 1.*

*Ответ: (-1,0,1)*

**Пример:** Решить систему: 

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:



полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем, ранг матрицы системы также равен трем, r(A)=3. Поскольку ранг рассмотренных матриц равен 3, а число неизвестных переменных 4, т. е. r=3< n= 4, то делаем вывод о неопределенности данной системы линейных уравнений (т.е. система имеет бесконечное множество решений).

Базисными переменными будут (соответствующие этим переменным коэффициенты находятся в уголках ступенек треугольной матрицы), а переменная будет свободной. Пусть , тогда

из третьей строки приведённой матрицы: 

из второй строки:

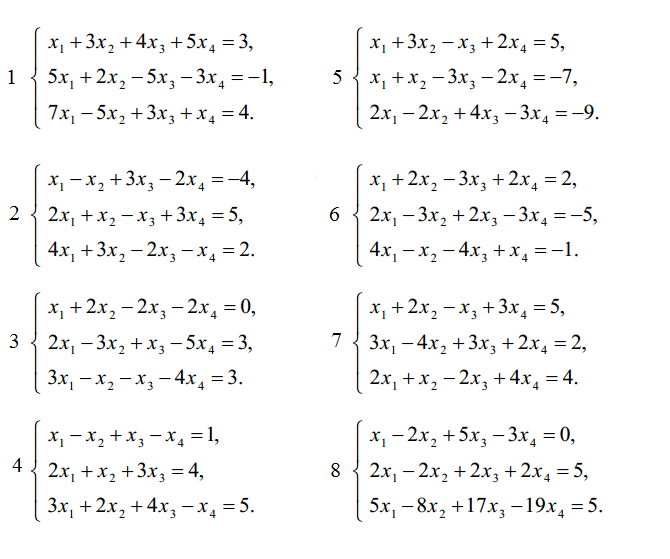
из первой строки:



Ответ: *(2С+1; 2С-1; С+2; С), СR*

**Задания для практической работы.**

Решить системы методом Гаусса:

****

**Практическая работа № 4**

***Действия над комплексными числами.***

**Цель работы:**

Научиться выполнять операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

**Знания**:

1. Понятие комплексного числа.

**Умения:**

1. Выполнение операций над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

2. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

**Содержание работы:**

Число вида , где - действительные числа, а*i*- мнимая единица, определяемая равенством: , называется *комплексным числом*. - действительная часть комплексного числа, - мнимая часть комплексного числа.

Модулем комплексного числа :

Числа и называются *сопряженными.*

Для того, чтобы *сложить или вычесть* два комплексных числа в алгебраической форме нужно соответственно сложить или вычесть их действительные и мнимые части.

**Пример***:* Найти сумму и разность чисел:

Для того, чтобы *умножить* два комплексных числа в алгебраической форме нужно перемножить их как многочлены и учесть при этом, что .

**Пример***:* Найти произведение чисел:

Для нахождения частного комплексных чисел и сначала числитель и знаменатель дроби умножают на сопряженное знаменателю число , а затем производят остальные действия.

**Пример**: Найти частное чисел:

=

Запись комплексного числа в виде называется алгебраической формой записи комплексного числа. Часто бывает удобна другая форма записи комплексного числа. Пусть и. Тогда по определению аргумента имеем:

|  |
| --- |
|  |

Отсюда получается

Такая форма называется тригонометрической формой записи комплексного числа. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

**Пример:** Записать число в тригонометрической форме.

Найдём модуль этого числа: Аргумент данного числа находится из системы

Значит, один из аргументов числа равен .

Получаем: .

Умножение, деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме определяются следующим образом:

если , , то

1) ;

2) ;

если , , то

3) ;

4) .

В ответ записываются главные значения аргумента полученного результата, заключенные в промежутке .

**Пример:** Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:

а) б) ; в) , если

а)

б)

в)

**Пример:** Найти

Представим в тригонометрической форме – 16:

Найдём модуль этого числа: Аргумент данного числа находится из системы

Значит, один из аргументов числа равен .

Получаем: .

Найдем корень: *=*

Найдем различные корни:

**Задания для практической работы.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 |
| 1. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел | | |
|  |  |  |
| 2. Вычислить | | |
|  |  |  |
| 3. Решить уравнение | | |
|  |  |  |
| 4. Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:  а) б) ; в) | | |
| *n=3* | *n=3* | *n=6* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5.Выполнить действия в тригонометрической форме и представить результат в тригонометрической и алгебраической формах | | |
|  |  |  |
| 6. Найти значения корней | | |
|  |  |  |

**Практическая работа № 5**

***Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований.***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться строить графики с помощью геометрических преобразований.

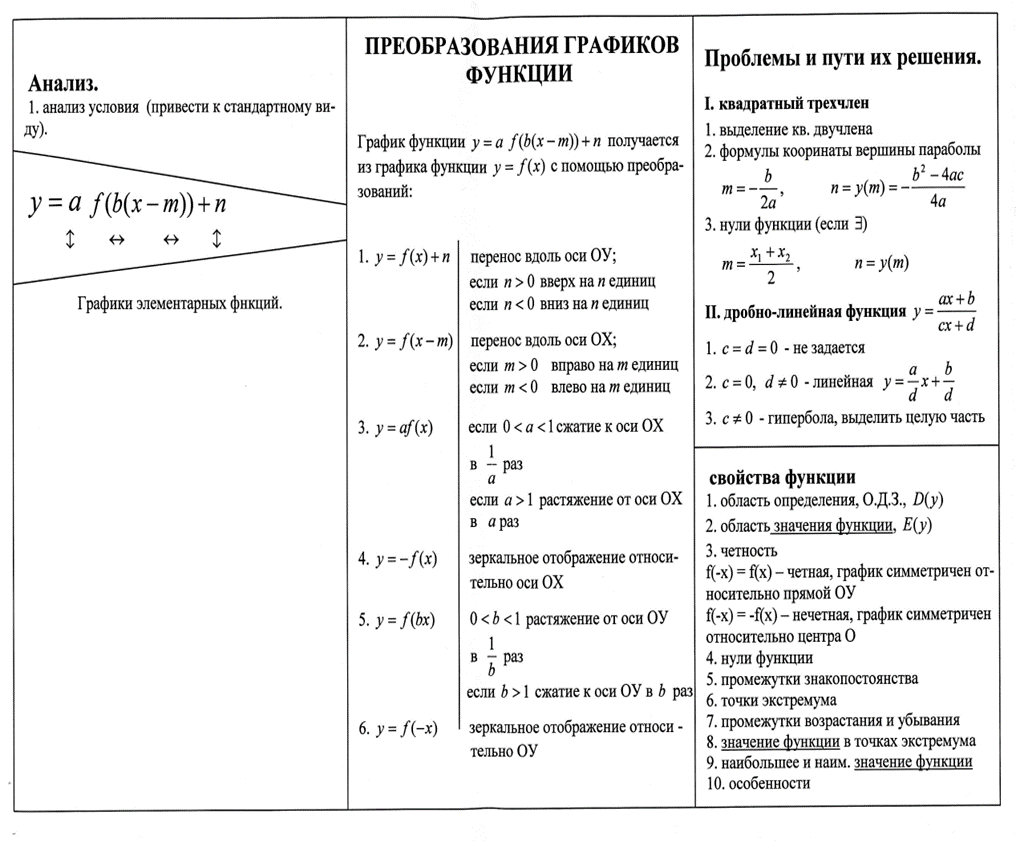
**Знания**:

1. Растяжение и сжатие, параллельный перенос, симметричное отображение относительно осей координат графиков функций.

**Умения:**

1. Преобразование графиков функций.

**Содержание работы:**

******

**Задания для практической работы:**

Построить с помощью простейших геометрических преобразований функцию:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 Уровень | 2 уровень | 3 уровень |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Практическая работа № 6**

***Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять пределы с помощью замечательных пределов.

**Знания**:

1. Определения предела функции.

2. Формулы первого и второго замечательных пределов.

**Умения:**

1. Вычисление пределов функций с помощью замечательных пределов.

**Содержание работы:**

***I-ый замечательный предел и основные эквивалентности:***

При ***х→0*** имеют место следующие неопределённости:

**Примеры:**

***II -ой замечательный предел***

**Примеры:**

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Вариант 1* | *Вариант 2* | *Вариант 3* |
| **«3»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| **«4»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) |  |  |
| **«5»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) |  |

**Практическая работа № 7**

***Вычисление производных функций. Применение производной к решению практических задач.***

**Цель работы:**

Проверить умения нахождения производной функции и научиться применять ее для решения практических задач.

**Знания**:

1. Определение производной и её свойства.

2. Понятие сложной функции.

3. Формула вычисления производной сложной функции.

**Умения:**

1. Вычисление производной заданной функции.

2. Вычисление производной сложной функции

**Содержание работы:**

***Таблица производных основных элементарных функций:***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

***Основные правила нахождения производной:***

; ; ; ; ; .

***Производная сложной функции***

Если  и , то- сложная функции, тогда её производная вычисляется по формуле, то есть . Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: *производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.*

**Механический смысл производной:** скорость есть первая производная пути по времени, т.е. .

**Геометрический смысл производной:** тангенс угла наклона касательной к графику функции  равен первой производной этой функции , вычисленной в точке касания, т.е. 

Уравнение касательной к графику функции в точке :



**Примеры:**

***Пример 1***: 

***Решение:***

+



***Пример 2***: 

***Решение:***

***Пример 3***: 

***Решение:***



***Пример 3.***Найти производную сложной функции:*.*

***Решение:*** Положим , где получим:

***Пример 4***. .Найти производную сложной функции:*.*

***Решение:*** Положим , получим:

**Задания для практической работы:**

**Задание 1:** Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные элементарных функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. | а) ;  б) ;  в) . | 4. | а);  б) ;  в) . |
| 2. | а) ;  б) ;  в) . | 5. | а) ;  б) ;  в) . |
| 3. | а) ;  б) ;  в) . | 6. | а) ;  б) ;  в) . |

**Задание 2:** Вычислить производную сложной функции:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 7. | ; | 10. | ; |
| 8. | ; | 11. | ; |
| 9. | ; | 12. | ; |

**Задание 3:** Вычислите производную сложной функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 13. | ; | 16. | ; |
| 14. | ; | 17. | ; |
| 15. | ; | 18. | ; |

**Задание 4:** Вычислите производную сложной функции:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 19. | ; | 22. | ; |
| 20. | ; | 23. | ; |
| 21. | ; | 24. | ; |

**Задание5:** Найдите угол, который образует с положительным лучом оси абсцисс касательная к графику функции:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 25. | в точке . | 28. | в точке . |
| 26. | в точке . | 29. | *у* =  в точке *х* = 0. |
| 27. | в точке . | 30. | *у* =  в точке *х* = 7. |

**Практическая работа № 8**

**Нахождение неопределённых интегралов различными методами.**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить неопределенный интеграл с помощью замены переменных.

**Знания**:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

**Умения:**

1. Вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования.

2. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменной

**Содержание работы:**

***Таблица интегралов***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1.  2.  3.  4.  5.  6. | 7.  8.  9.  10.  11.  12. | 13.  14.  15.  16. |

**Непосредственное интегрирование** – это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов. Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

* 1. деление числителя на знаменатель почленно;
  2. применение формул сокращенного умножения;
  3. применение тригонометрических тождеств.

**Пример 1**. Найти интеграл 

Решение*.*



**Пример 2.** Найти интеграл 

Решение. Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель.



**Пример 3**. Найти интеграл 

Решение**.** Возводим в куб и интегрируем каждое слагаемое.





**Пример 4***.* Найти интеграл 

Решение**.** Разлагаем подынтегральную дробь на две слагаемых дроби, деля числитель почленно на знаменатель.



**Пример 5**.Найти интеграл 

Решение**.** Выделим в неправильной дроби целую часть и правильную дробь.





**Метод замены переменной (метод подстановки)**

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегри­рования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого ме­тода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный инте­грал сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегри­рованием.

**Пример 6.**Вычислить

Решение**.** Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

**Пример 7.** Вычислить

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

**Пример 8.** Вычислить

Решение**.** Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной

**Задания для практической работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Вариант 1* | *Вариант 2* | *Вариант 3* |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Практическая работа № 9**

***Вычисление определенных интегралов. Применение определённого интеграла в практических задачах.***

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять определенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить определенный интеграл с помощью замены переменных и применять его для вычисления площади криволинейной трапеции.

**Знания**:

1. Понятие определённого интеграла, его основных свойств.

2. Понятие криволинейной трапеции.

**Умения:**

1. Вычисление определённых интегралов методом непосредственного интегрирования.

2. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменной.

### Теоретические сведения.

Определённый интеграл вычисляется с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

**Пример 1**

Вычислите определенный интеграл .

Решение:



**Пример 2**

Вычислите определенный интеграл .

Решение:

.

**Пример 3**

Вычислите определенный интеграл .

Решение:

.

**Пример 4**

Вычислите определенный интеграл .

Решение:

.

*Интегрирование заменой переменной (подстановкой).*

Пусть для интеграла от непрерывной функции сделана подстановка x = ϕ(t).

Если: 1) функция x = ϕ(t) и ее производная х/ = ϕ/(t) непрерывны при t∈[α;β];

2) множеством значений функции x = ϕ(t) при t∈[α;β] является отрезок [a;b]

3) ϕ(α) = a иϕ(β) = b, то

Отметим, что: 1) При вычислении определённого интеграла методом замены переменной возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки x = ϕ(t) применяют подстановку t = g(x);

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

*Алгоритм вычисления определенного интеграла методом подстановки:*

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4. Находят новые пределы интегрирования.

5. Производят замену под интегралом.

6. Находят полученный интеграл.

***Пример 5*.**Вычислить

Решение. Замена: t = x2 -16; dt= 2x dx; dx= .

Найдём новые пределы интегрирования. При x= 4, α= t(4) = 42 -16 =0; x= 5, β= t(5) = 52 -16 =9.

Получаем:

.

**Пример 6.** Вычислить

Решение. Замена: t =, .

t -1 =, 2x + 1 = (t – 1)2, , dx = (t -1)dt.

Найдём новые пределы интегрирования. При x= 0, α= t(0) = 2; x= 4, β=t(4)=4.

Получаем:

.

Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:

|  |  |
| --- | --- |
| y=y(x)  a  b  X  Y  **Рис.1** | * сверху - графиком непрерывной функции *y=y(x)* * снизу – осью OX (*y=0*) * слева – прямой *x=a* * справа – прямой*x=b* |

Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

 (1)

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

**Пример 7**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: , x=-1, x=2 и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

|  |  |
| --- | --- |
| **2**  **-1**  X    Y  Рис. 2 | Ответ: 6 кв.ед. |

Пусть y=f(x) – непрерывная функция при x[a, b], график которой расположен ниже оси OX (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 3  **y=f(x)**  X  Y  **a**  **b** | (2) |

**Пример 8**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 4  Y  X  2  3 | Ответ: 1/6 кв.ед. |

**Задания для практической работы.**

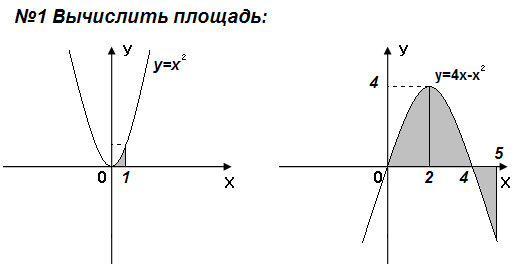
**Вариант 1.**

1. б). в). 

2. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) ; б)

3. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке:

****

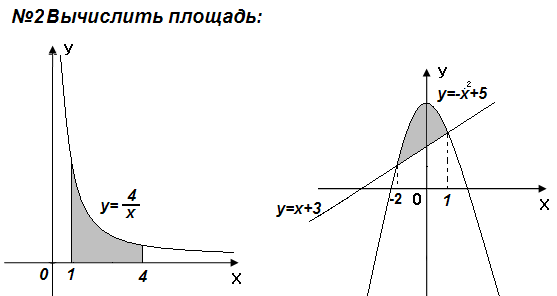
**Вариант 2.**

1.а). б).  в). .

2. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) ; б) .

3. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке:

****

**Практическая работа № 11**

***Решение практических задач на определение вероятности события.***

**Цель работы:**

Научиться вычислять вероятности случайных событий.

**Знания**:

1. Понятие случайного события.

2. Классическое определение вероятности.

**Умения:**

1. Вычисление вероятности случайного события с применением комбинаторных формул.

**Содержание работы:**

**1. Размещения**

Рассмотрим простейшие понятия, связанные с выбором и расположением некоторого множества объектов.

Подсчет числа способов, которыми можно совершить эти действия, часто производится при решении вероятностных задач.

*Определение.* Размещением из *n* элементов по *k*(*k*≤*n*) называется любое упорядоченное подмножество из *k* элементов множества, состоящего из *n* различных элементов.

**Пример.** Следующие последовательности цифр являются размещениями по 2 элемента из 3 элементов множества {1;2;3}: 12, 13, 23, 21, 31, 32.

Заметим, что размещения отличаются порядком входящих в них элементов и их составом. Размещения 12 и 21 содержат одинаковые цифры, но порядок их расположения различен. Поэтому эти размещения считаются разными.

Число различных размещений из *n* элементов по *k* обозначается и вычисляется по формуле: , гдеn! = 1∙2∙...∙(n- 1)∙n(читается «n– факториал»).

**2. Перестановки**

*Определение.* Перестановками из *n* элементов называются такие размещения из *n* элементов, которые различаются только расположением элементов.

Число перестановок из *n* элементов *Pn* вычисляется  по формуле: *Pn*=*n*!

**Пример***.* Сколькими способами могут встать в очередь 5 человек? Количество способов равно числу перестановок из 5 элементов, т.е. *P*5=5!=1∙2∙3∙4∙5=120.

**3. Сочетания**

*Определение.* Сочетаниями из *n* элементов по *k* называются такие размещения из *n* элементов по *k*, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число различных сочетаний из *n* элементов по *k* обозначается вычисляется по формуле: .

По определению 0!=1.

Для сочетаний справедливы следующие свойства:

1. C:\Users\Пользователь\Pictures\MP Navigator\636.gif
2. C:\Users\Пользователь\Pictures\MP Navigator\637.gif
3. C:\Users\Пользователь\Pictures\MP Navigator\638.gif
4. C:\Users\Пользователь\Pictures\MP Navigator\639.gif

**Пример***.* Имеются 5 цветков разного цвета. Для букета выбирается 3 цветка. Число различных букетов по 3 цветка из 5 равно: .

**4. События**

Познание действительности в естественных науках происходит в результате испытаний (эксперимента, наблюдений, опыта).

*Испытанием* или опытом называется осуществление какого-нибудь определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

*Случайным* называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).

Таким образом, событие рассматривается как результат испытания.

**Пример***.* Бросание монеты – это испытание. Появление орла при бросании – событие.

Наблюдаемые нами события различаются по степени возможности их появления и по характеру их взаимосвязи.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.

**Пример***.* Получение студентом положительной или отрицательной оценки на экзамене есть событие достоверное, если экзамен протекает согласно обычным правилам.

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в результате данного испытания.

**Пример***.* Извлечение из урны белого шара, в которой находятся лишь цветные (небелые) шары, есть событие невозможное. Отметим, что при других условиях опыта появления белого шара не исключается; таким образом, это событие невозможно лишь в условиях нашего опыта.

Далее случайные события будем обозначать большими латинскими буквами A,B,C... Достоверное событие обозначим буквой Ω, невозможное – Ø.

Два или несколько событий называются *равновозможными* в данном испытании, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным или менее возможным, чем другие.

**Пример***.* При одном бросании игральной кости появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков - все это события равновозможные. Предполагается, конечно, что игральная кость изготовлена из однородного материала и имеет правильную форму.

Два события называются *несовместными* в данном испытании, если появление одного из них исключает появление другого, и *совместными* в противном случае.

**Пример.** В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Берем на удачу одну деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. Эти события несовместные.

Несколько событий образуют *полную группу событий* в данном испытании, если в результате этого испытания обязательно наступит хотя бы одно из них.

**Пример***.* События из примера образуют полную группу равновозможных и попарно несовместных событий.

Два несовместных события, образующих полную группу событий в данном испытании, называются противоположными событиями.

Если одно из них обозначено через *A*, то другое принято обозначать через(читается «не*A*»).

**Пример***.* Попадание и промах при одном выстреле по цели - события противоположные.

**5. Классическое определение вероятности**

*Вероятность события*– численная мера возможности его наступления.

Событие *А* называется *благоприятствующим* событию *В*, если всякий раз, когда наступает событие *А*, наступает и событие *В*.

События *А*1,*А*2, ...,*Аn* образуют *схему случаев*, если они:

1) равновозможны;

2) попарно несовместны;

3) образуют полную группу.

В схеме случаев (и только в этой схеме) имеет место классическое определение вероятности *P*(*A*) события *А*. Здесь случаем называют каждое из событий, принадлежащих выделенной полной группе равновозможных и попарно несовместных событий.

Если *n*– число всех случаев в схеме, а *m*– число случаев, благоприятствующих событию *А*, то *вероятность события А* определяется равенством:

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице.

2. Вероятность невозможного события равна нулю.

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей0 ≤*P(A)*≤ 1.

**6. Операции над событиями. Теорема сложения вероятностей**

Суммой, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий (в одном и том же испытании).

**Пример.** Бросаются две игральные кости. Пусть событие *А* состоит в выпадении 4 очков на 1 кости, а событие *В*– в выпадении 5 очков на другой кости. События *А* и *В* совместны. Поэтому событие *А*+*В* состоит в выпадении 4 очков на первой кости, или 5 очков на второй кости, или 4 очков на первой кости и 5 очков на второй одновременно.

**Пример**. Событие *А*– выигрыш по 1 займу, событие *В*– выигрыш по 2 займу. Тогда событие *А+В*– выигрыш хотя бы по одному займу (возможно по двум сразу).

Произведение мили пересечением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий (в одном и том же испытании).

**Пример**. События *А* и *В* состоят в успешном прохождении I и II туров соответственно при поступлении в институт. Тогда событие *А×В* состоит в успешном прохождении обоих туров.

Теорема. Если события *Ai*(*i*= 1, 2, …,*n*) попарно несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий:

*Р*(*А*1+*А*2) =*Р*(*А*1) +*Р*(*А*2)

Если события*А*1и*А*2 совместны, то вероятность суммы двух совместных событий равна: *Р*(*А*1+*А*2) =*Р*(*А*1) +*Р*(*А*2) – Р(*А*1×*А*2).

**8. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей**

Условной вероятностью *Р(В*/*А*) называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже наступило.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

*Р(А*∙*В) = Р(А*)∙Р(*В*/*А*).

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого, т.е. *Р(А) = Р(А/В*)

Если события *А* и *В* независимы, то *Р(А*∙*В) = Р(А*)∙*Р(В*).

**Задания для практической работы:**

*1.* В коробке находятся *m+2* синих, *n+3* красных и *2n+1* зеленых карандашей. Одновременно вынимают *m+3n+2* карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет *m+1* синих и *n+1* красных.

2. В первой урне находятся *m+2* шаров белого и *n* шаров черного цвета, во второй — *m+n* белого и *m* синего, в третьей — *n+3* белого и *m+1* красного цвета. Из первой и второй урны наудачу извлекают по одному шару и кладут в третью. После этого из третьей вынимают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень при одном выстреле равна . Производится *n+4* выстрела. Найти вероятность того, что он промахнется не более двух раз.

4. Каждый избиратель независимо от остальных избирателей, отдаёт свой голос за кандидата А с вероятностью 0,1(m+n) и за кандидата В – с вероятностью 1-0,1(m+n). Оценить вероятность того, что в результате голосования на избирательном участке (5000 избирателей) один из

кандидатов опередит другого:

а) ровно на 1900 голосов; б) не менее, чем на 1900 голосов

Таблица 1 (выбор параметра *т*)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *т* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Таблица 2 (выбор параметра *п* )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| В | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | **7** | 8 | 9 |
| *п* | 3 | 5 | 4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 1 | 3 | 2 |

**Практическая работа № 12**

***Решение задач с реальными дискретными случайными величинами***

**Цель работы:**

Формирование умений находить характеристики дискретных случайных величин.

**Знания**:

1. Понятие дискретной случайной величины.

2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

**Умения:**

1. Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины.

**Содержание работы:**

***Дискретной*** называют случайную величину, значения которой изменяются не плавно, а скачками, т.е. могут принимать только некоторые заранее определённые значения. Например, денежный выигрыш в какой-нибудь лотерее, или количество очков при бросании игральной кости, или число появления события при нескольких испытаниях. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (счётным множеством). Для сравнения - непрерывная случайная величина может принимать любые значения из некоторого числового промежутка: например, температура воздуха в определённый день, вес ребёнка в каком-либо возрасте, и т.д.

***Закон распределения*** дискретной случайной величины представляет собой перечень всех её возможных значений и соответствующих вероятностей. Сумма всех вероятностей Σpi = 1. Закон распределения также может быть задан аналитически (формулой) и графически (многоугольником распределения, соединяющим точки (xi; pi)

***Функция распределения*** случайной величины - это вероятность того, что случайная величина (назовём её ξ) примет значение меньшее, чем конкретное числовое значение x:F(X) = P(ξ < X).Для дискретной случайной величины функция распределения вычисляется для каждого значения как сумма вероятностей, соответствующих всем предшествующим значениям случайной величины. Ниже будет приведён пример, разъясняющий смысл сказанного.

**Числовые характеристики дискретных случайных величин**

***Математическое ожидание*** дискретной случайной величины есть сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности:

M(X) = x1p1 + x2p2 + ... + xnpn

**Свойства математического ожидания.**

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой величине: М(С) = С

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: М(СХ) = С·М(Х).

3) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

М(Х1 + Х2 + …+ Хn) = М(Х1) + М(Х2) + ... + М(Хn)

4) Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

М(Х1 · Х2 · ... · Хn) = М(Х1) · М(Х2) · ... · М(Хn)

***Дисперсия*** дискретной случайной величины есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

D(X) = (x1 - M(X))2p1 + (x2 - M(X))2p2 + ... + (xn- M(X))2pn = x21p1 + x22p2 + ... + x2npn - [M(X)]2

**Свойства дисперсии.**

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю: D(С) = 0

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: D(СХ) = С2 · D(Х)

3) Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых: D(Х1 ± Х2 ± ... ± Хn) = D(Х1) + D(Х2) + ... + D(Хn)

***Среднее квадратическое отклонение*** дискретной случайной величины, оно же стандартное отклонение или среднее квадратичное отклонение есть корень квадратный из дисперсии:

σ(X) = √D(X)

***Мода*** дискретной случайной величины Mo(X) - это значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность. На многоугольнике распределения мода - это абсцисса самой высокой точки. Бывает, что распределение имеет не одну моду.

**Пример 1.**

Составить самим закон распределения случайной дискретной величины X, которая может принимать 5 значений. Найти:

– её числовые характеристики

- функцию распределения

– вероятность того, что X примет значение меньше M(X);

– вероятность того, что X примет значение больше 0,5 M(X).

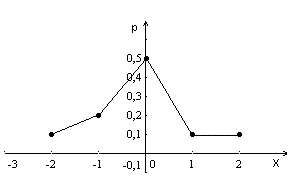
[Решение](http://natalymath.narod.ru/theory_of_ver2.html)

http://natalymath.narod.ru/images/theory2/2t6.png

Закон распределения дискретной случайной величины X – это перечень всех возможных значений с.в. X , которые она может принимать, и соответствующих вероятностей. Сумма всех вероятностей должна равняться 1.

Проверка: 0,1 + 0,2 + 0,5 + 0,1 + 0,1 = 1

Многоугольник распределения:



Математическое ожидание:

M(X) = -2·0,1 - 1·0,2 + 0·0,5 + 1·0,1 + 2·0,1 = -0,1

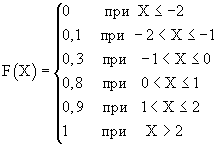
Дисперсия – это математическое ожидание квадрата отклонений значений случайной величины X от её математического ожидания:

D(X) = (-2 + 0,1)2·0,1 + (- 1 + 0,1)2·0,2 + (0 + 0,1)2·0,5 + (1 + 0,1)2·0,1 + (2 + 0,1)2·0,1 = 1,09

или D(X) = (-2)2·0,1 + (-1)2·0,2 + 02·0,5 + 12·0,1 + 22·0,1 - (-0,1)2 = 1,1 - 0,01 = 1,09

Среднее квадратическое отклонение – это корень квадратный из дисперсии:

σ = √1,09 ≈ 1,044



Функция распределения – это вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем какое – либо числовое значение x:

F(X) = P(X < x)

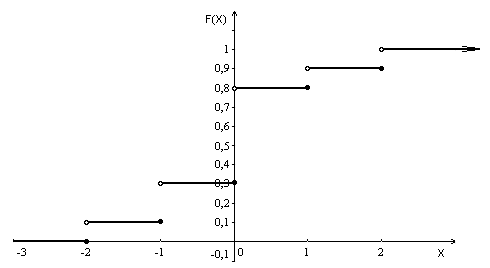
Значения определяем суммированием вероятностей.

Функция распределения – функция неубывающая. Она принимает значения в интервале от 0 до 1.

P(X < -0,1) = F(-0,1) = 0,3

P(X > -0,05) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,5 + 0,1 + 0,1 = 0,7

График функции распределения:



**Пример 2.**

M(X) = 5,6; D(X) = 3,04. Вычислить M(Y) и D(Y), если Y = 3x + 2.

[Решение](http://natalymath.narod.ru/theory_of_ver2.html) M(Y) = 3M(X) + 2 = 3 · 5,6 + 2 = 18,8

D(Y) = 32·D(X) + 0 = 9 · 3,04 = 27,36

**Задания для практической работы:**

1. Найти М[x] и D[x] и σ дискретной случайной величины Х – количества продаваемого товара в неделю, имеющей ряд распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 1 | 3 | 12 |
| pi | 0,2 | 0.1 | 0.3 | 0.4 |

2. Найти значение α, функцию распределения дискретной случайной величины Х – температурной кривой за сутки, заданной рядом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | -3 | -2 | -1 | 4 |
| pi | 0,2 | α | 0,3 | 0,1 |

Построить график.

3. Найти М[x], D[x] и σ, функцию распределения дискретной случайной величины Х – величины прибыли в тыс. у.е. за месяц, с рядом распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 5 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| pi | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,4 | 0,2 |

Построить график.

**Список литературы**

*Основные источники:*

Пехлецкий, И.Д. Математика. – М.: ОИЦ «Академия», 2017.

*Дополнительные источники:*

Григорьев В.П., Сабурова Т.Н., Сборник задач по высшей математике. – М.: ОИЦ «Академия», 2017.

*Интернет - ресурсы*

* Электронно-библиотечная система ZNANIUM.COM Режим доступа: http://www.znanium.com/
* Электронно-библиотечная система "ЮРАЙТ" Режим доступа http://www. biblio-online. ru
* Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru/
* Информационные, тренировочные и контрольные материалы. Режим доступа: http:// www. fcior. edu. ru.
* Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. Режимдоступа: http:// www. school-collection. edu. ru.