Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

по учебной дисциплине

«Математика»

для специальности 15.02.01

Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования

(по отраслям)

(базовая подготовка)

г. Челябинск, 2019г.

Методические рекомендации составлены в соответствии с программой учебной дисциплины «Математика», для специальности 15.02.01. Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям) (базовая подготовка)	ОДОБРЕНО Предметной (цикловой) комиссией протокол № ______ от «__»__________2019 г. Председатель ПЦК _________О.И.Макаренко	УТВЕРЖДАЮ Заместитель директора по НМР _________ Т.Ю. Крашакова «___»__________2019 г.

Автор: Чернова И.И. - преподаватель ГБПОУ «Южно-Уральский государственный технический колледж»

АКТ СОГЛАСОВАНИЯ

Методических рекомендаций по выполнению самостоятельных работ по дисциплине «Математика» для специальности
15.02.01. Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям) (базовая подготовка), разработанных преподавателем Южно-Уральского государственного технического колледжа Черновой И.И.

Учебная дисциплина «Математика» является частью программы подготовки специалистов среднего звена согласно ФГОС по специальности СПО 15.02.01. Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям) (базовая подготовка), «Математика» относится к математическому и общему естественнонаучному циклу и определяет общий объем знаний и умений, составляющих базу профессиональных компетенций.

Практическая направленность дисциплины реализуется через выполнение самостоятельных работ, на проведение которых программой отводится 68 часа.

Методические рекомендации по выполнению самостоятельных работ разработаны с учетом требований работодателя к подготовке специалистов среднего звена по данной специальности и включают в себя работу с различными источниками информации, доказательство теорем, выполнение индивидуальных расчетных и графических работ. Самостоятельные работы составлены с учетом требований работодателей к владению специалистами среднего звена умением выполнять необходимые измерения и связанные с ними расчеты; применять математические методы для решения профессиональных задач.

Самостоятельные работы направлены на формирование компетентности специалистов в осуществлении поиска и использования информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития, в использовании информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности, в работе с коллективом, руководством, потребителями.

Методические рекомендации по выполнению самостоятельных работ могут быть использованы для работы в учреждениях среднего профессионального образования.

Технический директор
ЗАО «ВММ-2» Р.Г. Девальд

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов – это учебная деятельность студента, выполняемая во внеаудиторное время без непосредственного участия преподавателя, но по его заданию и под его руководством, направленная на формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствование и самореализацию.

Целью самостоятельной работы студентов является:

-систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практическое их применение;

-развитие аналитических способностей и логического мышления;

-овладение навыками работы с нормативной и справочной литературой;

-развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

-овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;

Для успешности организации самостоятельной работы необходимы следующие условия:

– мотивация получения знаний и готовность студентов к самостоятельной деятельности;

– наличие и доступность всего необходимого учебно-методического и справочного материала;

– система регулярного контроля качества выполненной самостоятельной работы;

– консультационная помощь преподавателя.

Для внеаудиторной работы студентов по учебной дисциплине «Математика» следующие формы самостоятельной работы:

- самостоятельная работа с учебной литературой и интернет ресурсами;

- заполнение таблиц и составление схем;
- решение расчетных задач;
- подготовка рефератов;
- выполнение презентаций

В результате выполнения самостоятельной работы студент должен сформировать: *элементы следующих компетенций*:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ОК 10. Исполнять воинскую обязанность, в том числе с применением полученных профессиональных знаний (для юношей).

ПК 1.1. Руководить работами, связанными с применением грузоподъёмных механизмов, при монтаже и ремонте промышленного оборудования.

ПК 1.2. Проводить контроль работ по монтажу и ремонту промышленного оборудования с использованием контрольно-измерительных приборов.

ПК 1.3. Участвовать в пусконаладочных работах и испытаниях промышленного оборудования после ремонта и монтажа.

ПК 1.4. Выбирать методы восстановления деталей и участвовать в процессе их изготовления.

ПК 1.5. Составлять документацию для проведения работ по монтажу и ремонту промышленного оборудования.

умения:
анализировать сложные функции и строить их графики;

–выполнять действия над комплексными числами;

–вычислять значения геометрических величин;

–производить операции над матрицами и определителями;

–решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;

–решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;

–решать системы линейных уравнений различными методами;

знания:
– основные математические методы решения прикладных задач;
– основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
– основы интегрального и дифференциального исчисления;
– роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Общий объём времени, отведённого на самостоятельную работу составляет 68 часов.

Критерии оценивания:

- оценка «отлично» выставляется обучающемуся за работу, выполненную безошибочно, в полном объеме с учетом рациональности выбранных решений;

- оценка «хорошо» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в полном объеме с недочетами;
- оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (не менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы);
- оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы).

Тематический план

Номер темы	Название ВСР	Количество часов
1.1.	Выполнение расчетных работ по теме «Операции над матрицами», «Решение матричных уравнений», «Вычисление определителей второго и третьего порядка»	8
1.2.	Выполнение индивидуальных заданий по темам «Применение метода Жордана-Гаусса для решения систем линейных уравнений», «Решение систем линейных уравнений матричным методом».	6
1.3.	Выполнение индивидуальных заданий по темам: «Показательная форма комплексных чисел», «Действия над комплексными числами».	5
2.1.	Выполнение расчетных работ по темам: «Векторное произведение векторов», «Смешанное произведение векторов»	5
2.2.	Выполнение расчетной работы по теме: «Уравнения кривых 2-го порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола». Выполнение индивидуального задания по теме: «Алгоритм построения кривых второго порядка.»	4
3.1.	Выполнить расчётную работу по теме: «Раскрытие неопределённостей», Подготовить реферат по теме: «Точки разрыва, их классификация»	7
3.2.	Выполнение расчетных работ по теме: «Производные и дифференциалы высших порядков» Выполнение расчётно-графического задания заданий по теме: «Исследование и построение графиков функций»	9
3.3.	Выполнение расчетных работ по темам: «Вычисление неопределенных интегралов заменой переменной, по частям», «Решение задач с использованием разных методов интегрирования».	8
3.4.	Подготовить реферат по теме: «Прикладных задач с использованием дифференциального исчисления».	3
3.5.	Выполнение индивидуальных заданий по темам: «Решение систем линейных однородных уравнений первого порядка», «Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными.», «Решение систем линейных однородных уравнений высших порядков.», «Метод неопределенных коэффициентов»	8

4.1.	Выполнение расчетной работы по теме: « Применение комбинаторики для решения профессиональных задач»	2
4.2.	Выполнение расчетной работы по теме: «Решение задач на вычисление вероятностей с использованием элементов математической статистики».	3
ИТОГО		68

РАЗДЕЛ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Тема 1.1 Матрицы и определители

1.1.1. Операции над матрицами

Цель работы: научиться выполнять действия над матрицами.

Задание: Выполните действия над матрицами

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Действия над матрицами.

1. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового порядка называют матрицу

$C = (c_{ij})$ такого же порядка, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B то есть $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

2. Аналогично, разностью двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ и одинакового порядка называют матрицу $C = (c_{ij})$ такого же порядка, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц A и B то есть $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

<u>Пример 1:</u>

Найдите сумму и разность матриц A и B, если $A = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 6 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: Найдём сумму двух заданных матриц

$$A + B = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & 2 + 8 \\ -3 + (-3) & 4 + 6 \\ 0 + 10 & 7 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix};$$

Найдём разность двух заданных матриц

$$A - B = \begin{pmatrix} 12-(-4) & 2-8 \\ -3-(-3) & 4-6 \\ 0-10 & 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ 0 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матрицы на число

$1 \cdot A = A \qquad 0 \cdot A = 0$

$m \cdot (k \cdot A) = (m \cdot k) \cdot A \qquad (m+k) \cdot A = m \cdot A + k \cdot A \qquad k \cdot (A+B) = k \cdot A + k \cdot B$

Пример 2:

Найдите произведение $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Решение: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. Умножение матриц

Произведение матрицы $A_{m\cdot n}$ на матрицу $B_{n\cdot k}$ называется матрица $C_{m\cdot k}$ такая, что элемент матрицы С, стоящий i –ой строке и j-ом столбце, т.е. элемент C_{ij}, равен сумме произведений элементов i –ой строки матрицы А на соответствующие элементы i –ого столбца матрицы В.

Пример 3:

Найдите произведение матриц А и В, если $\mathrm{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B_{33} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

$\mathrm{A}_{23} \cdot \mathrm{B}_{33} =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}_{23} \cdot \mathrm{B}_{33} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Задания для самостоятельной работы.

1. Найдите произведение матриц А и В, если А=$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$, В=$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 0 \end{vmatrix}$;

2. Найдите обратную матрицу А$^{-1}$: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. Дано: $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) 3А+В б) АВ в)А$^{-1}$ г)А$^{-1}$А

Вопросы для самопроверки:

1. Какие операции можно производить с матрицами?
2. Алгоритм нахождения обратной матрицы?

1.1.2. Решение матричных уравнений

Цель работы: научиться решать матричные уравнения.

Задание: решите матричные уравнения

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Матричные уравнения имеют прямую аналогию с простыми алгебраическими уравнениями, в которых присутствует операция умножения. Например: $ax=b$, где x - неизвестное.

Матричным уравнением называется уравнение вида

$A \cdot X = B$ или $X \cdot A = B$,

где A и B - известные матрицы, X - неизвестная матрица, которую требуется найти.

Пример 1

Решить матричное уравнение, выполнить проверку

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - 2x = 3\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Как решить матричное уравнение?

Фактически нужно использовать алгоритм решения уравнения с числами.

В правой части умножаем каждый элемент матрицы на три, а матрицу левой части переносим направо со сменой знака:

$$-2x = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Выполним действия в правой части:

$$-2x = \begin{pmatrix} -3-1 & 3-(-3) \\ 0-8 & 12-0 \end{pmatrix}$$

$$-2x = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

Выразим x, для этого обе части уравнения умножим на $-\frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2}\cdot(-2x) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$x = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

Все числа матрицы делятся на 2, поэтому уместно избавиться от дроби. А заодно и от «минуса». Делим каждый элемент матрицы на –2:

$$x = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

Пример 2

Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Решение: Уравнение уже имеет вид $Ax = B,$ поэтому $x = \frac{B}{A}$ или

$$x = B \cdot A^{-1}$$

Из условия известны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, однако, обратной матрицы A^{-1} мы не знаем. Придётся её найти:

Обратную матрицу найдем по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{\text{т}}$, где $A^{\text{т}}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

$$|A| = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = 24 - 14 = 10$$

$M = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

$A_* = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений.

$A_*^T = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Таким образом, обратная матрица: $A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

На финише проводим матричное умножение и получаем решение:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 4 - 7 \cdot 6 & 8 \cdot 8 - 7 \cdot 2 \\ -2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 & -2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 50 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Пример 3

$$X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

Решение:

Пусть: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Тогда нам дано уравнение вида $xA = B$, следовательно $x = BA^{-1}$. Найдём A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1 \neq 0,\ A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -13 \\ 9 & -6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Проверка}: \begin{pmatrix} 18 & -13 \\ 9 & -6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\textit{Ответ}: X = \begin{pmatrix} 18 & -13 \\ 9 & -6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы.

Решите матричные уравнения:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $x \begin{pmatrix} 10 & 26 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$

e) $x \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 14 & -7 \\ 1 & 20 & -12 \end{pmatrix}$

Вопросы для самопроверки:

1. Сформулируйте алгоритм решения матричных уравнений

1.1.3. Вычисление определителей второго и третьего порядков

Цель работы: Совершенствование умений выполнять действия над матрицами, вычислять определители разными способами

Задание: Вычислите определители 3-го порядка с использованием свойств определителей

Ход работы

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Сложение матриц: Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковых размеров называется матрица $C = (c_{ij})$ тех же размеров, у которой

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначение: *C = A + B.*

Свойства сложения матриц: *A + B = B + A, (A + B) + C = A + (B + C),*

A + 0 = A, A + (-A) = 0, A, B, C.

Вычитание матриц : *A - B = A + (-B).*

Умножение матрицы на число: Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число α , называется матрица $C = (c_{ij})$ тех же размеров, у которой

$c_{ij} = a_{ij} \cdot \alpha,$ для всех i и j Обозначение: $C = \alpha A$

Умножение матриц: Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размером $m \times n$ на матрицу

$B = (b_{ij})$ размером $n \times p$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размером $m \times p$ у которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Обозначение: *C = AB.*

Свойства: $AE = EA = A$, $AO = OA = O$, $(AB)D = A(BD)$, $\alpha\,(AB) = (\alpha\,A)B = A(\alpha\,B)$, $(A + B)D=AD + BD$, $D(A + B) = DA + DB$ (при условии, что указанные операции имеют смысл).

Транспонирование матриц:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} => A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Свойства:

$(A^T)^T = A$, $(\alpha A)^T = \alpha A^T,$ $(A + B)^T = A^T + B^T,$ $(\mathrm{AB})^\mathrm{T} = \mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{B}^\mathrm{T}$

Обратная матрица: Матрица A^{-1} - обратная для матрицы A, если $\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E}$

Для квадратной матрицы A обратная существует тогда и только тогда, когда $detA \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

Где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Элементарные преобразования матрицы

Элементарными преобразованиями матрицы называют:

1) умножение какой-нибудь строки (столбца) на отличное от нуля число;

2) прибавление к какой-нибудь строке (столбцу) другой ее строки (столбца), умноженной на произвольное число;

3) перестановку местами любых двух строк (столбцов).

Вычисление обратной матрицы

Если с помощью элементарных преобразований строк квадратную матрицу A можно привести к единичной матрице E, то при таких же элементарных преобразованиях над матрицей E получим A^{-1} .

Пример:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(A \setminus E) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\text{Ко второй строке прибавляем первую, умноженную на 2.}}{\to} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\text{Вторую строку умножаем на } -1/2.}{\to}$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \end{array}\right] \underset{\text{К первой строке прибавляем вторую, умноженную на 3.}}{\to} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3/2 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Определители
В частности $n = 2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{I(2,1)} a_{12}a_{21} =$$

$$= (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

при $n = 3$

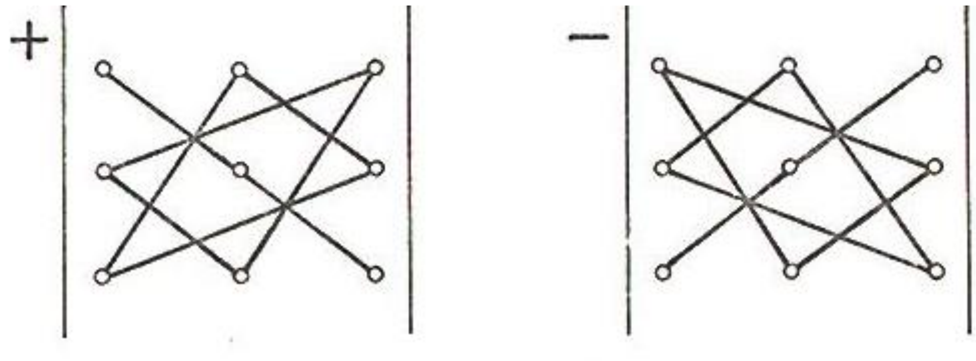
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} +$$

$$+(-1)^{I(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{I(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$+(-1)^{I(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{I(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} +$$

$$+(-1)^{I(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$



Задания для самостоятельной работы

Вычислите определители 3-го порядка с использованием свойств определителей:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

Вопросы для самопроверки

1. По какой формуле вычисляется определитель второго порядка?
2. По какой формуле вычисляется определитель третьего порядка?

Тема 1.2 Системы линейных уравнений

1.2.1. Применение метода Жордана-Гаусса для решения систем линейных уравнений

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом Жордана-Гаусса.

Задание: Решите системы уравнений методом Гаусса

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Метод Гаусса прекрасно подходит для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Он обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами:

1. Нет необходимости предварительно исследовать систему уравнений на совместность;
2. Методом Гаусса можно решать не только СЛАУ, в которых число уравнений совпадает с количеством неизвестных переменных и основная матрица системы невырожденная, но и системы уравнений, в которых число уравнений не совпадает с количеством неизвестных переменных или определитель основной матрицы равен нулю;
3. Метод Гаусса приводит к результату при сравнительно небольшом количестве вычислительных операций.

При решении систем уравнений методом Гаусса необходимо знать: ***Матрица системы*** *– это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных.*

Расширенная матрица системы *– это та же матрица системы плюс столбец свободных членов*

Элементарные преобразования:

a) **Строки** матрицы **можно переставлять** местами. Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует **удалить** из матрицы все эти строки кроме одной.

b) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует **удалить**. Нулевая строка – это строка, в которой *одни нули*.

c) Строку матрицы можно **умножить (разделить)** на любое число, отличное от нуля. Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

d) К строке матрицы можно **прибавить другую строку, умноженную на число**, отличное от нуля.

Пример 1

$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ Решить систему методом Гаусса

Решение:

1. Нужно записать *расширенную матрицу системы*:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right).$$

Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчёркивание для удобства оформления.

2. После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются *элементарными преобразованиями*.

3. Умножим первую строку на -2. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

4. Ко второй строке прибавляем первую строку, умноженную на -2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

5. Теперь первую строку можно разделить «обратно» на –2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Строка, которую ПРИБАВЛЯЛИ – не изменилась. Всегда меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯЮТ.

Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчётов примерно такой:

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ * & * & * \end{array}\right)$»

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу вверху умножаю на –2: $1 \cdot (-2) = -2$, и ко второй строке прибавляю первую: 2 + (–2) = 0. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & * & * \end{array}\right)$»

«Теперь второй столбец. Вверху –1 умножаю на –2: $-1\cdot(-2)=2$. Ко второй строке прибавляю первую: 1 + 2 = 3. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & * \end{array}\right)$»

«И третий столбец. Вверху –5 умножаю на –2: $-5\cdot(-2)=10$. Ко второй строке прибавляю первую: –7 + 10 = 3. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$»

Цель элементарных преобразований – привести матрицу к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется *трапециевидный вид* или *треугольный вид*.

Пример 2:

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$

Результат, к которому необходимо прийти в ходе решения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. Смотрим на левое верхнее число: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$

Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Устроит и –1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть!

Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Теперь первая строка останется неизменной до конца решения. Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно **ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2**:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \| & \| & \| & \| \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И **к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3**:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \| & \| & \| & \| \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов **последователен**

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ *&*&*&*\\ *&*&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&*&*&*\\ *&*&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&*&*\\ *&*&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&*\\ *&*&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ *&*&*&*\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&*&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&-2&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&-2&-28\end{array}\right)$$

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&-2&-28\end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-5&-1\\ 2&-1&3&13\\ 1&2&-1&9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 2&-1&3&13\\ 3&2&-5&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&-2&-28\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&1&-1&1\\ 0&2&1&14\end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&1&-1&1\\ 0&2&1&14\end{array}\right)$$

Для этого **к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-5&-1\\ 2&-1&3&13\\ 1&2&-1&9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 2&-1&3&13\\ 3&2&-5&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&-2&-28\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&1&-1&1\\ 0&2&1&14\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&1&-1&1\\ 0&0&3&12\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&1&-1&1\\ 0&0&1&4\end{array}\right)$$

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на –2 и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x+2y-z=9 \\ y-z=1 \\ z=4 \end{cases}$$

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z=4$

Смотрим на второе уравнение: $y-z=1$. Значение «зет» уже известно, таким образом:

$y-4=1$

$y=5$

И, наконец, первое уравнение: $x+2y-z=9$. «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:

$x+2\cdot 5-4=9$

$x+6=9$

$x=3$

Ответ: $x=3, y=5, z=4$

Задания для самостоятельной работы

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

Вопросы для самопроверки:

1) Какая матрица называется расширенной?
2) Назовите элементы преобразований при решении СЛАУ методом Гаусса

1.2.2. Решение систем линейных уравнений матричным методом

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений матричным методом

Задание: Решите СЛАУ матричным способом

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Матричный метод решения СЛАУ: пример решения с помощью обратной матрицы

Метод обратной матрицы — это метод, использующийся при решении СЛАУ в том случае, если число неизвестных равняется числу уравнений.

Если матрица A невырождена, то тогда с помощью операций над матрицами выразим неизвестную матрицу X . Операция деления на множестве матриц заменена умножением на обратную матрицу, поэтому до множим последнее равенство на матрицу A^{-1} слева:

$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow \; EX = A^{-1}B \Rightarrow$

$X = A^{-1}B$

Поэтому, чтобы найти неизвестную матрицу X надо найти обратную матрицу к матрице системы и умножить ее справа на вектор-столбец свободных коэффициентов.

<u>Пример 1</u>

Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ матричным методом.

Решение.

Выпишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицу правых частей $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу для матрицы системы. Для матрицы второго порядка обратную можно находить по следующему алгоритму:

1) матрица должна быть невырождена, то есть ее определитель не должен равняться нулю: $|A| = 1$;

2) элементы, стоящие на главной диагонали меняем местами, а у элементов побочной диагонали меняем знак на противоположный и делим полученные элементы на определитель матрицы. Итак, получаем, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Две матрицы одного размера равны, если равны их соответствующие элементы, то есть в итоге имеем, что $x_1 = -11$, $x_2 = 31$

Ответ. $x_1 = -11$, $x_2 = 31$

<u>Пример 2:</u>

Решить с помощью обратной матрицы систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Решение. Запишем данную систему в матричной форме:

$AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ - столбец правых частей. Тогда

$X = A^{-1}B$

Найдем обратную матрицу A^{-1} к матрице A с помощью союзной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \widetilde{A}^T$$

Здесь $\Delta = |A|$ - определитель матрицы A; матрица $\widetilde{A}$ - союзная матрица, она получена из исходной матрицы A заменой ее элементов их алгебраическими дополнениями. Найдем $\widetilde{A}$, для этого вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Таким образом,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 2 + 1\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 3 -$$

$$-3\cdot(-1)\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 2 = -4 \neq 0$$

А тогда

$$\widetilde{A} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Отсюда искомая матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Задания для самостоятельной работы

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = \dfrac{5}{6} \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2y + x + z = -1 \\ -z - y + 3x = -1 \\ -2x + 3z + 2y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

Вопросы для самопроверки:

1) В чём заключается матричный метод решения СЛАУ?

2) Назовите алгоритм решения однородной системы линейных уравнений методом обратной матрицы.

Тема 1.3 Комплексные числа

1.3.1. Действия над комплексными числами

Цель работы: Совершенствование умений выполнять действия над комплексными числами, изображать комплексное число на плоскости.

Задание: Выполните действия над комплексными числами

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Алгебраическая форма комплексных чисел $z = a + bi, \quad i^2 = -1,$ где *i* - мнимая единица; *a* - действительная часть: $a = \operatorname{Re} z$; *bi* - мнимая часть: $b = \operatorname{Im} z$; числа вида *bi* - чисто мнимые; плоскость *Oxy* - комплексная плоскость; ось *Ox* - действительная ось; ось *Oy* - мнимая ось;

$\bar{z} = a - bi$ - число, сопряженное числу $z = a + bi$;

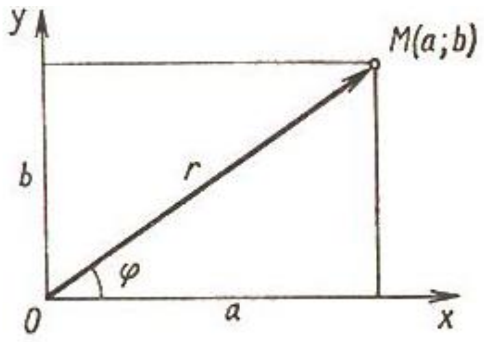
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа;

$\varphi = \arg z, \quad -\pi < \varphi \le \pi$ либо $0 \le \varphi < 2\pi$, - аргумент комплексного числа *z* (главное значение аргумента);

$$\cos\varphi = a\big/\sqrt{a^2+b^2}, \quad \sin\varphi = b\big/\sqrt{a^2+b^2}, \quad tg\varphi = b/a \quad (a \ne 0),$$

Arg *z* - множество аргументов числа *z*:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in Z.$$



Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Над комплексными числами в алгебраической форме можно выполнять следующие действия.

1) Сложение.

Определение. Суммой комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число z, действительная часть которого равна сумме действительных частей z_1 и z_2, а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел z_1 и z_2, то есть $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Числа z_1 и z_2 называются слагаемыми.

Сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1°. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2°. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3°. Комплексное число $-a - bi$ называется противоположным комплексному числу $z = a + bi$. Комплексное число, противоположное комплексному числу z, обозначается $-z$. Сумма комплексных чисел z и $-z$ равна нулю: $z + (-z) = 0$

__**Пример 1**__. Выполните сложение $(3 – i) + (-1 + 2i)$.

$(3 – i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2)\, i = 2 + 1i$.

2) Вычитание.

Определение. Вычесть из комплексного числа z_1 комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z + z_2 = z_1$.

Теорема. Разность комплексных чисел существует и притом единственна.

__**Пример 2**__. Выполните вычитание $(4 – 2i) - (-3 + 2i)$.

$(4 – 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2)\, i = 7 – 4i$.

3) Умножение.

Определение. Произведением комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называется комплексное число z, определяемое равенством: $z = (a_1a_2 – b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.

Числа z_1 и z_2 называются сомножителями.

Умножение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1º. Коммутативность: $z_1z_2 = z_2z_1$.

2º. Ассоциативность: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

3º. Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$(z_1 + z_2) z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

4º. $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a – bi) = a^2 + b^2$ - действительное число.

На практике умножение комплексных чисел производят по правилу умножения суммы на сумму и выделения действительной и мнимой части.

В следующем примере рассмотрим умножение комплексных чисел двумя способами: по правилу и умножением суммы на сумму.

__Пример 3__. Выполните умножение $(2 + 3i) (5 – 7i)$.

1 способ. $(2 + 3i) (5 – 7i) = (2\times 5 – 3\times (- 7)) + (2\times (- 7) + 3\times 5)i = = (10 + 21) + (- 14 + 15)i = 31 + i$.

2 способ. $(2 + 3i) (5 – 7i) = 2\times 5 + 2\times (- 7i) + 3i\times 5 + 3i\times (- 7i) = = 10 – 14i + 15i + 21 = 31 + i$.

4) Деление.

Определение. Разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z \cdot z_2 = z_1$.

Теорема. Частное комплексных чисел существует и единственно, если $z_2 \neq 0 + 0i$.

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}$$
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \quad + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

5) Возведение в целую положительную степень.

а) Степени мнимой единицы.

Пользуясь равенством $i^2 = -1$, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

$i^3 = i^2\, i = -i,$

$i^4 = i^2\, i^2 = 1,$

$i^5 = i^4\, i = i,$

$i^6 = i^4\, i^2 = -1,$

$i^7 = i^5\, i^2 = -i,$

$i^8 = i^6\, i^2 = 1$ и т. д.

Это показывает, что значения степени i^n, где n – целое положительное число, периодически повторяется при увеличении показателя на 4 .

Поэтому, чтобы возвести число i в целую положительную степень, надо показатель степени разделить на 4 и возвести i в степень, показатель которой равен остатку от деления.

Пример 5. Вычислите: $(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23}$.

$i^{36} = (i^4)^9 = 1^9 = 1,$

$i^{17} = i^{4\times 4+1} = (i^4)^4 \times i = 1 \cdot i = i.$

$i^{23} = i^{4\times 5+3} = (i^4)^5 \times i^3 = 1 \cdot i^3 = -i.$

$(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23} = (1 + i)(-i) = -i + 1 = 1 - i.$

б) Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных сомножителей.

Пример 6. Вычислите: $(4 + 2i)^3$

$(4 + 2i)^3 = 4^3 + 3\times 4^2 \times 2i + 3\times 4\times (2i)^2 + (2i)^3 = 64 + 96i - 48 - 8i = 16 + 88i.$

Задания для самостоятельной работы:

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 5 - 7i$

   Найдите:

   a) $z_1 + z_2$

   b) $z_1 \cdot z_2$

2. Произведите умножение комплексных чисел: $(2+3i)\cdot(5-7i)$
3. Вычислите: $\frac{8+2i}{5-3i}$
4. Решите уравнение: $x^2-6x+13=0$

Вопросы для самопроверки:

1. Как обозначается комплексное число?
2. Формы комплексного числа?
3. Какие действия производятся над комплексными числами?

1.3.2. Показательная форма комплексных чисел

Цель работы: научиться представлять комплексное число в показательной форме.

Задание: Выполните действия над комплексными числами

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Любое комплексное число (кроме нуля) $z=a+bi$ можно записать в показательной форме: $z=|z|e^{i\varphi}$, где $|z|$ – это модуль комплексного числа, а φ – аргумент комплексного числа.

Запись комплексного числа z в виде $z=r\cdot e^{i\varphi}$ называется показательной формой записи,

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Что нужно сделать, чтобы представить комплексное число в показательной форме? 1. выполнить чертеж; 2. найти модуль и аргумент; 3. записать число в виде $z=|z|e^{i\varphi}$.

Действия над комплексными числами в показательной форме:

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$$

Пример1 : Запишите в показательной форме число $z_2 = -2 + 4i$

Решение:

Для числа $z_2 = -2 + 4i$ найдём модуль и аргумент:

Модуль: $z_2 = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Аргумент:

$\arg z_2 = \pi + arctg\frac{b}{a} = \pi + arctg\frac{4}{-2} = \pi + arctg(-2) = \pi - arctg2$.

Тогда данное число в показательной форме запишется следующим образом: $\mathrm{z_2} = 2\sqrt{5} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i(\pi - arctg2)}}$.

Пример 2: Запишите в показательной форме число z=2i

Решение:

Действительной частью является число $x = Re\ \ z = 0$,

мнимой частью является $y = Im\quad z = 2.$

Находим модуль и аргумент комплексного числа:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$$\varphi = arctgz = arctg\frac{y}{x} = arctg\ \frac{2}{0} = arctg\infty = \frac{\pi}{2}$$

Следовательно, показательная форма имеет вид: $\mathrm{z} = \mathrm{re}^{\mathrm{i}\omega} = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$

Пример 3:

Представить заданные комплексные числа в показательной форме: 1) z=2+0·i; 2) z=1/2+1/2·i.

Решение:

Показательная форма записи некоторого комплексного числа имеет вид $z=r\cdot e^{i\varphi}$.

1. По условию a=2,b=0. Вычислим модуль исходного комплексного числа: $r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

Вычислим аргумент исходного комплексного числа, используя формулу : $\varphi = z \cdot arctg\frac{0}{2} = arctg0 = 0$

Подставим полученные значения и получим: z=2·e$^{i \cdot 0}$ Следовательно, z=2·e$^{i \cdot 0}$ - искомая запись комплексного числа.

2. По условию a=1/2,b=1/2.

Вычислим модуль исходного комплексного числа: $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Вычислим аргумент исходного комплексного числа, используя формулу: $\varphi = arctg\frac{1/2}{1/2} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$. Подставим полученные значения и получим: $z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$. Следовательно, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$ - искомая запись комплексного числа.

Пример 4

Частное комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ находится путем домножения числителя и знаменателя на сопряженное число к знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Записать комплексное число $z = 4 - 3i$ в показательной форме.
2. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}$ и $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$
3. Разделите комплексные числа $z_1 = -1 = 3i$ и $z_2 = 1 + 2i$

Вопросы для самопроверки:

1. Запишите общий вид комплексного числа в показательной форме.
2. Запишите формулы для выполнения арифметических действий с комплексными числами в показательной форме

РАЗДЕЛ 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 2.1 Векторы. Операции над ними

2.1.1. Операции над векторами

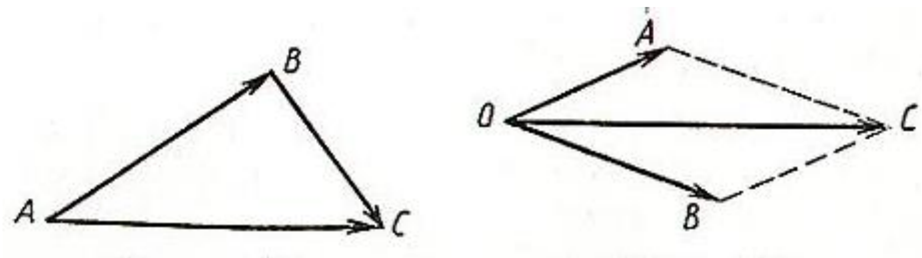
Цель работы: Совершенствование умений выполнять операции над векторами

Задание: Выполните операции над векторами

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения



Сумма векторов:

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ (правило треугольника)

$\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$ (правило параллелограмма)

$\overline{AA_1}+\overline{A_1A_2}+\ldots+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{AA_n}$ (правило многоугольника);

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OS}$ (правило параллелепипеда, $[OS]$ - диагональ).

Разность векторов: $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$.

Формула вычитания векторов: $\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{AB}$

Признак коллинеарности векторов: $\overline{a}=a\overline{b}\left(\overline{b}\neq\overline{0}\right)$.

Скалярное произведение векторов $x_1,\ y_1,\ z_1$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi,$

Скалярное произведение в координатах

Если $\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k},\ \overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k},$ то $\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$

$\overline{a}^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2.$

Векторное произведение

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - вектор, обозначаемый $[\bar{a}\bar{b}]$, $[\bar{a}\bar{b}]$ или $\bar{a}\times\bar{b}$, для которого:

1) $|[\bar{a}\bar{b}]| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$ (φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $0\le\varphi\le\pi$);

2) $[\bar{a}\bar{b}]\perp\bar{a},\ [\bar{a}\bar{b}]\perp\bar{b};$

3) тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $[\bar{a}\bar{b}]$ - правая.

Смешанное произведение в координатах

Если $\bar{a} = x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},\ \bar{b} = x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k},\ \bar{c} = x_3\bar{i}+y_3\bar{j}+z_3\bar{k},$ то

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + z_1x_2y_3 + y_1z_2x_3 - z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Даны координаты трех векторов в прямоугольной системе координат $\vec{a} = (1, -1, 3),\quad \vec{b} = (-2, 2, 1),\quad \vec{d} = (3, -2, 5)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d}$.
2. В правой прямоугольной декартовой системе координат заданы три взаимно перпендикулярных вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d}$, образующих правую тройку, их длины равны соответственно *4*, *2* и *3*. Найдите их смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d}$.
3. Даны векторы ***A*** = {2; -1; 1}, ***B*** = {3; 3; 4} и ***C*** = {2; 0; 2}. Найти координаты вектора ***D***, если известно, что он перпендикулярен векторам ***A*** и ***B***, а скалярное произведение ***Dc*** = -8.

Указание

Векторное произведение [***A***, ***B***] перпендикулярно обоим сомножителям, То есть [***A***, ***B***] перпендикулярен ***A*** и ***B***.

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках

A(2; 2; 2), *B*(3; 1; 5), *C*(0; 4; 3), *D*(5; 0; 7).

Указание

Модуль смешанного произведения векторов AB, AC, AD равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на смежных ребрах.

Вопросы для самопроверки:

1. Какие операции можно производить над векторами?
2. Какие вектора называются коллинеарными?
3. Признаки коллинеарных векторов

2.1.2. Смешанное произведение векторов

Цель работы: научиться выполнять смешанное произведение над векторами.

Задание: Выполните действия над матрицами

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d}$ называется действительное число, равное скалярному произведению векторов

$[\vec{a} \times \vec{b}]$ и $\vec{d}$, где $[\vec{a} \times \vec{b}]$ - векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Смешанное произведение часто называют векторно-скалярным произведением.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\overrightarrow{d}$ обычно обозначают $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$. В таких обозначениях по определению смешанного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} = \left([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{d}\right)$.

Смешанное произведение в координатной форме.

Покажем, как находится смешанное произведение, если известны координаты умножаемых векторов в прямоугольной системе координат. Пусть $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ - координатные векторы.

Векторное произведение в координатах имеет вид

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\cdot\vec{\imath} + (a_z\cdot b_x - a_x\cdot b_z)\cdot\vec{\jmath} + (a_x\cdot b_y - a_y\cdot b_x)\vec{k}$$
$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

а скалярное произведение векторов в прямоугольной системе координат равно сумме произведений соответствующих координат, поэтому,

$$([\vec{a}\times\vec{b}]) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot\vec{k}, d_x\cdot\vec{\imath} + d_y\cdot\vec{\jmath} + d_z\cdot\vec{k}\right)$$
$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot d_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot d_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot d_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix}$$

Таким образом, смешанное произведение векторов равно определителю матрицы третьего порядка, строками которой являются координаты умножаемых векторов, то есть,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d} = ([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{d}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения.

Из свойств векторного произведения и свойств скалярного произведения следуют следующие **свойства смешанного произведения**:

1. $(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}\cdot\vec{d} = \vec{a}\cdot(\lambda\cdot\vec{b})\cdot\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\cdot(\lambda\cdot\vec{d}) = \lambda\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d},\ \lambda\in R$
2. $\vec{a}\cdot\overrightarrow{b\cdot}\vec{d} = \vec{d}\cdot\overrightarrow{a\cdot}\vec{b};\quad \vec{a}\cdot\vec{d}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}\cdot\vec{d} = \overrightarrow{d\cdot}\vec{b}\,\overline{\cdot\vec{a}}$
3. $\left(\overrightarrow{a^{(1)}} + \overrightarrow{a^{(2)}}\right)\cdot\vec{b}\cdot\vec{d} = \overrightarrow{a^{(1)}}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d} + \overrightarrow{a^{(2)}}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d}$

   $\vec{a}\cdot\left(\overrightarrow{b^{(1)}} + \overrightarrow{b^{(2)}}\right)\cdot\vec{d} = \vec{a}\cdot\overrightarrow{b^{(1)}}\cdot\vec{d} + \overrightarrow{a\cdot}\overrightarrow{b^{(2)}}\cdot\vec{d}$

   $\vec{a}\cdot\vec{b}\left(\overrightarrow{d^{(1)}} + \overrightarrow{d^{(2)}}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\overrightarrow{d^{(1)}} + \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\overrightarrow{d^{(2)}}$

Пример 1:

Даны координаты трех векторов в прямоугольной системе координат $\vec{a} = (1,\quad -1,\quad 3)$, $\vec{b} = (-2,\quad 2\quad 1)$, $\vec{d} = (3,\quad -2,\quad 5)$. Найдите смешанное произведение $\vec{a}\cdot\overrightarrow{b\cdot}\vec{d}$.

Решение:

смешанное произведение векторов может быть вычислено через определитель матрицы третьего порядка, строками которой являются координаты векторов, то есть,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} = \left(\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{d}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -7$$

Геометрический смысл смешанного произведения.

Выясним геометрический смысл смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d}$.

Отложим векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d}$ от одной точки и построим параллелепипед на этих векторах как на сторонах.

Обозначим $\vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$. В этом случае смешанное произведение можно записать как $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} = |\vec{c}| \cdot \left|\vec{d}\right| \cdot \cos\left(\vec{c} \,\hat{,}\, \vec{d}\right) = |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\vec{d}$, где $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{d}$ - числовая проекция вектора $\vec{d}$ на направление вектора $\vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$.

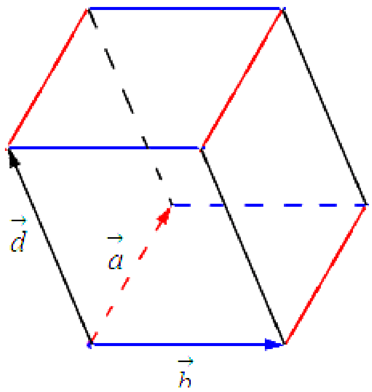
Абсолютная величина числовой проекции $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{d}$ равна высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d}$, так как вектор $\vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ перпендикулярен и вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$ по определению векторного произведения. А в разделе геометрический смысл векторного произведения мы выяснили, что величина $|\vec{c}| = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом, модуль смешанного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} = |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\vec{d}$ - это произведение площади основания на высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d}$.

Абсолютная величина смешанного произведения векторов представляет собой объем параллелепипеда:

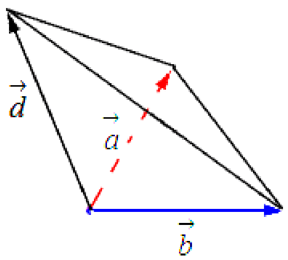
$V_{\text{параллелепипеда}} = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}|$. В этом заключается геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d}$, равен одной шестой объема соответствующего параллелепипеда, таким образом,

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}|$$



$$V_{\text{параллелепипеда}} = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}|$$



$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}|$$

<u>Пример 2:</u>

Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\overrightarrow{AB} = (1, \quad 6, \quad 3), \quad \overrightarrow{AC} = (1, \quad 3, \quad -2), \quad \overrightarrow{AA_1} = (2, \quad 2, \quad 2)$$

заданных в прямоугольной системе координат.

Решение.

Искомый объем параллелепипеда равен абсолютной величине смешанного произведения заданный векторов. Находим смешанное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \cdot 2 = -18$$

Тогда, $V_{\text{параллелепипеда}} = |-18| = 18.$
Ответ: $V_{\text{параллелепипеда}} = 18$

<u>Пример 3:</u>

В прямоугольной декартовой системе координат даны четыре точки
A(0, 1, 0), B(3, -1, 5), C(1, 0, 3), D(-2, 3, 1). Найдите объем тетраэдра *ABCD*.
Решение.

Объем тетраэдра *ABCD* мы можем вычислить с использованием смешанного произведения векторов по формуле

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{AD}\right|$$

Найдем <u>координаты векторов по координатам точек</u>

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3 - 0, \quad -1 - 1, \quad 5 - 0) = (3 \quad -2 \quad 5)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1 - 0, \quad 0 - 1, \quad 3 - 0) = (1 \quad -1 \quad 3)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}D} = (-2 - 0, \quad 3 - 1, \quad 1 - 0) = (3 - 2 \quad 2 \quad 1)$$

Вычисляем смешанное произведение $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{AD}$ по координатам векторов:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= 3 \cdot (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 \cdot 1 = -7$$

Таким образом, искомый объем тетраэдра равен

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} \cdot |-7| = \frac{7}{6}$$

.

Ответ: $V_{\text{тетраэдра}} = \frac{7}{6}.$

Задания для самостоятельной работы:

1. Даны координаты трех векторов в прямоугольной системе координат $\vec{a} = (-1, \quad 2, \quad 3)$, $\quad \vec{b} = (-4, \quad 2 \quad 0)$, $\quad \vec{d} = (2, \quad -1, \quad 5)$. Найдите смешанное произведение $\vec{a} \cdot \overrightarrow{b} \cdot \vec{d}$.

2. В прямоугольной декартовой системе координат даны четыре точки A(3, 1, 4), B(9, -1, 2), C(0, -2, 3), D(-2, 3, 1). Найдите объем тетраэдра *ABCD*.

3. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1, \quad -6, \quad 3)$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1, \quad -3, \quad -2)$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{AA_1}} = (-2, \quad -2, \quad 2)$ заданных в прямоугольной системе координат.

Вопросы для самопроверки:

1. Какое произведение векторов называется смешанным?
2. Назовите свойства смешанного произведения векторов
3. Запишите геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Тема 2.2.Прямая на плоскости и в пространстве: кривые 2-го порядка

2.2.1. Уравнения кривых 2-го порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола

Цель работы: Совершенствование умений составлять уравнения кривых второго порядка.

Задание: Составьте уравнения кривых второго порядка

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения:

Гипербола. Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных фиксированных точек (фокусов) гиперболы есть одна и та же постоянная величина.

Предполагается, что эта постоянная величина не равна нулю и меньше, чем расстояние между фокусами.

Простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Здесь a - действительная полуось гиперболы, b - мнимая полуось гиперболы.

Если $2c$ - расстояние между фокусами гиперболы, то между a, b и c существует соотношение

$a^2 + b^2 = c^2$.

При $b = a$ гипербола называется равносторонней. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$x^2 - y^2 = a^2$.

Фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к длине ее действительной оси.

$$e = \frac{c}{a}$$

Асимптоты гиперболы - две прямые, определяемые уравнениями

$$\begin{cases} y = \dfrac{b}{a}x \\ y = -\dfrac{b}{a}x \end{cases}$$

Парабола. Параболой называется геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от заданной фиксированной точки и от заданной фиксированной прямой. Точка, о которой идет речь в определении, называется фокусом параболы, а прямая - ее директрисой.

Простейшее уравнение параболы

$y^2 = 2px$. (*)

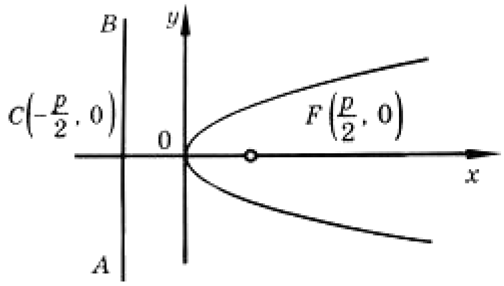
Входящая в это уравнение величина p называется параметром параболы. Параметр параболы равен расстоянию от директрисы параболы до ее фокуса.

Координаты фокуса F параболы (*) $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

. (фокус параболы лежит на ее оси симметрии) Уравнение директрисы параболы (*)

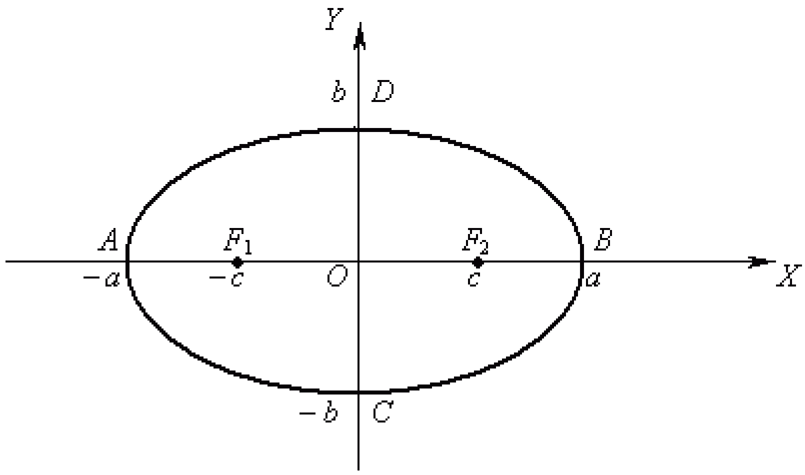
$$x = -\frac{p}{2}$$

Эксцентриситет параболы $e = 1$.



$y^2 = 2px$ $(p > 0)$

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых ***фокусами*** эллипса, есть величина постоянная.



Уравнение эллипса :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Здесь начало координат является центром симметрии эллипса, а оси координат – его осями симметрии. При $a > b$ фокусы эллипса лежат на оси OX (рис.1) , при $a < b$ фокусы эллипса лежат на оси OY , а при $a = b$ эллипс становится окружностью (фокусы эллипса в этом случае совпадают с центром окружности). Таким образом, *окружность есть частный случай эллипса*.

Отрезок $F_1F_2 = 2c$, где $c=\sqrt{|a^2-b^2|}$, называется ***фокусным расстоянием***. Отрезок $AB = 2a$ называется ***большой осью эллипса***, а отрезок $CD = 2b$ – ***малой осью эллипса***. Число $e = c / a$, $e < 1$ называется ***эксцентриситетом эллипса***.

Пусть $P(x_1, y_1)$ – точка эллипса, тогда ***уравнение касательной к эллипсу*** в данной точке имеет вид:

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

Условие касания прямой $y = mx + k$ ***и эллипса*** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$:

$k^2 = m^2a^2 + b^2$.

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1: Составьте уравнения кривых второго порядка

1. Найдите координаты центра и радиуса окружности $x^2+y^2-8x-10y-8=0$

2. Дана окружность $x^2+y^2+4x-6y=0$ составьте уравнение диаметра, перпендикулярного к хорде $2x-3y+13=0$.

3. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ох, если его большая ось равна 14, а эксцентриситет е=2/3.

4. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ох, если он проходит через точки А(6; 4) и В(8; 3).

5. Составьте уравнение гиперболы, если её асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)x$ и она проходит через точку (6; -4)

Вопросы для самопроверки:

1. Запишите уравнение гиперболы
2. Запишите уравнение параболы
3. Запишите уравнение эллипса
4. Запишите уравнение окружности

2.2.2. Подготовить презентацию по теме «Кривые второго порядка»

Критерии оформления презентации смотрите в приложении В

РАЗДЕЛ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тема 3.1 Теория пределов и непрерывность

3.1.1. Раскрытие неопределённостей

Цель работы: Отработка навыков вычисления пределов функций

Задание: Раскройте неопределённости неопределённостей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для всех значений x, достаточно близких к x_0 и отличных от x_0, значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа b. Пишут: $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$

Основные неопределенности пределов и их раскрытие.

Основные виды неопределенностей: ноль делить на ноль $\left(\frac{0}{0}\right)$, бесконечность делить на бесконечность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, ноль умножить на бесконечность $(0 \cdot \infty)$, бесконечность минус бесконечность $(\infty - \infty)$, единица в степени бесконечность 1^{∞}, ноль в степени ноль 0^0, бесконечность в степени ноль ∞^0.

Раскрывать неопределенности позволяет:

- упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);
- использование замечательных пределов;
- применение правила Лопиталя;
- использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным(использование таблицы эквивалентных бесконечно малых).

Сгруппируем неопределенности в **таблицу неопределенностей**. Каждому виду неопределенности поставим в соответствие метод ее раскрытия (метод нахождения предела).

Таблица 1 – таблица неопределённостей

Виды неопределённостей	Методы нахождения предела
$\left(\frac{0}{0}\right)$	Необходимо преобразовать и упростить выражение. Если

	есть выражение вида $\frac{\sin(kx)}{kx}$ или $\frac{kx}{\sin(kx)}$, то применяется первый замечательный предел.
$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Необходимо преобразовать и упростить выражение. Если не помогает, то использовать правило Лопиталя.
$(0\cdot\infty),(\infty-\infty)$	Необходимо преобразовать неопределённость к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, за тем применить правило Лопиталя
1^{∞},	Применяем второй замечательный предел

.

<u>Свойства пределов</u>. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$.

Тогда:

1. Предел константы равен самой константе: $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$.
2. Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=a+b$.
3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$.
4. Постоянный множитель выносится за знак предела: $\lim\limits_{x\to x_0}[k\cdot f(x)]=k\cdot a$.
5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b},\quad$ если $\quad g(x)\neq 0$.
6. Показатель степени можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n=a^n$.

Первый замечательный предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

На практике чаще встречаются **модификации первого замечательного предела** в виде: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{kx} = 1$

где, k – коэффициент.

Следствия первого замечательного предела:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx}{\sin kx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin kx}{kx}} = \frac{1}{1} = 1$

__**Пример 1:**__

Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}$

Решение:

Подставляем значение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \langle\frac{0}{0}\rangle$

Пришли к неопределенности ноль делить на ноль. Смотрим в таблицу неопределенностей для определения метода решения. Комбинация синуса и его аргумента подсказывает нам о применении первого замечательного предела, но для этого сначала нужно немного преобразовать выражение. Домножим на 3x и числитель и знаменатель дроби.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{3x\sin(3x)}{3x\cdot(2x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\right)$$

В силу следствия из первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = 1$, поэтому приходим к результату: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$

Второй замечательный предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

или в другой записи $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$

В случае второго замечательного предела имеем дело с неопределенностью вида единица в степени бесконечность(1^{∞}) .

Пример 2:

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}$

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}} = \left(1-\frac{2}{\infty^2+1}\right)^{\frac{\infty^2+1}{4}} = (1-0)^{\infty} = (1^{\infty})$$

Пришли к неопределенности единица в степени бесконечность. Смотрим в таблицу неопределенностей для определения метода решения и останавливаемся на применении второго замечательного предела.

Сделаем замену переменных. Пусть$t = -\frac{x^2+1}{2} \Rightarrow \frac{x^2+1}{4} = -\frac{t}{2}$

Если $x \to \infty$, то $t \to -\infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}} = \langle 1^{\infty}\rangle = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-\frac{1}{t}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Пример 3:

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

Решение:

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x} = \left(\frac{1-0}{1+0}\right)^{\infty} = \langle 1^{\infty}\rangle$$

Пришли к неопределенности единица в степени бесконечность, которая указывает на применение второго замечательного предела. Выделим целую часть в основании показательно степенной функции:

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$$

Тогда предел запишется в виде:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\langle 1^\infty\rangle=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$$

Сделаем замену переменных. Пусть

$t=-\frac{x+1}{2}=>2t=-x-1\ =>x=-2t-1$

Если $x\to\infty$, то $t\to-\infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}$$

$$\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{-2}\cdot\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{-1}=e^{-2}\cdot(1+0)^{-1}=e^{-2}$$

В преобразованиях были использованы свойства степени и свойства пределов

Задания для самостоятельной работы.

Раскройте неопределённости

$\lim\limits_{x\to3}(3x-2x^2+3)$	$\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{2x^2+x-3}{x+3}\right)$	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{6x^2-x-1}{x-\frac{1}{2}}\right)$

$\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}\right)$	$\lim\limits_{x\to 10}\left(\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}\right)$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}\right)$
$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$	$\lim\limits_{x\to 16}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-2}\right)$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)^2}{x^2+2x-15}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^5+4x^3+3}{7x^5-4}\right)$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{3x^5+7x+8}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x^7-2}{4x^5+7x^6+1}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3x^4}{9x^4+5}\right)$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 x}{\sin 2x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{2x}$.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^3 2x}{x^2}$;

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией одной независимой переменной?
2. Перечислить основные элементарные функции.
3. Какие функции называются элементарными? Приведите примеры.
4. Что такое предел функции y = f(x) при x→ a?
5. Дайте определение правого и левого пределов функции y = f(x)
6. Дайте определение предела последовательности.
7. Какая функция называется бесконечно большой величиной при x→ a и x→ +∞?
8. Какова связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?

3.1.2. Подготовить реферат по теме: «Точки разрыва, их классификация»

Критерии оформления реферата смотрите в приложении А

Тема 3.2.Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной

3.2.1. Производные и дифференциалы высших порядков

Цель работы: Отработка навыков вычисления производной функций и практического применения производной.

Задание: Вычислите производные сложных и элементарных функций

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Формулы дифференцирования		Правила дифференцирования	Применение производной
$c'=0$ $x'=1$ $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$ $(kx)'=k$ $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ $\left(e^x\right)'=e^x$ $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$(u+v)'=u'+v'$ $(uv)'=u'v+v'u$ $(cu)'=cu'$ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2},\ v\neq 0$ $[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$	$f'(x)=tg\alpha=k$ $v(t)=S'(t)$ $a(t)=v'(t)$ Уравнение касательной: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $f(x)$ возрастает на I, если $f'(x)>0$ на I. $f(x)$ убывает на I, если $f'(x)<0$ на I. Выпуклость графика функции и его перегибы: $y''>0$, выпуклость вниз y'' _> 0, выпуклость вверх

Задания для самостоятельной работы.

1.1. Вычислить производные следующих функций:

1)$y = 2x^2 - 3x + 5$; 2)$y = 4 - x^4$; 3)$y = x^4 - x^2$; 4)$y = 5x^4 - 7x^2 + x - 3$; 5)$y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 9x - 5$; 6) $y=\frac{2x^3}{3}-3x^2+6x-1$; 7) $y=\frac{3x^6}{2}+4x^5-2x^3-\frac{1}{2x}$; 8) $y=2-\frac{x}{2}-5x^2-\frac{3}{x^2}$;

9) $y=(2x-3)(3x^4+5x-8)$; 10) $y=3x^{-2}$; 11) $y=4x^{-3}$; 12) $y=3x^{-\frac{2}{3}}$; 13) $y=5x^{-\frac{3}{5}}$;

14) Найти $f'(-1)$, *если* $f(x)=4x^3-2x^2+x-5$;

15) Найти $f'(0{,}5)$, *если* $f(x)=-x^3+9x^2-x+2$;

1.2. Вычислите производные сложных функций:

1) $y=3\sin 5x$; 2) $y=4\cos\frac{x}{2}$; 3) $y=\arccos 3x$; 4) $y=\ln\sqrt{2x-1}$;

5) $y=(x^4-x-1)^4$; 6). $y=\sqrt{x^3+2x-5}$; 7) $y=\cos^2 x$; 8) $y=\sin^3 x$; 9) $y=\ln\sin 3x$;

10) $y=\ln\sqrt{2x-1}$; 11) $y=3^{\sin x}-2^{2x}+e^{5x}$; 12) $y=3^{\sqrt{x}}-4^{7x}+3e^{2x}$;

1.3. Вычислите производные показательно-степенных функций:

1) $y=x^x$; 2) $y=x^{x^x}$; 3) $y=x^{\frac{1}{x}}$; 4) $y=x^{\ln x}$; 5) $y=x^{tgx}$; 6) $y=(arctgx)^{\ln x}$;

7) $y=(arctgx)^x$; 8) $y=(x+x^2)^x$.

1.4. Геометрический и физический смысл производной.

1) Составьте уравнение касательной к параболе $y=x^2-4x$ в точке с абсциссой а) $x_0=-1$; б)$x_0 = 0$; в)$x_0 = 1$.

2) Дана кривая $y=2x^3-4x^2+5x-1$. Составьте уравнение касательной в точке, абсцисса которой равна а) −1; б) 0; в) 1.

3) В какой точке касательная к кривой $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+4$ параллельна прямой а) $2x+2y-5=0$; б)у – 3х -5 =0; в) у + х =0?

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение производной функции у =f(x).
2. Каковы геометрический и механический смыслы производной?
3. Как найти производную сложной функции?
4. Дать определение дифференциала функции у =f(x).
5. Какой геометрический смысл имеет дифференциал?
6. Что называется производной второго порядка от функции у =f(x)?

3.2.2. Исследование и построение графиков функций

Цель работы: Отработка навыков применения производной к исследованию функции

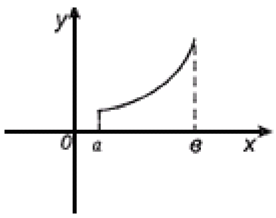
Задание 1: Исследуйте и постройте график функции:

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

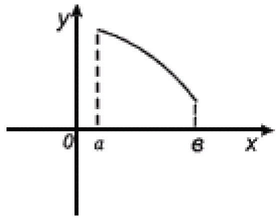
Достаточное условие возрастания функции



$f'(x) > 0$

Если в каждой точке интервала (a, b) $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Достаточное условие убывания функции.



f'(x) < 0

Если в каждой точке интервала (a, b) f'(x)<0, то функция f(x) убывает на этом интервале.

Определение:

x_0 называется критической точкой функции f(x), если

1) x_0 – внутренняя точка области определения f(x) ;

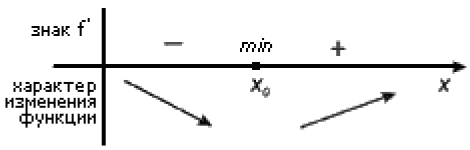
2) $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

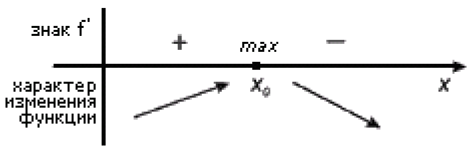
Необходимое условие экстремума:

Если x_0– точка экстремума функции f(x), то эта точка является критической точкой данной функции.

Достаточное условие экстремума:

Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак, то x_0 – точка экстремума функции f(x).





Примеры экстремумов:

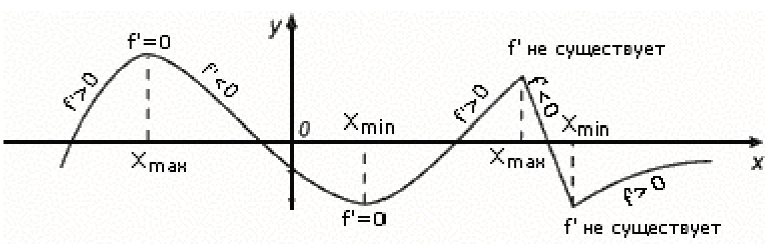


Схема исследования функции.

1. Найти область определения функции.

2. Проверить, не является ли функция четной или нечетной; проверить также, не является ли она периодической.
3. Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции. Иногда для уточнения построения графика следует найти две три дополнительные точки.
4. Найти производную функции и ее критические точки.
5. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.
6. Найти промежутки выпуклости и вогнутости функции. Точки перегиба.
7. Найти вертикальную, наклонную и горизонтальную асимптоты.
8. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Наибольшее и наименьшее значения функции f(x), непрерывной на отрезке [a; b].

1. Найти значения функции в концах отрезка, т.е. f(a) и f(b) ;
2. Найти значения функции в тех критических точках, которые принадлежат интервалу (a, b) ;
3. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Промежутки вогнутости и выпуклости функции находятся при решениями неравенств $f^{//}(x) \geq 0$ и $f^{//}(x) \leq 0$ соответственно.

Иногда вогнутость называют выпуклостью вниз, а выпуклость – выпуклостью вверх.

Здесь также справедливы замечания, подобные замечаниям из пункта про промежутки возрастания и убывания.

Промежутки вогнутости и выпуклости функции :

1. во-первых, находим вторую производную;
2. во-вторых, находим нули числителя и знаменателя второй производной;

3. в-третьих, разбиваем область определения полученными точками на интервалы;
4. в-четвертых, определяем знак второй производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку вогнутости, знак «минус» - промежутку выпуклости.

Горизонтальная, вертикальная и наклонная асимптоты.

1. *Горизонтальные или наклонные асимптоты* следует искать лишь тогда, когда функция определена на бесконечности.
2. На границах области определения функция имеет *вертикальные асимптоты*, если односторонние пределы функции в этих граничных точках бесконечны.
3. *Наклонная асимптота* имеет вид прямой $y = kx + b$, где $k = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$.

Если k=*0* и b не равно бесконечности, то наклонная асимптота станет *горизонтальной*.

Задания для самостоятельной работы

Исследуйте и постройте график функции:

1) $y = 8 - 2x - x^2$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 3) $y = 3 - 3x + x^3$; 4)$y = x^4 + 2x^3 - 5x^2$; 5) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 6) $y = x\sqrt{2 - x}$; 7) $y = \ln(x^2 + 1)$;

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит достаточный признак экстремума?
2. Какие точки называются точками перегиба функции y =f(x)?
3. Что называется асимптотой функции y =f(x)?

Тема 3.3.Интегральное исчисление функции одной независимой переменной

3.3.1. Вычисление неопределенных интегралов заменой переменной, по частям

Цель работы: Отработка навыков вычисления неопределённых интегралов методом замены переменной и интегрированием по частям

Задание: Вычислите неопределённые интегралы методом интегрирования по частям и способом замены переменной

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Таблица неопределённых интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int e^x dx = e^x \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x \qquad \int \cos x\, dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

Метод интегрирования по частям позволяет свести исходный неопределенный интеграл к более простому виду либо к табличному интегралу. Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Формула интегрирования по частям

$$\int f(x)dx = \int u(x)\, d\big(v(x)\big) = u(x)v(x) - \int v(x)d\big(u(x)\big)$$

То есть, подынтегральное выражение *f(x)dx* представляем в виде произведения функции *u(x)* на *d(v(x))* - дифференциал функции *v(x)*. Далее находим функцию *v(x)* (чаще всего методом непосредственного интегрирования) и *d(u(x))* - дифференциал функции *u(x)*. Подставляем найденные выражения в формулу интегрирования по частям и исходный неопределенный интеграл сводится к разности $u(x)v(x) - \int v(x)d\big(u(x)\big)$

Последний неопределенный интеграл может быть взят с использованием любого метода интегрирования, в том числе и метода интегрирования по частям.

В качестве примера найдем множество первообразных функции логарифма.

Пример 1.

Найти неопределенный интеграл $\int \ln x\, dx$

Решение.

Найдем этот неопределенный интеграл методом интегрирования по частям. В качестве функции u(x) возьмем ln(x), а в качестве d(v(x)) оставшуюся часть подынтегрального выражения, то есть dx.

Имеем, $\ln x\, dx = u(x)d\big(v(x)\big)$, где $u(x) = \ln x, \quad d\big(v(x)\big) = dx$

Дифференциал функции u(x) есть $d\big(u(x)\big) = u'(x)dx = \frac{dx}{x}$, а функция v(x) – это $v(x) = \int d\big(v(x)\big) = \int dx = x$

ЗАМЕЧАНИЕ: константу C при нахождении функции v(x) считают равной нулю.

Теперь все подставляем в формулу интегрирования по частям:

$$\int \ln x dx = u(x)v(x) - \int v(x)d\big(u(x)\big) = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = \ln x \cdot x - \int dx$$

$$= \ln x \cdot x - (x + C_1) = x \cdot (\ln x - 1) + C, \quad \text{где } \mathrm{C} = \mathrm{C}_1$$

Ответ: $\int \ln x dx = x \cdot (\ln x - 1) + C$,

Самое сложное, что есть в этом методе – это правильно определить, какую часть подынтегрального выражения брать за *u(x)*, а какую за *d(v(x))*.

Рассмотрим стандартные случаи.

Для интегралов вида $\int P_n(x) \cdot e^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x) \cdot \sin \alpha x \, dx$ или $\int P_n(x) \cdot \cos(\alpha x) \, dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени *n*, *a* – коэффициент, в качестве функции *u(x)* выбираем многочлен $P_n(x)$.

Пример 2.

Найти множество первообразных функции $f(x) = (x+1)\sin 2x$

Решение.

Неопределенный интеграл $\int (x+1)\sin(2x)\, dx$ можно взять методом интегрирования по частям.

В качестве функции *u(x)* следует взять *x+1*, тогда *d(v(x)) = sin(2x)dx*.

Следовательно, *d(u(x)) = d(x+1) = dx*, а с помощью непосредственного интегрирования получаем $v(x) = \int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

Выполняем подстановку в формулу интегрирования по частям:

$$\int (x+1)\sin(2x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)\, d\big(u(x)\big)$$

$$= (x+1)\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Ответ:

$$\int (x+1)\sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Задания для самостоятельной работы.

Задание: Вычислите неопределённые интегралы

1.1. Вычислите интеграл применяя основные правила интегрирования.

1. $\int x^6 dx$; 2. $\int \frac{dx}{x^2}$; 3. $\int x^{\frac{2}{3}} dx$; 4. $\int \sqrt{x} dx$; 5. $\int (5x^3 - 2x^2 + 3x - 8) dx$; 6. $\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3) dx$;

7. $\int (2x-1)^3 dx$; 8. $\int x^3 (1+5x) dx$; 9. $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x} dx$; 10. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx$; 11. $\int \frac{4x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2} dx$;

1.2. Вычислите интегралы, используя метод подстановки.

1. $\int (7-2t)^3 dt$; 2. $\int (5u-1)^3 du$; 3. $\int (1+x^5)^7 x^4 dx$; 4. $\int (9-2x^3)^4 x^2 dx$; 5. $\int 4(x^4+5)^2 x^3 dx$;

1.3. Вычислите интегралы, применяя метод интегрирования по частям.

1. $\int x \cos x dx$; 2. $\int x e^x dx$; 3. $\int x^5 \ln x dx$; 4. $\int x e^{2x} dx$; 71. $\int x \ln x dx$;

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется первообразной?
2. В чём состоит суть метода интегрирования по частям?
3. В чём состоит суть метода замены переменной?

3.3.2. Решение задач с использованием разных методов интегрирования

Цель работы: Отработка навыков вычисления интегралов с помощью таблицы основных интегралов и формулы Ньютона-Лейбница

Задание: Вычислите определённый интеграл

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Определенный интеграл Ньютона-Лейбница.

Покажем, как дается понятие определенного интеграла Ньютона-Лейбница. Пусть функция *y=f(x)* имеет первообразную *F(x)* на отрезке *[a; b]*, причем значение первообразной в точке $x=a$ равно нулю: *F(a)=0*. *Определенным интегралом Ньютона-Лейбница* называется значение этой первообразной в точке b, то есть, $\int_a^b f(x)dx = F(b)$ при *F(a)=0*.

Это определение тесно связано с формулой Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

В формуле Ньютона-Лейбница *F(x)* – любая первообразная из их множества, а в понятии определенного интеграла Ньютона-Лейбница фигурирует именно та первообразная, которая обращается в ноль при $x=a$. Формулу Ньютона-Лейбница называют *основной формулой интегрального исчисления*.

Пример1:

Вычислить значение определенного интеграла $\int_1^3 x^2\,dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение.

Для начала отметим, что подынтегральная функция $y = x^2$ непрерывна на отрезке *[1;3]*, следовательно, интегрируема на нем.

Из таблицы неопределенных интегралов видно, что для функции

$y = x^2$ множество первообразных для всех действительных значений аргумента (следовательно, и для $x \in [1; 3]$) записывается как

$F(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$. Возьмем первообразную при $C = 0$: $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Теперь осталось воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла: $\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$

Пример 2:

Вычислить определенные интегралы $\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2} dx$ и $\int_{-1}^{1} \frac{4x^3+2}{x^2} dx$

Решение.

На отрезке $\left[-4\,;\,-\frac{1}{2}\right]$ подынтегральная функция непрерывна, следовательно, интегрируема.

Найдем множество первообразных функции $y = \frac{4x^3+2}{x^2}$:

$$\int \frac{4x^3+2}{x^2} dx = 4\int x\,dx + 2\int x^{-2}\,dx = 2x^2 - \frac{2}{x} + C$$

Возьмем первообразную $F(x) = 2x^2 - \frac{2}{x}$ и по формуле Ньютона-Лейбница вычислим требуемый определенный интеграл:

$$\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2} dx = \left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)\Bigg|_{-4}^{-\frac{1}{2}} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} - \left(2(-4)^2 - \frac{2}{-4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 4 - 32 - \frac{1}{2} = -28$$

Переходим ко второму определенному интегралу.

На отрезке *[-1;1]* подынтегральная функция не ограничена, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3+2}{x^2} = +\infty$, то есть, не выполняется необходимое условие интегрируемости функции на отрезке. Более того, $F(x) = 2x^2 - \frac{2}{x}$ не является первообразной функции $\mathrm{y} = \frac{4\mathrm{x}^3+2}{\mathrm{x}^2}$ на отрезке *[-1;1]*, поскольку точка *0*, принадлежащая отрезку, не входит в область определения функции. Следовательно, не существует определенный интеграл Римана и Ньютона-Лейбница для функции $\frac{4x^3+2}{x^2}$ на отрезке *[-1;1]*.

В вычислении площади криволинейной трапеции состоит ***геометрический смысл определенного интеграла.*** Вычислив определенный интеграл

$\int_a^b f(x)dx$, мы найдем площадь фигуры, ограниченной линиями y = f(x), y = 0, x = a и x = b.

Пример3.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 8),\ \ y = 0,\ \ x = -2,\ \ x = 4$.

Решение.

Построим эту фигуру. Прямая *y = 0* совпадает с осью *Ox*, прямые *x = -2* и *x = 4* параллельны оси *Oy*, а графиком функции $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 8) = \frac{1}{3}(x+1)^2 - 3$

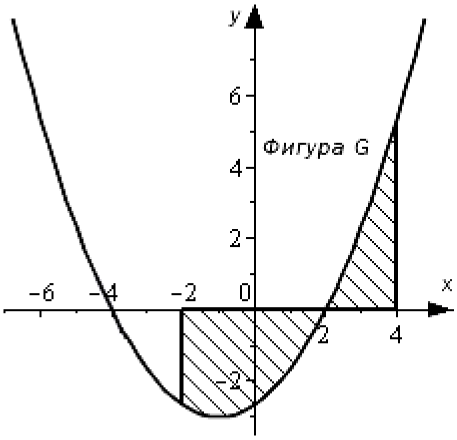
является парабола с вершиной в точке *(-1; -3)* ветви которой направлены вверх. Найдем точки пересечения этой параболы с осью абсцисс:

$$y = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 8) = 0 \ \ \leq> x^2 + 2x - 8$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} => \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Следовательно, эта парабола пересекает ось абсцисс в точках *(-4; 0)* и *(2; 0)*. Таким образом, наша фигура *G* имеет следующий вид.

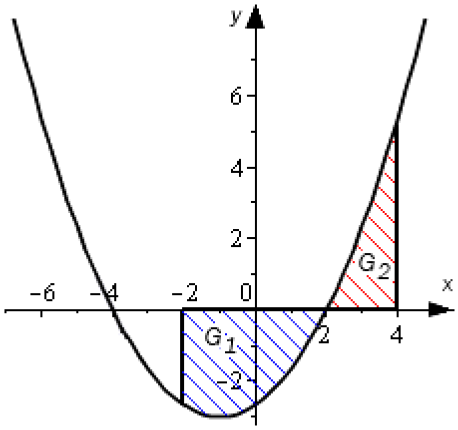


Эта фигура не является криволинейной трапецией, так как функция

$y = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 8)$ меняет знак на отрезке *[-2; 4]*.

Как же быть в этом случае? Очень просто. Фигуру *G* можно представить в виде объединения двух криволинейных трапеций $G = G_1 \cup G_2$ и по <u>свойству аддитивности площади</u> $S(G) = S(G_1) + S(G_2)$

.



На отрезке *[2; 4]* график параболы находится в неотрицательной области, поэтому $S(G_2) = \int_2^4 \frac{1}{3}(x^2+2x-8)\,dx$. На отрезке *[-2; 2]* функция $y = \frac{1}{3}(x^2+2x-8)$ неположительная, следовательно, в силу замечания к геометрическому смыслу определенного интеграла, имеем $S(G_1) = \int_{-2}^2 \frac{1}{3}(x^2+2x-8)\,dx$. Осталось вычислить определенные интегралы по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S(G) = S(G_1) + S(G_2) = -\int_{-2}^2 \frac{1}{3}(x^2+2x-8)\,dx + \int_2^4 \frac{1}{3}(x^2+2x-8)\,dx =$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x\right)\Bigg|_{-2}^{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 8x\right)\Bigg|_{2}^{4} = -\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + 2^2 - 8\cdot 2 - \right.$$

$$\left.\left(\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 8\cdot(-2)\right)\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4^3}{3} + 4^2 - 8\cdot 4 - \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 - 8\cdot 2\right)\right) =$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{8}{3} - 12 + \frac{8}{3} - 20\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 12\right) = \frac{124}{9}$$

Обратите внимание на то, что нельзя находить площадь этой фигуры как

$$S(G) = \int_{-2}^{4} \frac{1}{3}(x^2+2x-8)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4^3}{3} + 4^2 - 8\cdot 4 - \left(\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 8\cdot(-2)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{64}{3} - 16 + \frac{8}{3} - 20\right) = -4$$

В нашем примере полученное таким образом значение представляет собой разность $S(G_2) - S(G_1)$.

Пример 3

Определить силу давления воды на стенку аквариума с основанием 1,8 м и высотой 0,6 м.

Дано: I=1,8м H=0,6м	Решение:
F-?	$$P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot sF = \int pds.$$ Величина р давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины ее погружения х, т.е. от расстояния площадки до поверхности жидкости Р=10^3 $^{кг}/_{м^3}$ $p = \rho \cdot g \cdot x$. G=9,8$^{м}/_{с^2}$Площадь этой полоски $ds = I \cdot dx$. $$F = \int_0^{0,6} \rho g x \cdot I \cdot dx = \rho g I \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,6} = \frac{\rho g I}{2}(0,36 - 0)$$ $$= 0,18 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1,8 = 3,2(kH).$$

Задания для самостоятельной работы.

1. Вычислите определённый интеграл, применяя формулу Ньютона-Лейбница

1. $\int_3^5 dx$; 2. $\int_0^1 xdx$; 3. $\int_0^2 3x^2dx$; 4. $\int_{-1}^1 (2x+1)dx$; 5. $\int_0^2 3e^{3x}dx$; 6. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx$;

2. Примените формулу Ньютона-Лейбница для вычисления площадей фигур:

a) Осью Ох, прямыми $x = -1,\ x = 2$ и параболой $y = 9 - x^2$;

b) $y^2 = 9x$, x = 16, x = 25, y = 0;

c) $y = -x^2 + 4$ и y = 0; 4. $y = x^2$, y = 1/x, x є [1; e]; 5. $y^2 = x$, $y = x^2$;

d) $y = 8+2x-x^2$, y = x+6;

e) xy = 6 и x + y – 7 = 0; 8.x – 2y + 4 = 0, x + y – 5 = 0, y = 0.

Вопросы для самопроверки

1) Запишите формулу Ньютона-Лейбница

2) В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

Тема 3.4.Дифференциальные исчисления функций нескольких переменных

3.4.1. Подготовить реферат по теме: «Прикладные задачи с использованием дифференциального исчисления»

Критерии оформления реферата смотрите в приложении А

Тема 3.5.Обыкновенные дифференциальные уравнения

3.5.1. Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными.

Цель работы: Отработка навыков решения дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными

Задание: Найдите частные решения дифференциальных уравнений

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях

Дифференциальное уравнение - это равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции. Общий вид дифференциального уравнения: $F(x, y, y', y'' \dots)=0$, здесь F- некоторая известная функция, зависящая от нескольких переменных.

Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных знаков, в Фописаниях конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решении соответствующих дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения называются *обыкновенными*, если неизвестная функция зависит только от одного аргумента.

Порядок дифференциального уравнения – это порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении.

Например: уравнение $y''+5y'-3y=0$ - это дифференциальное уравнение второго порядка.

Интеграл (или решение) уравнение – это функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению.

Например, функция y=2x является интегралом уравнения $x^2y''-2xy'+2y=0$, так как, найдя производные этого уравнения и подставляя их в данное уравнение, мы получим тождество -4x+4x=0.

Общее решение дифференциального уравнения содержит столько независимых постоянных, каков порядок уравнения.

Частное решение-это функция, получаемая при различных числовых значениях произвольных постоянных.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 1

Проверить подстановкой, что дифференциальное уравнение $y'-2y=e^{3x}$ имеет общее решение в виде $y=e^{3x}+Ce^{2x}$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию y=3 при x=0.

Решение:

$$y=e^{3x}+Ce^{2x}y'=3e^{3x}+2Ce^{2x}$$

Подставим дифференциальное уравнение:

$3e^{3x}+2Ce^{2x}-2(e^{3x}+Ce^{2x})=e^{3x}$

$3e^{3x} + 2Ce^{2x} - 2e^{3x} - 2Ce^{2x} = e^{3x}$

$e^{3x} = e^{3x}$ - это тождество.

Частное решение:

$y = e^{3x} + Ce^{2x}$; $3 = e^0 + Ce^0$ =>C=3

$y = e^{3x} + 3e^{2x}$ - частное решение.

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка $P(x,y)dx + Q(x,y) = 0$ называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если функции P и Q разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)f^2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$$

В таком уравнении после деления членов на $f_1(y) \cdot \varphi_1(x)$ перемещенные разделяются:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0$$

И каждый член уравнения зависит от одной переменной.

Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0$$

<u>Пример 1</u>

Найти общие интегралы уравнения:

$$(x+1)^3dy - (y-2)^2dx = 0$$

Решение:

Разделим переменные в данном уравнении, деля обе его части на $(x + 1)^3(y-2)^2$

$$\frac{dy}{(y-2)^2} - \frac{dx}{(x+1)^3} = 0$$

Почленно интегрируя, получим искомое общее решение:

$$-\frac{1}{y-1} + \frac{1}{2(x+1)^2} = C$$

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{y} = (x-1)dx$, при x=2, y=5.

Решение:

$\frac{dy}{y} = xdx - dx$; $\int \frac{dy}{y} = \int xdx - \int dx$;

$\ln|y| = 0{,}5x^2 - x + \ln C$.

Умножим $0{,}5x^2 - x$ на $\ln e$, $(\ln e = 1)$;

$\ln|y| = \ln e^{0{,}5x^2 - x} + \ln C$;

$|y| = C \cdot e^{0{,}5x^2 - x}$ - это общее решение дифференциального уравнения.

Найдем частное решение. Для этого вычислим *C* при x=2 и y=5.

$5 = Ce^{2-2}$ $=> C = 5$. Частное решение $y = 5e^{0{,}5x^2 - x}$.

Задания для самостоятельной работы

Найдите частные решения дифференциальных уравнений

a) $(x+3)\,dy - (y+2)dx = 0,$ если $y = 3$ при $x = 2$;

b) $y' + 2y + 4 = 0,$ если $y = 5$ при $x = 0$

c) $\frac{d^2s}{dt^2} = 12t - 2,$ если $s = 4$ и $\frac{ds}{dt} = 2$ при $t = 1$

d) $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{t}\frac{ds}{dt}$; s=2 и $\frac{ds}{dt} = 1$ при t=1

Вопросы для самопроверки:

4. Какая система называется однородной?
5. Сформулируйте алгоритм решения однородной системы линейных уравнений.
6. Запишите определение дифференциального уравнения
7. Назовите виды дифференциальных уравнений

3.5.2. Решение систем линейных однородных уравнений первого порядка

Цель работы: Отработка навыков решения системы линейных однородных уравнений

Задание: Решите системы линейных уравнений

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Системы линейных однородных уравнений первого порядка.

простейших систем дифференциальных уравнений имеют вид

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1 \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$, где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ - некоторые действительные числа. Сначала покажем метод интегрирования системы уравнений, далее подробно опишем решение примера.

1. Решением такой системы является пара функций $x(t)$ и $y(t)$, обращающая в тождества оба уравнения системы.

2. Опишем метод интегрирования систем дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1 \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$.

3. Исключим неизвестную функцию $x(t)$ из первого уравнения системы. Для этого выразим x из второго уравнения системы $\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2 =>$ $x = \frac{1}{a_1}\left(\frac{dy}{dt} - b_2y - c_2\right)$, продифференцируем по t второе уравнение системы и разрешим его относительно $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a_2\frac{dx}{dt} + b_2\frac{dy}{dt} \quad => \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{a_2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - b_2\frac{dy}{dt}\right)$$

.

4. Подставляем полученные результаты в первое уравнение системы, тем самым неизвестная функция *x(t)* будет исключена:

$$\frac{dx}{dt} = a_2x + b_1y + c_1 \quad => \quad \frac{1}{a_2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - b_2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{dy}{dt} - b_2y - c_2\right) + b_1y + c_1$$

$$<=> \quad \frac{d^2y}{dt^2} - (a_1 + b_2)\cdot\frac{dy}{dt} + (a_1b_2 - a_2b_1)\cdot y = a_2c_1 - a_1c_2$$

Пример 1.

Найдите решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 1 \\ \frac{dx}{dt} = x + 2y - 3 \end{cases}$

Решение.

1. Разрешим второе уравнение системы относительно *x*: $x = \frac{dy}{dt} - 2y + 3$
2. Продифференцируем второе уравнение системы и решим относительно $\frac{dx}{dt}$:

$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} \quad => \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt}$

3. Подставляем полученные результаты в первое уравнение системы дифференциальных уравнений: $\frac{dx}{dt} = x - 1$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} - 2y + 3 - 1$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2 = 2$$

Так мы пришли к ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2 = 2$$

Определив его общее решение, мы получим функцию *y(t)*.

Найдем сначала y_0 - общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Для этого вычислим корни характеристического уравнения

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$k = \frac{3 \pm 1}{2} \quad => \quad \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

Так как корни действительные и различные, то общее решение однородного дифференциального уравнения запишется как $y_0 = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{2t}$

Переходим к нахождению $\tilde{y}$ - частного решения ЛНДУ

$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 2$.

Так как его правая часть представляет собой многочлен нулевой степени, то частное решение будем искать в виде $\tilde{y} = A$, где A – неопределенный коэффициент.

Определим его из равенства $\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} - 3\frac{d\tilde{y}}{dt} + 2\tilde{y} = 2$

$$\frac{d^2(A)}{dt^2} - 3\frac{d(A)}{dt} + 2A = 2 \quad => \quad 2A = 2 \quad => A = 1$$

Таким образом, $\tilde{y} = 1$ и $y(t) = y_0 + \tilde{y} = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 1$.

Итак, одна неизвестная функция найдена.

Подставим эту функцию во второе уравнение системы дифференциальных уравнений и разрешим полученное равенство относительно *x(t)*:

$$\frac{d(C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 1)}{dt} = x + 2(C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 1) - 3$$

$$C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} = x + 2C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - 1$$

$$x = -C_1 e^t + 1$$

Так мы получили вторую неизвестную функцию $x(t) = -C_1 e^t + 1$..

Ответ: $\begin{cases} x(t) = -C_1 e^t + 1 \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 1 \end{cases}$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$\begin{cases} x^{/} = 3x - y \\ y^{/} = 4x - y \end{cases} \qquad x(0) = 5 \quad y(0) = 8$$

2. Найти частное решение системы линейных ДУ, соответствующее заданным начальным условиям

3. $\begin{cases} x^{/} = 2x - 5y + 3 \\ y^{/} = 5x - 6y + 1 \end{cases} \qquad x(0) = 6 \quad y(0) = 5$

3.5.3. Дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Цель работы: Отработка навыков решения дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Задание: Найдите общее решение дифференциальных уравнений:

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y^{//} + py^{/} + qy = 0.$ с постоянными коэффициентами имеет вид $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где y_1 и y_2 – частные линейно независимые решения, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Осталось научиться находить частные решения y_1 и y_2.

Эйлер предложил искать частные решения в виде $y = e^{kx}$.

Если принять $y = e^{kx}$ частным решением ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами $y^{//} + py^{/} + qy = 0$, то при подстановке этого решения в уравнение мы должны получить тождество:

$$(e^{kx})^{//} + p(e^{kx})^{/} + qe^{kx} = 0$$

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0$$

Так мы получили так называемое **характеристическое уравнение** линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решения k_1 и k_2 этого характеристического уравнения определяют частные решения $y_1 = e^{k_1x}$ и $y_2 = e^{k_2x}$ нашего ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

В зависимости от коэффициентов p и q корни характеристического уравнения могут быть:

1. действительными и различными $k_1 \neq k_2, \quad k_1, k_2 \in R$,
2. действительными и совпадающими $k_1 = k_2 = k_0, \quad k_0 \in R$,
3. комплексно сопряженной парой $k_1 = \alpha + i \cdot \beta, \quad k_2 = \alpha - i \cdot \beta$.

Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y^{//} + py^{/} + qy = 0$.

Записываем характеристическое уравнение $k^2 + p \cdot k + q = 0$.

Находим корни характеристического уравнения k_1 и k_2.

В зависимости от значений корней характеристического уравнения записываем общее решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами в виде:

1. $y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ если $k_1 \neq k_2, \quad k_1, k_2 \in R$
2. $y_0 = C_1 e^{k_0 x} + C_2 x e^{k_0 x}$ если $k_1 = k_2 = k_0, \quad k_0 \in R$
3. $y_0 = e^{\alpha x x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ если $k_1 = \alpha + i \cdot \beta, \quad k_2 = \alpha - i \cdot \beta$

Рассмотрим примеры для каждого случая.

Пример 1

Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$y^{//} + 4y^{/} + 4y = 0$

Решение.

Запишем характеристическое уравнение $k^2 + 4 \cdot k + 4 = 0$. Найдем его корни

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$(k + 2)^2 = 0$$

$$k_1 = k_2 = k_0 = -2$$

Получили два совпадающих корня, следовательно, общее решение имеет виду$y_0 = C_1 e^{k_0 x} + C_2 x e^{k_0 x} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$.

Пример 2

Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{//} - 5y^{/} + 6y = 0$

Решение.

Мы имеем ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1$$

$$k = \frac{5 \pm 1}{2} \quad => \quad \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 3 \end{cases}$$

Корни действительные и различные, поэтому, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

<u>Пример 3</u>

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{//} - y^{/} + 3y = 0$$

Решение.

Характеристическое уравнение ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$k^2 - k + 3 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 3 = -11$$

$$k = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{11} \quad => \quad \begin{cases} k_1 = \frac{1}{2} + i\sqrt{11} \\ k_2 = \frac{1}{2} - i\sqrt{11} \end{cases} \quad => \quad \alpha = \frac{1}{2}, \ \beta = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Получили пару комплексно сопряженных корней характеристического уравнения, следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y_{0=} e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{11}x}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{11}x}{2}\right)$$

Задания для самостоятельной работы

Найдите общее решение дифференциальных уравнений:

1. $y^{//} - 2y^{/} + 7y = 0$
2. $5y^{//} + y^{/} + 2y = 0$
3. $3y^{//} - 2y^{/} + 7y = 0$

Вопросы для самопроверки:

1. Сформулируйте алгоритм решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.5.4. Применение обыкновенных дифференциальных уравнений для профессиональных расчетов

Цель работы: Усовершенствование навыков решения дифференциальных уравнения для решения профессиональных задач

Задание: Найдите общее решение дифференциальных уравнений:

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Примеры применения дифференциального уравнения

Пример 1.

Пружина жесткостью k с прикрепленным к ней грузом массой m находятся в горизонтальной плоскости в положении равновесия, совпадающем с началом координат. Свободный конец пружины закреплен. Пружина параллельна оси Ох. В начальный момент времени грузу сообщают скорость v_0 вдоль Ох. Найти зависимость координаты груза от времени.

В произвольный момент времени координата груза равна x, скорость — v. Запишем закон сохранения энергии: $\frac{mV^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{mV_0^2}{2}$

Выполним следующие преобразования:

$$mV^2 = mV_0^2 - kx^2 \quad => \quad V^2 = V_0^2 - \frac{k}{m}x^2 \quad => \quad V = V_0\sqrt{1-\frac{kx^2}{mV_0^2}}$$

Введя обозначение $\omega^2 = \frac{k}{m}$ и записав скорость в виде $V = \frac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнения с разделяющимися переменными:

$\frac{dx}{dt} = V_0\sqrt{1 - \left(\frac{\omega x}{V_0}\right)^2}$. Разделим переменные: Для этого выполним замену $\left(\frac{\omega x}{V_0}\right) = \sin z$. Тогда $\sqrt{1 - \left(\frac{\omega x}{V_0}\right)^2} = \sqrt{1 - sin^2 z} = \cos z$. Выразим дифференциал dx:

$x = \frac{V_0}{\omega}\sin z$, $dx = \frac{dx}{dz}dz = \left(\frac{V_0}{\omega}\sin z\right)^{/} dz = \frac{V_0}{\omega}\cos z dz$.

Теперь интегрируем: Подставляя в уравнение, имеем:

$$\frac{V_0}{\omega} arcsin \frac{\omega x}{V_0} \Big|_0^x = V_0 t \Big|_0^t \qquad arcsin \frac{\omega x}{V_0} = \omega t \qquad x = \frac{V_0}{\omega}\sin \omega t$$

Движения, происходящие по закону синуса или косинуса называются гармоническими колебаниями. Рассмотренная система называется пружинным маятником. Видно, что в нашем случае максимальный модуль координаты равен $\frac{V_0}{\omega}$. Он часто обозначается буковой А и называется амплитудой колебаний. Амплитуда гармонических колебаний всегда определяется начальными условиями.

Ответ: $x = A\sin \omega t$ $\qquad A = \frac{V_0}{\omega}$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Задания для самостоятельной работы

1. Скорость остывания нагретого тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. За 10 минут тело охладилось от 100 до 60 градусов. Температура среды постоянна и равна 20 градусам. Когда тело остынет до 25 градусов?

2. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $\upsilon_0 = 20 км/ч$. На полном ходу её мотор выключается и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до $\upsilon_1 = 8 км/ч.$ Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость движения лодки через 2 мин. после остановки мотора.

3. Конденсатор ёмкостью C включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд конденсатора в момент времени t после включения.

РАЗДЕЛ 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Тема 4.1. Элементы комбинаторики

4.1.1 Применение комбинаторики для решения профессиональных задач

Цель работы: Совершенствование умений решать задачи содержащие элементы комбинаторики.
Задание: Решите задачи с элементами комбинаторики

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

1. Размещения без повторений

Подсчитаем количество способов расположить n различных элементов по k различным позициям $(k < n)$. Такие расположения называются размещениями, а их количество, от французского слова *arrangement* обозначается A_n^k. В случае, если k=n количество предметов совпадает с количеством имеющихся мест, и это уже изученная задача о числе перестановок.

Если из n объектов выбирают k штук, то число выборов последнего объекта есть n-k невыбранных объектов, что означает наличие

n-k+1 возможности выбора последнего выбранного объекта. То же, другими словами: после выбора первых k-1 элемента остается выбрать

n-(k-1)=n-k+1 элемент.

Теорема: число размещений n различных элементов по k различным позициям есть $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$, или, в терминах факториалов, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Примечание: заметим, что в случае, когда число мест, по которым размещают предметы, совпадает с количеством самих предметов, т. е. когда k=n, рассматриваемая задача становится задачей о числе перестановок. В нашем случае при этом мы получаем в знаменателе дроби ноль факториал, и для того, что бы разные формулы, соответствующие одной и той же задаче, приводили к одинаковым результатам, полагают, что 0!=1.

2. Сочетания

Подсчитаем количество способов, которыми можно выбрать k из n различных предметов. Такие выборки называются сочетаниями, а их количество обозначается C_n^k.

При $k < n$, выбрать k предметов из n можно A_n^k способами, переставляя их P_k способами: $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.

Рекуррентная формула: $C_m^n = C_m^{n-1} \frac{m-n+1}{n}$

$$C_m^n = C_m^{m-n}; \quad C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$$

Свойства сочетаний: $C_m^n = C_m^{m-n}$;.

3. Перестановки с повторениями

Пусть даны n_1 элементов первого типа, n_2 — второго типа, ..., n_k___k- го типа, всего n элементов. Способы разместить их по n различным местам называются перестановками с повторениями. Их количество обозначается $P_n(n_1, n_2, \cdots, n_k)$.

Теорема: число перестановок с повторениями есть

$$\mathrm{P_n}(\mathrm{n_1}, \mathrm{n_2}, \cdots, \mathrm{n_k}) = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{n_1}!\mathrm{n_2}!\cdots\mathrm{n_k}!}$$

Размещения с повторениями

Пусть даны n различных видов предметов, которые можно разместить по k различным местам, причем выбирать предметы можно с повторениями (т.е. можно выбрать несколько предметов одного вида). Такие выборки называются размещениями с повторениями, а их количество вычисляется по формуле: $\overline{A_n^k} = n^k$.

4. Сочетания с повторениями

Пусть имеются предметы n различных видов предметов, и из них составляются наборы, содержащие k элементов. Такие выборки называются сочетаниями с повторением. Их число обозначается $\bar{C}_n^k$.

Теорема: число сочетаний с повторениями может быть вычислено по формулам: $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$

Задания для самостоятельной работы:

1) Сколькими способами можно в группе из 21 студентов выбрать старосту, заместителя старосты и физорга?
2) Порядок выступлений 9 участников конкурса определяется жеребьевкой. Сколько вариантов жеребьевки при этом возможно?
3) В семье двое детей. Найдите вероятность, что старший ребенок – мальчик.
4) В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны по очереди извлекаются 2 шара. Найти вероятность того, что вынутые шары одного цвета.
5) Игральную кость бросают два раза. Найдите вероятность того, что в сумме выпало не менее 10 очков.
6) Игральная кость брошена 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «шестерка».
7) Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что среди 4 фирм-нарушителей будет выявлено больше половины.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основную формулу размещений без повторений.
2. Что значит сочетание событий?
3. Какие события называются случайными?

Тема 4.2.Основы теории вероятностей и математической статистики

4.2.1. Решение задач на вычисление вероятностей с использованием элементов математической статистики

Цель работы: Совершенствование умений решать задачи содержащие элементы математической статистики

Задание 1: Выполните задания на вычисление количества вариантов событий.

Задание 2: Выполнение задания на вычисление вероятностей случайных событий с использованием элементов математической статистики».

Ход работы

Краткие теоретические сведения:

1. Теория вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется ***вероятностью*** этого события и обозначается символом *P(A).*

Определение. Вероятностью события *A* называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события *A*, к числу *n* всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Следовательно, для нахождения вероятности события необходимо, рассмотрев различные исходы испытания, подсчитать все возможные несовместные исходы *n,* выбрать число интересующих нас исходов m и вычислить отношение *m* к *n*.

Из этого определения вытекают следующие свойства:

Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.

Действительно, число m искомых событий заключено в пределах $0 \le m \le n$. Разделив обе части на *n*, получим

$0 \le P(A) \le 1$.

2. Вероятность достоверного события равна единице, т.к. $n/n = 1$.

3. Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку $0/n = 0$.

<u>Пример 1</u>:. В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

Решение. Число всех равновозможных независимых исходов *n* равно числу сочетаний из 18 по 5 т.е.

$$n = C_{18}^{5} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 18 \cdot 17 \cdot 28 = 8568$$

Подсчитаем число m, благоприятствующих событию A. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно

$$C_{14}^{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число комбинаций *m* составляет

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184.$$

Искомая вероятность события A равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2184}{8568} \approx 0{,}255.$$

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$P(A + B) = P(A) + P(B)$ или

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Следствие 1. Если событие A_1, A_2, : ,A_n образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Следствие 2**.** Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

2. Математическая статистика

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики – разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а)оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен;

б)проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.
Выборочной совокупностью или просто выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность

объектов, из которых производится выборка.

Статистическим рядом распределения называют перечень всех значений x_i из выборки и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде интервального статистического ряда, т.е. последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Пример. Пусть объем выборки n = 20 и

x_i	2	6	12
m_i	3	10	7

Найдем относительные частоты:

$P_1^* = \frac{3}{20} = 0,15$; $P_2^* = \frac{10}{20} = 0,50$; $P_3^* = \frac{7}{20} = 0,35$.

Тогда распределение относительных частот:

x_i	2	6	12
P_i^*	0,15	0,50	0,35

Контроль: $0,15 + 0,50 + 0,35 = 1$.

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1: Выполните задания на вычисление количества вариантов событий

1.1. Найти число размещений: 1) A_{11}^3; 2) A_9^2; 3) A_{12}^5; 4) A_6^3; 5) A_7^5.

1.2. Вычислить значение выражения: 1) 3! + 4!; 2) 5! – 2!; 3) 6! * 2!

1.3. Вычислить:1) C_6^4; 2) C_5^1; 3) C_7^3; 4) C_4^2

1.4. Вычислить:1) $\frac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3} + A_5^2 * A_4^2 * A_3^2$

1.5. Вычислить: 1) $P_3 - P_4$; 4) 45+$P_2 * P_4$; 5) $P_6 + P_5$.

Задание 2: Выполнение задания на вычисление вероятностей случайных событий с использованием элементов математической статистики.

2.1. Из корзины, в которой находятся 9 красных, 8 желтых и 7 зеленых шаров, наудачу вынимается один. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется: а) красным, б) желтым; в) черным; г) зеленым.

2.2. В корзине находятся 30 белых и 20 черных шаров. Наугад вынимают один шар, который оказался белым, и откладывают его в сторону. Наугад вынимают еще один шар, который оказался черным, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

2.3. В колоде 36 карт. Наудачу вынимаются 2карты. Найти вероятность того, что это будут два туза

2.4. Дискретная случайная величина *X*имеет закон распределения.

x_i	*0,2*	*0,4*	*0,6*	*0,8*	*1*
p_i	*0,1*	*0,2*	*0,4*	P_4	*0,1*

Чему равна вероятность $P_4(X = 0{,}8)$? Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2.5. Дискретная случайная величина *X*имеет закон распределения.

x_i	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
p_i	P_1	*0,15*	P_3	*0,25*	*0,35*

Найти вероятность $P_1(x = 3)$ и $P_3(x = 5)$, если известно, что P_3в 4 раза больше P_1. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2.6. Известны значения распределения случайных величин X и Y — число очков выбиваемых первым и вторым стрелками.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Необходимо выявить, какой из двух стрелков стреляет лучше. Построить многоугольники распределения.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая величина называется случайной?
2. Закон распределения случайных величин
3. Что называется плотностью вероятности
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей
5. Формула полной вероятности
6. Формула Бернулли

ЛИТЕРАТУРА

1. Пехлецкий И.Д. Математика [Текст] : учеб. пособие для студ. Учреждений сред. проф. образования /И.Д. Пехлецкий. - 12-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2017 . - 320с.
2. Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. Учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 2-е изд., стер. – М: Издательский центр «Академия», 2018. – 368 с.

Приложение А

Методические рекомендации по выполнению реферата

Реферат – это самостоятельная исследовательская работа, в которой автор раскрывает суть исследуемой проблемы; приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды не нее. Содержание реферата должно быть логичным; изложение материала носит проблемно-тематический характер.

Реферат – это один из самых сложных видов самостоятельной работы с книгой, а для этого следует овладеть более простыми приемами работы – разработкой плана, составлением тезисов и конспектов. Подготовка реферата и выступление с его изложением углубляет знания, расширяет кругозор, приучает логически, творчески мыслить, развивать культуру речи.

При просмотре литературы намечается ориентировочный план реферата, в который включается обычно 3-4 основных вопроса или раздела. В каждом из разделов формулируются подвопросы, помогающие последовательно раскрыть содержание проблемы.

В процессе изучения материала формулировки подвопросов и разделов обычно уточняются. При реферировании следует делать выписки, записывать мысли, возникающие при чтении; следует также точно записывать и определения тех понятий, которые будут использованы в реферате. Из прочитанной литературы нужно заимствовать не буквальный текст, а важнейшие мысли, идеи, теоретические положения; можно цитировать небольшие отрывки, приводить диаграммы, схемы, чертежи, но главное – высказывать собственные соображения по вопросам реферата. Приведенные выше советы следует рассматривать как примерные, предполагающие и другие подходы, поскольку у каждого человека вырабатываются свои приемы и навыки составления рефератов. Большую помощь в работе над рефератом оказывают предисловия к сборникам. В них можно найти сведения о цели издания, а также о существующих пробелах в исследовании.

При разработке плана реферата важно учитывать, чтобы каждый его пункт раскрывал одну из сторон избранной темы, а все пункты в совокупности охватывали тему целиком. Различают несколько композиционных решений реферата: во-первых, хронологическое, когда тема раскрывается в исторической последовательности; во-вторых, описательное, при котором тема расчленяется на составные части, в целом раскрывающие определенное явление; в-третьих, аналитическое, когда тема исследуется в ее причинно-следственных связях и взаимозависимых проблемах. Важно следить за тем, чтобы каждый пункт плана был соотнесен с главной темой и не содержал повторения в других пунктах. Важными разделами реферата является вступление и заключение. Во вступлении надо обосновать актуальность темы, обозначить круг составляющих ее проблем, четко и кратко определить задачу своей работы. В заключении делаются краткие выводы, подводятся итоги. В конце реферата должен быть приложен список литературы.

В отличие от конспекта реферат требует большей творческой активности, самостоятельности в обобщении изученной литературы, умения логически стройно изложить материал, оценить различные точки зрения на исследуемую проблему и высказать о ней собственное мнение. В реферате важно связать теоретические положения с практикой.

Таким образом, реферативная работа – это самостоятельная работа, которая должна свидетельствовать о знании литературы по данной теме, ее основной проблематике, отражать точку зрения студента на эту проблему, его умение осмысливать явления жизни на основе теоретических знаний.

При оценке реферата обычно руководствуются следующими критериями:

1. Удалось ли его студенту раскрыть сущность данной проблемы;
2. Сумел ли студент показать связь рассматриваемой проблемы с жизнью;
3. Проявил ли студент самостоятельность и творческий подход в изложении реферата;
4. Можно ли считать реферат логически стройным и т.д.

Реферат должен быть правильно оформлен. Содержание и оформление разделов реферата:

Титульный лист. Является первой страницей реферата и заполняется по строго определенным правилам. В верхнем поле указывается полное наименование учебного заведения. В среднем поле дается заглавие реферата, которое проводится без слова " тема " и в кавычки не заключается. Далее, ближе к правому краю титульного листа, указываются фамилия, инициалы студента, написавшего реферат, а также его курс и группа. Немного ниже или слева указываются название и код специальности, фамилия и инициалы преподавателя - руководителя работы. В нижнем поле указывается год написания реферата.

После титульного листа помещают оглавление, в котором приводятся все заголовки работы и указываются страницы, с которых они начинаются. Заголовки оглавления должны точно повторять заголовки в тексте. Сокращать их или давать в другой формулировке и последовательности нельзя. Все заголовки начинаются с прописной буквы без точки на конце. Последнее слово каждого заголовка соединяют отточием / …………… / с соответствующим ему номером страницы в правом столбце оглавления. Заголовки одинаковых ступеней рубрикации необходимо располагать друг под другом. Заголовки каждой последующей ступени смещают на три - пять знаков вправо по отношению к заголовкам предыдущей ступени.

Введение. Здесь обычно обосновывается актуальность выбранной темы, цель и содержание реферата, указывается объект / предмет / рассмотрения, приводится характеристика источников для написания работы и краткий обзор имеющейся по данной теме литературы. Актуальность предполагает оценку своевременности и социальной значимости выбранной темы, обзор литературы по теме отражает знакомство автора реферата с имеющимися источниками, умение их систематизировать, критически рассматривать, выделять существенное, определять главное.

Основная часть. Содержание глав этой части должно точно соответствовать теме работы и полностью ее раскрывать. Эти главы должны показать умение исследователя сжато, логично и аргументировано излагать материал, обобщать, анализировать, делать логические выводы.

Заключительная часть. Предполагает последовательное, логически стройное изложение обобщенных выводов по рассматриваемой теме.

Библиографический список использованной литературы составляет одну из частей работы, отражающей самостоятельную творческую работу автора, позволяет судить о степени фундаментальности данного реферата.

В работах используются следующие способы построения библиографических списков: по алфавиту фамилий, авторов или заглавий; по тематике; по видам изданий; по характеру содержания; списки смешанного построения. Литература в списке указывается в соответствии с Методическими указаниями по оформлению

В приложении помещают вспомогательные или дополнительные материалы, которые загромождают текст основной части работы / таблицы, карты, графики, неопубликованные документы, переписка и т.д. /. Каждое приложение должно начинаться с нового листа / страницы / с указанием в правом верхнем углу слова " Приложение" и иметь тематический заголовок. При наличии в работе более одного приложения они нумеруются арабскими цифрами / без знака " № " /, например, " Приложение 1". Нумерация страниц, на которых даются приложения, должна быть сквозной и продолжать общую нумерацию страниц основного текста. Связь основного текста с приложениями осуществляется через ссылки, которые употребляются со словом " смотри " / оно обычно сокращается и заключается вместе с шифром в круглые скобки - (см. прил.1)/.

Приложение В

Методические рекомендации по подготовке компьютерной презентации к докладу

Целью любой презентации является визуальное представление замысла автора, максимально удобное для восприятия слушателями и побуждающее их на позитивное взаимодействие с автором.

В соответствии с этим, презентации, сопутствующие защите работы (реферата, творческой работы, курсового или дипломного проекта) можно разделить на сопровождающие и дополняющие.

Сопровождающие презентации отражают содержание доклада, т. е. содержат ту же информацию. В данной презентации целесообразно акцентировать внимание на понятиях и определениях, статистических данных, выводах.

Дополняющая презентация не воспроизводит содержание доклада, она его расширяет, детализирует. В качестве таких дополнения могут быть иллюстрации, соответствующие ходу доклада; графики, диаграммы, характеризующие динамику, изменения, соотношение; таблицы, схемы и т.д. В данном случае вы представляете информацию, выходящую за рамки доклада, но имеющую на неё ссылки. Это может быть выражено фразами «Динамику развития вы можете наблюдать на слайде № 7», «Детально схема представлена на слайде № 11» и т.п.

С учетом того, что объем доклада составляет обычно 7 – 10 минут, что соответствует 3 – 4 листам печатного текста, для наиболее удачного представления работы достаточно от 5-7 до 12-15. При меньшем количестве слайдов будет невозможно ни сопроводить доклад, ни, тем более, его дополнить. Большее количество слайдов будет нести много лишней, второстепенной информации, послужит источником рассеивания внимания слушателей, и. как следствие, низкой оценке доклада.

Слайды в презентации имеют свои правила оформления и представления информации. Соблюдение этих правил важно для объективного и положительно восприятия Вашей презентации.

Оформление слайдов

Стиль оформления	Соблюдайте единый стиль оформления. Избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации.
Фон	Для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый).
Звуковой фон	Не должен мешать. Не злоупотребляйте звуковым фоном в ущерб восприятию информации слайда.
Использование цвета	На одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста. Для фона и текста используйте контрастные цвета.

Анимационные эффекты	Используйте возможности компьютерной анимации для предоставления информации на слайде. НО! Не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде.

Представление информации

Содержание информации	Используйте короткие слова и предложения. Минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных. Заголовки должны привлекать внимание.
Расположение информации на странице	Предпочтительно горизонтальное расположение информации. Наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана. Если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней. Максимальное число строк на слайде – 8, большее их число не будет восприниматься.
Шрифты	Для заголовков – 32 - 36. Для информации – 28. Шрифты без засечек (Arial, ArialBlack, Tahoma, и т.д.) легче читать с большого расстояния. Нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации. Для выделения информации желательно использовать жирный шрифт, курсив использовать как можно реже. Подчеркивание использовать нельзя, т.к. это ассоциируется с гиперссылками. Нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв).
Способы выделения информации	Следует использовать: рамки, границу, заливку; разные шрифта цветов, штриховку, стрелки; рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных факторов.
Объем информации	Не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: студенты могут единовременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений. Наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом; с таблицами; с диаграммами.
Оформление заголовков	Точка в конце не ставиться, если заголовок состоит из двух предложений – ставиться. Не рекомендуется писать длинные заголовки. Слайды не могут иметь одинаковые заголовки. Если хочется назвать одинаково надо писать в конце (1), (2), (3), или продолжение

	(продолжение 1), (продолжение 2).
Оформление диаграмм	У диаграммы должно быть название или таким названием может служить заголовок слайда. Диаграмма должна занимать все место на слайде. Линии и подписи должны быть хорошо видны.
Оформление таблиц	Должно быть название таблицы. Читаемость. Шапка таблицы должна отличаться от основных данных.
Последний слайд	Спасибо за внимание. Поблагодарите Ваших слушателей!