Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине

«МАТЕМАТИКА»

для студентов 2 курса специальности

15.02.01 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям)

(базовая подготовка)

Челябинск, 2019 г.

Методические рекомендации составлены в соответствии с программой учебной дисциплины «Математика», для специальности 15.02.01. Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям) (базовая подготовка)
.

ОДОБРЕНО

Предметной (цикловой) комиссией
протокол №
«___»_____________2019г.

Председатель ПЦК
_________/ О.И. Макаренко /

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора по НМР
__________Т.Ю. Крашакова
«___»__________2019 г.

Автор: Чернова И.И., преподаватель Южно-Уральского государственного технического колледжа
.

АКТ СОГЛАСОВАНИЯ

Методических рекомендаций по выполнению практических работ
по дисциплине «Математика» для специальности
15.02.01. Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям) (базовая подготовка), разработанных преподавателем Южно-Уральского государственного технического колледжа Черновой И.И.

Учебная дисциплина «Математика» является частью программы подготовки специалистов среднего звена согласно ФГОС по специальности СПО 15.02.01. Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям) (базовая подготовка). Учебная дисциплина «Математика» относится к математическому и общему естественнонаучному циклу и определяет общий объем знаний и умений, составляющих базу профессиональных компетенций.

Практическая направленность учебной дисциплины реализуется через выполнение практических работ, на проведение которых программой отводится 32 часа.

Методические рекомендации по выполнению практических работ разработаны с учетом требований работодателя к подготовке специалистов среднего звена по данной специальности и включают в себя 16 практических работ, направленных на развитие умений анализировать сложные функции и строить их графики; выполнять действия над комплексными числами; вычислять значения геометрических величин; производить операции над матрицами и определителями; решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений; решать системы линейных уравнений различными методами.

Практические работы обеспечивают условия для формирования компетентности специалистов в осуществлении поиска и использования информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития, в использовании информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности, в работе с коллективом, руководством, потребителями.

Методические рекомендации по выполнению практических работ могут быть использованы для работы в учреждениях среднего профессионального образования

Технический директор
ЗАО «ВММ-2» Р.Г. Девальд

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для студентов 2 курса, обучающихся по специальности 15.02.01. Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям) (базовая подготовка).

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Методические рекомендации предназначены для организации выполнения практических работ по учебной дисциплине «Математика».

Программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 16 практических работ (32 часа), направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ОК 10. Исполнять воинскую обязанность, в том числе с применением полученных профессиональных знаний (для юношей).

ПК 1.1. Руководить работами, связанными с применением грузоподъёмных механизмов, при монтаже и ремонте промышленного оборудования.

ПК 1.2. Проводить контроль работ по монтажу и ремонту промышленного оборудования с использованием контрольно-измерительных приборов.

ПК 1.3. Участвовать в пусконаладочных работах и испытаниях промышленного оборудования после ремонта и монтажа.

ПК 1.4. Выбирать методы восстановления деталей и участвовать в процессе их изготовления.

ПК 1.5. Составлять документацию для проведения работ по монтажу и ремонту промышленного оборудования.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен

уметь:

– анализировать сложные функции и строить их графики;

–выполнять действия над комплексными числами;

–вычислять значения геометрических величин;

–производить операции над матрицами и определителями;

–решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;

–решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;

–решать системы линейных уравнений различными методами;

знать:

основные математические методы решения прикладных задач;

–основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;

–основы интегрального и дифференциального исчисления;

–роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Описание каждой практической работы содержит номер, название и цель работы, формируемые в процессе выполнения работы знания, умения (элементы компетенций), теоретическое изложение необходимого материала (при необходимости примеры выполнения заданий), варианты заданий, описание алгоритма выполнения работы и контрольные вопросы (с целью выявить и устранить недочеты в освоении материала).

Для получения дополнительной, более подробной информации по основным вопросам учебной дисциплины в конце методических рекомендаций приведен перечень информационных источников.

Отчеты студентов по практическим работам должны выполняться в отдельных тетрадях, содержать номер, название и цель работы, выполненные задания и их результаты.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№п/п	Название практической работы	часы
1	Действия над матрицами. Умножение матриц. Нахождение обратной матрицы.	2
2	Вычисление определителей.	2
3	Решение систем линейных уравнений различными методами	2
4	Действия над комплексными числами в алгебраической форме	2
5	Геометрическое изображение комплексных чисел	2
6	Действия над комплексными числами в тригонометрической форме	2
7	Вычисление скалярного произведения векторов	2
8	Составление уравнения прямой на плоскости и в пространстве	2
9	Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей.	2
10	Вычисление пределов, сводящихся к замечательным пределам	2
11	Вычисление производных элементарных и сложных функций	2
12	Вычисление неопределённых и определённых интегралов	2
13	Решение прикладных задач с использованием интегрального исчисления	2
14	Решение прикладных задач с использованием дифференциального исчисления	2
15	Решение прикладных задач с использованием комбинаторики	2
16	Решение задач на вычисление вероятностей	2
ИТОГО:		**32**

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Название практической работы: ***Действия над матрицами. Умножение матриц. Нахождение обратной матрицы.***

Цель работы: научиться выполнять действия над матрицами, находить обратную матрицу.

знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

Выполнять действия над комплексными числами; производить операции над матрицами и определителями.

Теоретический материал:

Матрицей $A = A_{mn}$ порядка $m \times n$ называется *прямоугольная таблица чисел, содержащая m - строк и n – столбцов*

$$\mathrm{A} = \mathrm{A_{mn}} = (\mathrm{a_{ij}}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \mathrm{B}_{mn} = (b_{ij}), \quad \mathrm{C} = C_{mn} = (C_{ij})$$

Действия над матрицами.

1. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового порядка называют матрицу $C = (c_{ij})$ такого же порядка, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В то есть $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

2. Аналогично, разностью двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ и одинакового порядка называют матрицу $C = (c_{ij})$ такого же порядка, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц А и В то есть

3. $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

4. Умножение матрицы на число

$$1 \cdot A = A \qquad 0 \cdot A = 0$$

$$m \cdot (k \cdot A) = (m \cdot k) \cdot A \; (m + k) \cdot A = m \cdot A + k \cdot A$$

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

5. Умножение матриц

Произведение матрицы$A_{m \cdot n}$ на матрицу $B_{n \cdot k}$ называется матрица $C_{m \cdot k}$ такая, что элемент матрицы С, стоящий –ой строке и j-ом столбце, т.е. элемент C_{ij}, равен сумме произведений элементов i –ой строки матрицы А на соответствующие элементы i –ого столбца матрицы В.

Пример 1

Найдите сумму и разность матриц А и В, если $A = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$и $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 6 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: Найдём сумму двух заданных матриц

$$A + B = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & 2 + 8 \\ -3 + (-3) & 4 + 6 \\ 0 + 10 & 7 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix};$$

Найдём разность двух заданных матриц

$$A - B = \begin{pmatrix} 12 - (-4) & 2 - 8 \\ -3 - (-3) & 4 - 6 \\ 0 - 10 & 7 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ 0 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример 2

Найдите произведение $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Решение: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Пример 3

Найдите произведение матриц А и В, если $А_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B_{33} =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$А_{23} \cdot В_{33} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$А_{23} \cdot В_{33} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Задание: Выполните по ходу работы

1. Найдите произведение матриц А и В, если А=$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$, В=$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 0 \end{vmatrix}$;

2. Найдите обратную матрицу $А^{-1}$: $А = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. Дано:$А = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$и$В = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) 3А+В б) АВ в)$А^{-1}$ г)$А^{-1}А$

Контрольные вопросы:

1. Какие операции можно производить с матрицами?
2. Алгоритм нахождения обратной матрицы?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

Название практической работы: ***Вычисление определителей***

Цель работы: научиться вычислять определители разными способами.

знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

выполнять действия над комплексными числами **;**производить операции над матрицами и определителями

Теоретический материал:

1. Определитель2-го порядка

Определителем второго порядка называется выражение вида:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$=$a_{11}a_{22}$-$a_{21}a_{12}$; Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называют элементами определителя.

Диагональ, образованная элементами a_{11}; a_{22}, называется главной, а диагональ, образованная элементами $a_{12}a_{21}$ - побочной.

Таким образом, определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Заметим, что в ответе получается число.

<u>Пример 1</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-3\cdot 2=-6.$$

2. Определитель3-го порядка

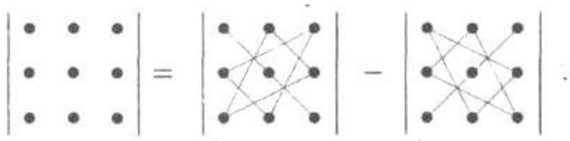
Определителем третьего порядка называется выражение вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Элементы $a_{11,}\ a_{22,}\ a_{33}$ – образуют главную диагональ. Числа $a_{31,}\ a_{22,}\ a_{13}$ – образуют побочную диагональ.

Изобразим, схематически, как образуются слагаемые с плюсом и с минусом:



С плюсом входят: произведение элементов на главной диагонали, остальные два слагаемых являются произведением элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали.

Слагаемые с минусом образуются по той же схеме относительно побочной диагонали.

Это правило вычисления определителя третьего порядка называют **правилом треугольника или правилом Саррюса:**

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 8\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 8\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot (2) - 1\cdot 1 \cdot (-1) = -8 + 4 + 3 - 8 - 12 + 1 = -36$$

3. Вычисление определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Вычисление определителя третьего порядка сводится к вычислению трех определителей второго порядка.

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 38$$

Задание: Вычислите определители:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}. \qquad A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -8 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}.. \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -6 & -3 & -2 \end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Контрольные вопросы:

1) Что называется определителем 2-го порядка?

2) Назовите два способа вычисления 3-го порядка.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

Название практической работы: ***Решение систем линейных уравнений различными методами.***

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений

знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

выполнять действия над комплексными числами; производить операции над матрицами и определителями; решать системы линейных уравнений различными методами

Теоретический материал:

1.Формулы Крамера для системы из двух уравнений

Системы из двух уравнений $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$,

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы и обозначается Δ (дельта):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определители Δx, Δy получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}a_{22} - b_2a_{12} \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Найти значения x и y возможно только при условии, если $\Delta \neq 0$.

Этот вывод следует из следующей теоремы.

2. Теорема Крамера: *Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка.*

Таким образом, ф*ормулы Крамера для системы из двух уравнений:* x=$\frac{\Delta x}{\Delta}$, y= $\frac{\Delta y}{\Delta}$.

<u>Пример 1.</u> Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = -3 \end{cases}$$

Согласно формулам получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10 \quad => \quad x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -9 - 1 = -10 \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1$$

Ответ: $x_1 = 1 \;\; x_2 = -1$

Частные случаи

Три случая при решении систем линейных уравнений:

1) система линейных уравнений имеет единственное решение(система совместна и определённа)

Условия: $\Delta \neq 0 \quad \frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$.

2) система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений(система совместна и неопределённа)

Условия: $\Delta = 0$, $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$, т.е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны.

3) система линейных уравнений решений не имеет(система несовместна)

Условия: $\Delta = 0$, $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$

Итак, система m линейных уравнений с n переменными называется *несовместной*, если у неё нет ни одного решения, и *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система уравнений, имеющая только одно решение, называется *определённой*, а более одного –*неопределённой*.

3.Формулы Крамера для системы из трех уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Где Δ (дельта) составлен из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

А определители Δx, Δy, Δz получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Найти значениях, y и zвозможно только при условии, если: $\Delta \neq 0$.

<u>Пример 2</u>. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 79,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158,$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237,$$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 5$; $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -2$; $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 3$.

Ответ: (5; -2; 3)

Задание: Решить систему методом Крамера

1. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 6x - 8y = 10 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ 5x - y - z = 10 \\ x - y + 5z = -12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 7x + 7y + 3z = 2 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 4y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 3z = 9 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ 2x - 8y + 6z = 10 \\ 3x - 12y + 9z = 15 \end{cases}$

Контрольные вопросы

1) Что называется системой линейных уравнений?

2) Какая система называется совместной, какая несовместной?

3) Какая система называется определенной и неопределенной?

4) При каком условии можно использовать формулы Крамера для решения системы уравнений?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

Название практической работы: ***Действия над комплексными числами в алгебраической форме.***

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами заданными в алгебраической форме.

знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

выполнять действия над комплексными числами

Теоретический материал:

Определение. Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b - действительные числа. При этом выполняются условия:

а) Два комплексных числа $a_1 + b_1i$ и $a_2 + b_2i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

б) Сложение комплексных чисел определяется правилом:

$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\ i.$

в) Умножение комплексных чисел определяется правилом:

$(a_1 + b_1i)\ (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)\ i.$

Алгебраическая форма комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называют алгебраической формой комплексного числа, где a – действительная часть, bi – мнимая часть, причем b – действительное число.

Комплексное число $a + bi$ считается равным нулю, если его действительная и мнимая части равны нулю: $a = b = 0$

Комплексное число $a + bi$ при $b = 0$ считается совпадающим с действительным числом a: $a + 0i = a$.

Комплексное число $a + bi$ при $a = 0$ называется чисто мнимым и обозначается bi: $0 + bi = bi$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Над комплексными числами в алгебраической форме можно выполнять следующие действия.

1) Сложение.

Определение. Суммой комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число z, действительная часть которого равна сумме действительных частей z_1 и z_2, а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел z_1 и z_2, то есть $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Числа z_1 и z_2 называются слагаемыми.

Сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1°. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2°. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3°. Комплексное число $-a - bi$ называется противоположным комплексному числу $z = a + bi$. Комплексное число, противоположное комплексному числу z, обозначается $-z$. Сумма комплексных чисел z и $-z$ равна нулю: $z + (-z) = 0$

Пример 1. Выполните сложение $(3 - i) + (-1 + 2i)$.

$(3 - i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2)\, i = 2 + 1i$.

2) Вычитание.

Определение. Вычесть из комплексного числа z_1 комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z + z_2 = z_1$.

Теорема. Разность комплексных чисел существует и притом единственна.

Пример 2. Выполните вычитание $(4 - 2i) - (-3 + 2i)$.

$(4 - 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2)\, i = 7 - 4i$.

3) Умножение.

Определение. Произведением комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называется комплексное число z, определяемое равенством: $z = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.

Числа z_1 и z_2 называются сомножителями.

Умножение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1°. Коммутативность: $z_1z_2 = z_2z_1$

2°. Ассоциативность: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

3°. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

4°. $\overline{z}= (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ - действительное число.

На практике умножение комплексных чисел производят по правилу умножения суммы на сумму и выделения действительной и мнимой части.

В следующем примере рассмотрим умножение комплексных чисел двумя способами: по правилу и умножением суммы на сумму.

Пример 3. Выполните умножение (2 + 3i) (5 – 7i).

1 способ. (2 + 3i) (5 – 7i) = (2× 5 – 3× (- 7)) + (2× (- 7) + 3× 5)i = = (10 + 21) + (-14 + 15)i = 31 + i.

2 способ. (2 + 3i) (5 – 7i) = 2× 5 + 2× (- 7i) + 3i× 5 + 3i× (- 7i) = = 10 – 14i + 15i + 21 = 31 + i.

4) Деление.

Определение. Разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z \cdot z_2 = z_1$.

Теорема. Частное комплексных чисел существует и единственно, если $z_2 \neq 0 + 0i$.

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \quad + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

5) Возведение в целую положительную степень.

а) Степени мнимой единицы.

Пользуясь равенством $i^2 = -1$, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

$i^3 = i^2 i = -i$,

$i^4 = i^2 i^2 = 1$,

$i^5 = i^4 i = i$,

$i^6 = i^4 i^2 = -1$,

$i^7 = i^5 i^2 = -i$,

$i^8 = i^6 i^2 = 1$ и т. д.

Это показывает, что значения степени i^n, где n – целое положительное число, периодически повторяется при увеличении показателя на 4 .

Поэтому, чтобы возвести число i в целую положительную степень, надо показатель степени разделить на 4 и возвести i в степень, показатель которой равен остатку от деления.

Пример 5. Вычислите: $(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23}$.

$i^{36} = (i^4)^9 = 1^9 = 1,$

$i^{17} = i^{4\times 4+1} = (i^4)^4 \times i = 1 \cdot i = i.$

$i^{23} = i^{4\times 5+3} = (i^4)^5 \times i^3 = 1 \cdot i^3 = - i.$

$(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23} = (1 + i)(- i) = - i + 1 = 1 - i.$

б) Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных сомножителей.

Пример 6. Вычислите: $(4 + 2i)^3$

$(4 + 2i)^3 = 4^3 + 3\times 4^2\times 2i + 3\times 4\times (2i)^2 + (2i)^3 = 64 + 96i - 48 - 8i = 16 + 88i.$

Задание: Выполните задания по ходу работы:

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 7i$

   Найдите:

   a) $z_1 + z_2$

   b) $z_1 \cdot z_2$

2. Произведите умножение комплексных чисел: $(2 + 3i) \cdot (5 - 7i)$
3. Вычислите: $\frac{8+2i}{5-3i}$
4. Решите уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$

Контрольные вопросы:

1. Как обозначается комплексное число?
2. Формы комплексного числа?
3. Какие действия производятся над комплексными числами?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

Название практической работы: ***Геометрическое изображение комплексных чисел***

Цель работы: научится выполнять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

Выполнять действия над комплексными числами; вычислять значения геометрических величин

Теоретический материал:

Комплексная плоскость — это плоскость с прямоугольной декартовой системой координат xOy.

Комплексные числа на этой плоскости изображаются в виде точек либо в виде векторов.

I. Геометрическая интерпретация комплексных чисел в виде точек на комплексной плоскости

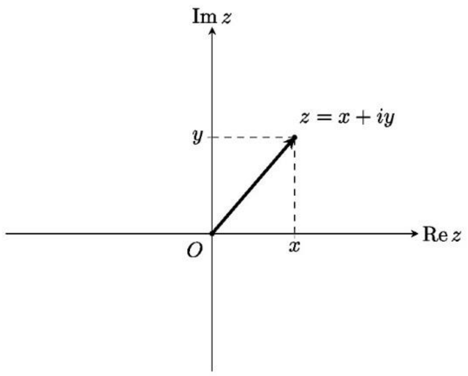
Каждому комплексному числу z=a+bi на комплексной плоскости соответствует точка z(a;b).

И наоборот, каждую точку z(a;b) плоскости можно считать изображением комплексного числа z=a+bi.

Таким образом, геометрическое изображение комплексных чисел в виде точек координатной плоскости устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости.

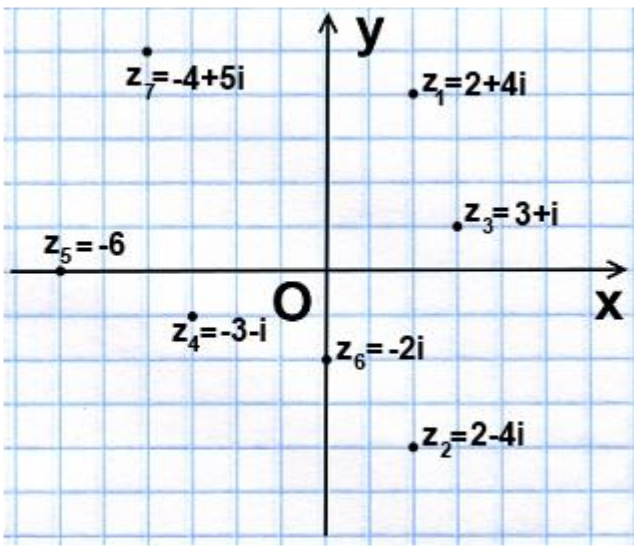
Действительные числа z=a+0i на комплексной плоскости изображаются точками с координатами (a;0) (лежащими на оси Ox), чисто мнимые числа z=0+bi — точками с координатами (0;b) (на оси Oy).

Поэтому ось абсцисс *Ox* называют *действительной осью и обозначаетсяRE(z)*, а ось ординат *Oy — мнимой осью и обозначается IM(z)*



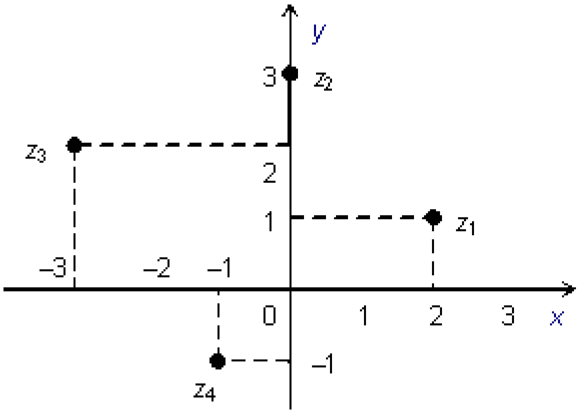
.

<u>Комплексно-сопряженные числа</u> на плоскости изображаются точками, симметричными относительно оси Ox; противоположные комплексные числа — точками, симметричными относительно точки O (начала координат).



<u>Пример 1</u>

Изобразим на комплексной плоскости числа $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3 + 2i$, $z_4 = -1 - i$, $z_5 = -3$:

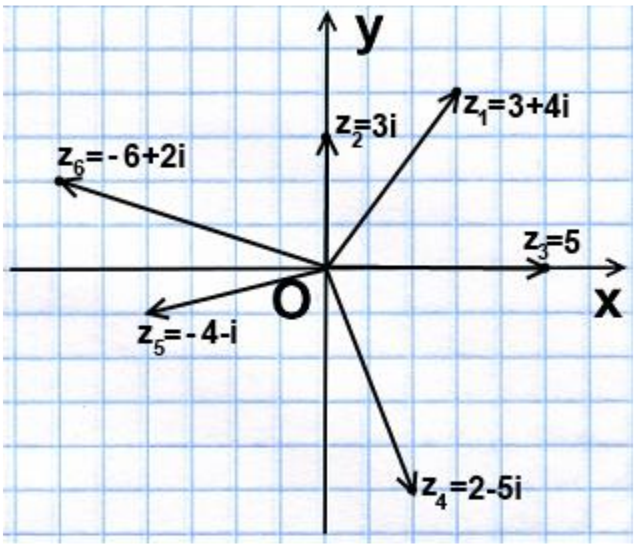


Изображение комплексных чисел точками плоскости

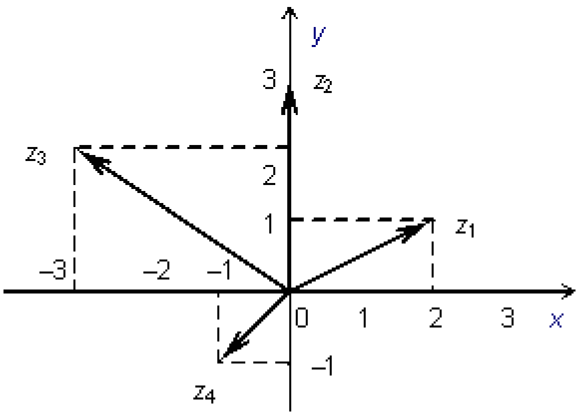
2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел в виде радиус-векторов

Комплексные числа изображаются также векторами с началом в точке О и концом в точке z(a:b) (радиус-векторами).

Соответствие между комплексными числами и радиус-векторами также является взаимно однозначным.

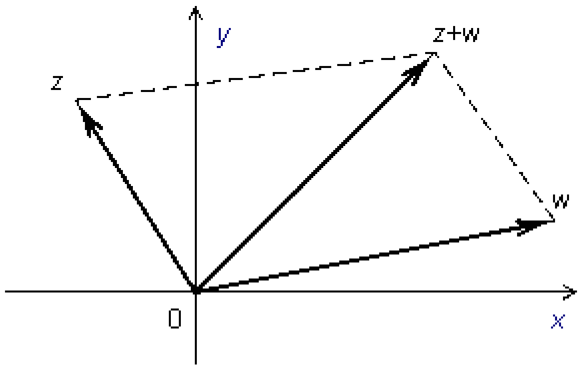


В случае изображение комплексных чисел из предыдущего примера 1 будет таким:

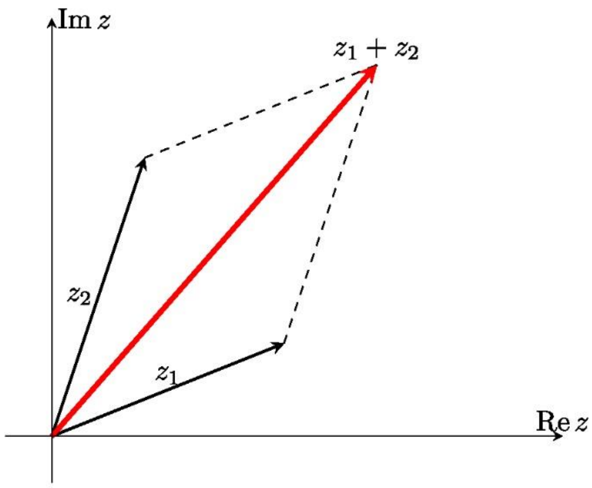


Изображение комплексных чисел векторами

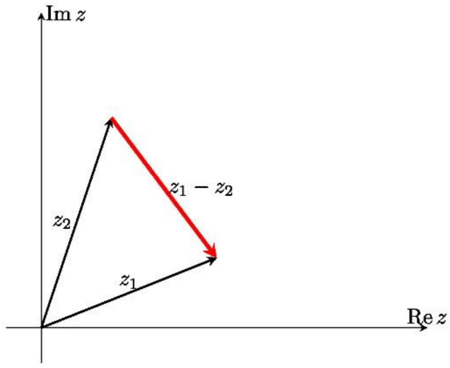
Геометрически сумма комплексных чисел в виде радиус-векторов строятся по правилу параллелограмма сложения векторов.



Изображение суммы комплексных чисел



Геометрически комплексные числа также можно вычитать, как векторы.

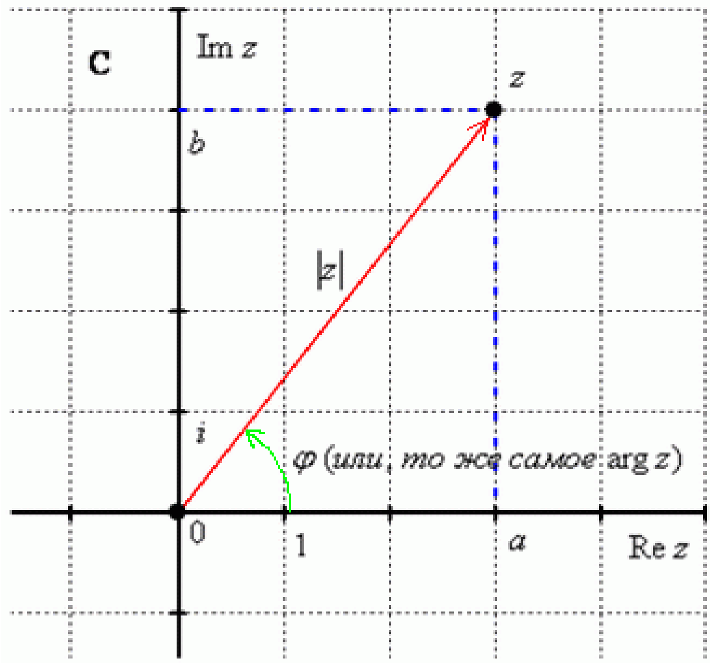


Разность $z_1 - z_2$ представляется вектором, конец которого находится в точке z_1, а начало --- в точке z_2.

На комплексной плоскости удобно изображать различные множества комплексных чисел, удовлетворяющие заданным условиям

Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, ***модуль* – *это длина*** радиус-вектора. Обозначение: $|z|$ или r

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, где значения a *и* b - ***любые***.



Задание: Выполните задания по ходу работы

1. Изобразите на комплексной плоскости середину отрезка, соединяющего точки:
   a) -1-2i и -3-4i
   b) 3-4i и 7-6i
2. Изобразите на комплексной плоскости точки пересечения отрезка, соединяющего точки
   a) -1+3i и 4-2i,
   b) -1+3i и 4-2i, с осями координат
3. Изобразите на плоскости середину отрезка, соединяющего точки 3-4i и 7-6i
4. Вычислите:
   a) $(\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + 2i)$
   b) $\frac{6-i}{3+4i}$

Контрольные вопросы:

1. Какая плоскость называется комплексной?
2. Как можно изображать комплексные числа на плоскости?
3. Какие операции можно производить с комплексными числами на плоскости?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

Название практической работы: ***Действия над комплексными числами в тригонометрической форме***

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

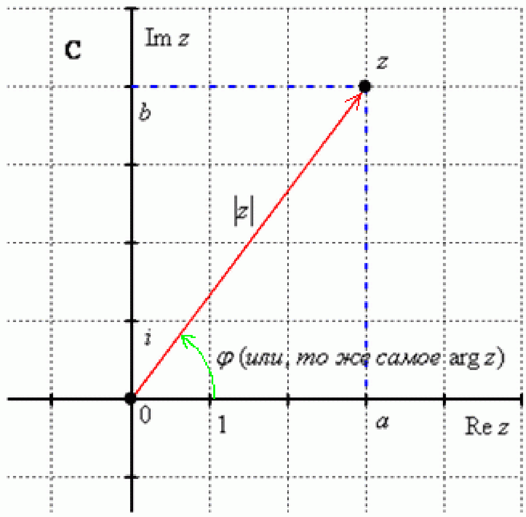
умения:

выполнять действия над комплексными числами

Теоретический материал:

Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в тригонометрической форме: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ – это **модуль комплексного числа**, а φ – **аргумент комплексного числа**. Не разбегаемся, всё проще, чем кажется.

Изобразим на комплексной плоскости число $z = a + bi$. Для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти, т.е. считаем, что $a > 0,\ b > 0$:



Аргумент комплексного числа z стандартно обозначают: φ или $\arg z$

Из геометрических соображений получается следующая формула для нахождения аргумента: $\arg z = arctg\frac{b}{a}$.

Внимание! Данная формула работает только в правой полуплоскости! Если комплексное число располагается не в 1-й и не 4-й координатной четверти, то формула будет немного другой. Эти случаи мы тоже разберем.

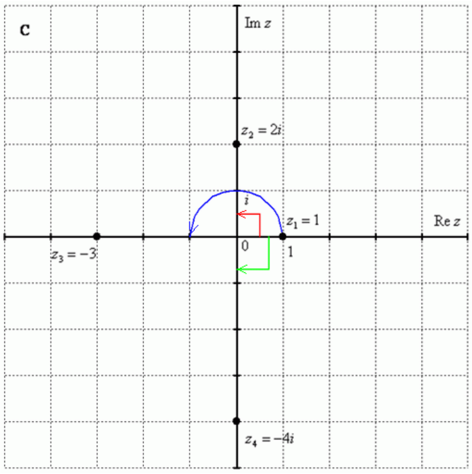
Но сначала рассмотрим простейшие примеры, когда комплексные числа располагаются на координатных осях.

Пример 1

Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

$z_1 = 1, \quad z_2 = 2i\,, \quad z_3 = -3, \quad z_4 = -4i\,.$

Выполним чертёж:



Для наглядности перепишу тригонометрическую форму комплексного числа: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Запомним, модуль – **длина** (которая всегда неотрицательна), аргумент – **угол**.

1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_1| = 1$. Формальный расчет по формуле: $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

2) Очевидно, что $\varphi_1 = 0$ (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_1 = \cos 0 + i\sin 0$. Ясно, как день, обратное проверочное действие: $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

3) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_2| = 2$. Формальный расчет по формуле: $|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

Очевидно, что $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ (или 90 градусов). На чертеже угол обозначен красным цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):

$$z_2 = \left(2\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$$

3) Представим в тригонометрической форме число $|z_3| = -3$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_3| = 3$. Формальный расчет по формуле: $|z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$. Очевидно, что $\varphi_3 = \pi$ (или 180 градусов). На чертеже угол обозначен синим цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме:

$$z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Проверка: $z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -3$

4) И четвёртый интересный случай. Представим в тригонометрической форме число $z_4 = -4$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $z_4 = 4$. Формальный расчет по формуле: $|z_4| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4.$

Аргумент можно записать двумя способами: Первый способ: $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ (270 градусов), и, соответственно: $z_4 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$

Проверка: $z_4 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 4\big(0 + i \cdot (-1)\big) = -4i$

Однако более стандартно следующее правило: **Если угол больше 180 градусов**, то его записывают со знаком минус и противоположной ориентацией («прокруткой») угла: $\varphi_4 = \frac{-\pi}{2}$ (минус 90 градусов), на чертеже угол отмечен зеленым цветом. Легко заметить, что $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ – это один и тот же угол.

Таким образом, запись принимает вид: $z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Внимание! Ни в коем случае нельзя использовать четность косинуса, нечетность синуса и проводить дальнейшее «упрощение» записи:

$$z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \neq \cancel{4\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

Перейдем к рассмотрению более распространенных случаев. С модулем проблем не возникает, всегда следует использовать формулу $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. А вот формулы для нахождения аргумента будут разными, это зависит от того, в какой координатной четверти лежит число $z = a + bi$. При этом возможны три варианта:

1) Если $a > 0$ (1-я и 4-я координатные четверти, или правая полуплоскость), то аргумент нужно находить по формуле $\arg z = arctg\frac{b}{a}$.

2) Если $a < 0,\ \ b > 0$ (2-я координатная четверть), то аргумент нужно находить по формуле $\arg z = \pi + arctg\frac{b}{a}$.

3) Если $a < 0,\ \ b < 0$ (3-я координатная четверть), то аргумент нужно находить по формуле $\arg z = -\pi + arctg\frac{b}{a}$.

<u>Пример 2</u>: Комплексное число z=-i представить в тригонометрической форме.

Решение: Для заданного числа действительная часть a=0, а мнимая часть b= -1 . Тогда <u>модуль этого числа</u> $|\mathrm{z}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+1} = 1$

а аргумент $\varphi = arctg\frac{-1}{0} = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Отсюда получаем, что $z = 1 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

Ответ: $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

<u>Пример 3</u>:

Записать число z в алгебраической и тригонометрической формах, $z = \frac{5}{1+2i}$

Решение:

$$\frac{5}{1+2i} = \frac{(5+0\cdot i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5-10i+0\cdot i-0\cdot i}{1^2-(2i)^2} = \frac{5-10i}{1+4} = \frac{5-10i}{5}$$
$$= 1 - 2i$$

$z = 1 - 2i$ - алгебраическая форма комплексного числа

Чтобы записать число в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2+b^2}$ - модуль комплексного числа, φ - аргумент комплексного числа, нужно определить искомые величины модуля и аргумента. Поэтому $r =$

$\sqrt{1^2+(-2)^2}$, $\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{-2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Отсюда угол φ находится в четвёртой четверти, и комплексное число запишем в тригонометрической форме $z=\sqrt{5}\left(\cos\frac{36\sqrt{5}}{\pi}+\sin\frac{72\sqrt{5}}{\pi}\right)$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1. Умножение комплексных чисел:

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

2. Деление комплексных чисел: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$
3. Возведение комплексного числа в натуральную степень:
4. $z^n=\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ Формула Муавра

<u>Пример 4:</u> Найти произведение комплексных чисел z_1 = 2cos 50º + 2 i sin 50º, z_2 = cos 40º + i sin 40º.

Решение. Тригонометрические формы этих чисел имеют вид:

z_1 = 2 · (cos 50º + i sin 50º), z_2 = 1· (cos 40º + i sin 40º).

Тогда $z_1 \cdot z_2$ = 1· 2 · (cos (50º + 40º) + i sin (50º + 40º)) = 2(cos 90º + i sin 90º) = 2(0 + i) = 2i.

<u>Пример 5</u>: Найти частное комплексных чисел z_1 = 2cos 50º + 2 i sin 50º, z_2 = cos 40º + i sin 40º.

Решение. Тригонометрические формы этих чисел имеют вид:

z_1 = 2 · (cos 50º + i sin 50º), z_2 = 1· (cos 40º + i sin 40º).

Тогда (cos (50º — 40 º) + i sin (50º — 40º)) = 2(cos 10º + i sin 10º).

Задание: Выполните задания по ходу работы

1. Даны комплексные числа $z_1=12(\cos 225^\circ+\sin 225^\circ)$ и $z_2=\frac{3}{2}(\cos 75^\circ+\sin 75^\circ)$. Найдите их произведение $z_1\cdot z_2$ и частное $\frac{z_1}{z_2}$. Ответ запишите в алгебраической форме.
2. Вычислите: $z=2\left((\cos 24^\circ+\sin 24^\circ)\right)^5$

3. Запишите в тригометрической форме комплексное число: $z = \sqrt{3} + i$
4. Произведите умножение комплексных чисел: $(\cos 40^{\circ} + i \sin 40^{\circ}) \cdot 3(\cos 50^{\circ} + i \sin 50^{\circ})$

Контрольные вопросы:

1. Что такое модуль и аргумент комплексного числа?
2. Перечислите формы записи комплексного числа.
3. Какие выполняются действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

Название практической работы: ***Вычисление скалярного произведения векторов***

Цель работы: Научиться выполнять линейные операции над векторами и находить скалярное произведение векторов.

знания:

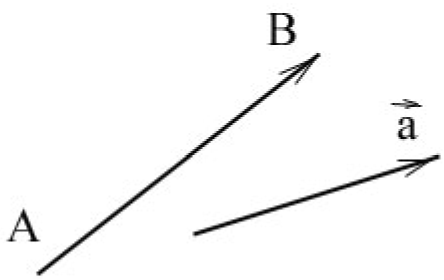
основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

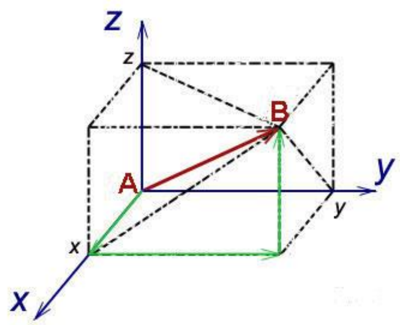
вычислять значения геометрических величин;

Теоретический материал:

Векторы занимают особое место среди объектов, рассматриваемых в высшей математике, поскольку каждый вектор имеет не только числовое значение - длину, но и физическое и геометрическое - направленность. Вектор, представленный направленным отрезком, идущим от точки A к точке B, обозначается так: $\overrightarrow{AB}$.

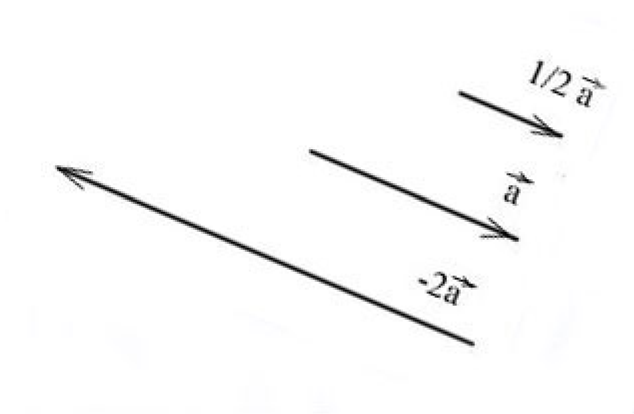


Геометрический вектор представлен в двумерном и трёхмерном пространстве в виде *направленного отрезка*, т.е. отрезка, у которого различают начало и конец.
Если A - начало вектора, а B - его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или одной строчной буквой $\vec{a}$. На рисунке конец вектора указывается стрелкой



Длиной (или **модулем**) геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина порождающего его отрезка $|AB|$

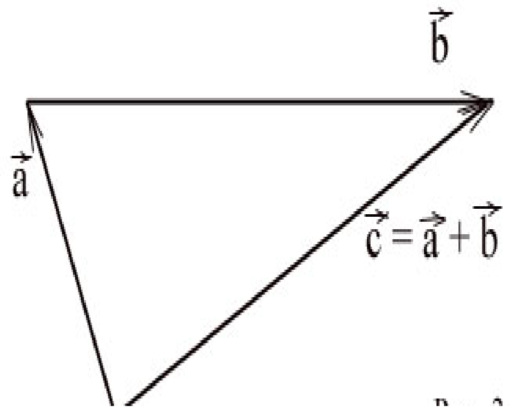
Линейные операции над геометрическими векторами



Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, получающийся из вектора $\vec{a}$ растяжением (при $\lambda > 1$) или сжатием (при $\lambda < 1$) в $|\lambda|$ раз, причём направление вектора $\vec{a}$ сохраняется, если $\lambda > 0$, и меняется на противоположное, если $\lambda < 0$.

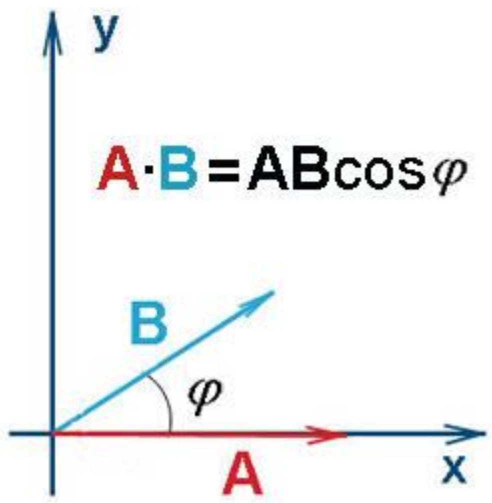
Из определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ всегда расположены на одной или на параллельных прямых. Такие векторы называются *коллинеарными*. (Можно говорить также, что эти векторы параллельны, однако в векторной алгебре принято говорить "коллинеарны".) Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны отношением. $\vec{b} = \lambda\vec{a}$



Сложение и вычитание векторов

При сложении векторов нужно знать, что *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называ ется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$.

Скалярное произведение векторов



Определение 1. Скалярным произведением двух векторов называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Согласно определению, формула выглядит так $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \bullet |\vec{b}| \cos\varphi$.

Скалярное произведение векторов позволяет находить угол между двумя векторами. Поэтому оно часто встречается в последующих разделах математики, особенно, аналитической геометрии. Стоит ли говорить о том, что нахождение скалярного произведения векторов - фундаментальный навык для любого будущего инженера, проектирующего всё что угодно

<u>Пример 1</u>. Даны $\vec{a},\ \vec{b}$. Найти $\vec{a} \bullet \vec{b}$, если

$|\vec{a}| = 3;\ |\vec{b} = 8|;\ \varphi(\vec{a},\ \vec{b}) = \frac{\pi}{6}.$

Решение:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 3 \bullet 8 \bullet \cos\frac{\pi}{6} = 3 \bullet 8 \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$$

Алгебраические свойства скалярного произведения векторов

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (переместительное свойство)

$(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$ (сочетательное относительно числового множителя свойство)

$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (распределительное относительно суммы векторов свойство)

$\vec{a}\vec{a} > 0$, если $\vec{a}$ - ненулевой вектор, и $\vec{a}\vec{a} = 0$, если $\vec{a}$ - нулевой вектор.

$\vec{a} \bullet \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Пример 2:Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2, \quad |\bar{b}| = 5, \quad \angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b})$. В данном случае:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $\bar{a}\bar{b} = 5\sqrt{3}$

Угол между векторами и значение скалярного произведения

В Примере 2 скалярное произведение получилось положительным. От чего зависит знак скалярного произведения. Смотрим на нашу формулу: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b})$. Длины ненулевых векторов всегда положительны: $|\bar{a}| > 0, |\bar{b}| > 0$, поэтому знак может зависеть только от значения косинуса.Угол между векторами может изменяться в пределах $0 \le \angle(\bar{a};\bar{b}) \le \pi$, и при этом возможны следующие случаи:

1) Если **угол** между векторами **острый**: $0 < \angle(\bar{a};\bar{b}) < \frac{\pi}{2}$ (от 0 до 90 градусов), то $\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) > 0$, и **скалярное произведение будет положительным**: $\bar{a}\bar{b} > 0$. Особый случай: если векторы *сонаправлены*, то угол между ними считается нулевым $\angle(\bar{a};\bar{b}) = 0$, и скалярное произведение также будет положительным. Поскольку $\cos 0 = 1$, то формула упрощается: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$.

2) Если **угол** между векторами **тупой**: $\frac{\pi}{2} < \angle(\bar{a};\bar{b}) < \pi$ (от 90 до 180 градусов), то $\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) < 0$, и, соответственно, **скалярное произведение отрицательно**: $\bar{a}\bar{b} < 0$. Особый случай: если векторы *направлены противоположно*, то угол между ними считается *развёрнутым*: $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \pi$ (180 градусов). Скалярное произведение тоже отрицательно, так как $\cos\pi = -1$

Справедливы и обратные утверждения:

1) Если $\bar{a}\bar{b} > 0$, то угол между данными векторами острый. Как вариант, векторы сонаправлены.

2) Если $\bar{a}\bar{b} < 0$, то угол между данными векторами тупой. Как вариант, векторы направлены противоположно.

Но особый интерес представляет третий случай:

3) Если **угол** между векторами **прямой**: $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{2}$ (90 градусов),

то $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и **скалярное произведение равно нулю**: $\bar{a}\bar{b} = 0$. Обратное тоже верно: если $\bar{a}\bar{b} = 0$, то $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{2}$. Компактно утверждение формулируется так: **Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны**. Короткая математическая запись: $\bar{a}\bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

Задание: По координатам точек А, В и С для указанных векторов найти:а) модуль вектора а; б) скалярное произведение векторов а и в.

1) A(4, 6, 3), B(-5, 2, 6), C(4, -4, -3), a=4$\overrightarrow{CB}$ - $\overrightarrow{AC}$, в=$\overrightarrow{AB}$.

2) A(4, 3, -2), B(-3, -1, 4), C(2, 2, 1), a=-5$\overrightarrow{AC}$ +2$\overrightarrow{CB}$, в=$\overrightarrow{AB}$.

3) A(-2, -2, 4), B(1, 3, -2), C(1, 4, 2), a=2$\overrightarrow{AC}$ -3$\overrightarrow{BA}$, в=$\overrightarrow{BC}$.

4)A(2, 4, 3), B(3, 1, -4), C(-1, 2, 2), a=2$\overrightarrow{BA}$ +4$\overrightarrow{AC}$, в=$\overrightarrow{BA}$.

5) A(2, 4, 5), B(1, -2, 3), C(-1, -2, 4), a=3$\overrightarrow{AB}$ -4$\overrightarrow{AC}$, в=$\overrightarrow{BC}$.

6) A(-1, -2, 4), B(-1, 3, 5), C(1, 4, 2), a=3$\overrightarrow{AC}$ -7$\overrightarrow{BC}$, в=$\overrightarrow{AB}$.

7) A(1, 3, 2), B(-2, 4, -1), C(1, 3, -2), a=2$\overrightarrow{AB}$ +5$\overrightarrow{CB}$, в=$\overrightarrow{AC}$.

8) A(2, -4, 3), B(-3, -2, 4), C(0, 0, -2), a=3$\overrightarrow{AC}$ -4$\overrightarrow{CB}$, в=$\overrightarrow{AB}$.

9) A(3, 4, -4), B(-2, 1, 2), C(2, -3, 1), a=5$\overrightarrow{CB}$ +4$\overrightarrow{AC}$, в=$\overrightarrow{BA}$.

10) A(0, 2, 5), B(2, -3, 4), C(3, 2, -5), a=-3$\overrightarrow{AB}$ +4$\overrightarrow{CB}$, в=$\overrightarrow{AC}$.

Решение типового варианта:

По координатам точек A(-5, 1, 6), B(1, 4, 3) и C(6, 3, 9) найти: а) модуль вектора а=4$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; скалярное произведение векторов а и в=$\overrightarrow{BC}$.

а) Находим $\overrightarrow{AB}$=(6, 3, -3), $\overrightarrow{BC}$=(5, -1, 6), 4$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$=(29, 11, -6), $\left|4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{29^2+11^2+(-6)^2}=\sqrt{998}$

б) Имеем а=(29, 11, -6), в=(5, -1, 6). Тогда а·в=29·55+11·(-1)+(-6) ·6=98.

Контрольные вопросы:

1. Запишите определение вектора
2. Запишите правило сложения и вычитания векторов
3. Оформите и сдайте отчет преподавателю.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

Название практической работы: ***Составление уравнения прямой на плоскости и в пространстве***

Цель работы: Научиться выполнять линейные операции над векторами, составлять уравнение прямой на плоскости и в пространстве.

знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

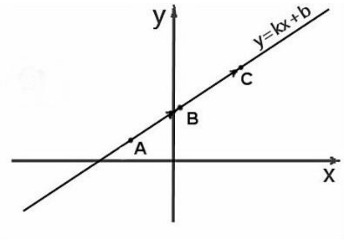
умения:

анализировать сложные функции и строить их графики; вычислять значения геометрических величин

Теоретический материал:

Пусть на координатной плоскости построена прямая, проходящая через две заданные точки. Отметим на прямой произвольную точку C, её координаты ($x;y$). Обозначим два вектора:

$\overrightarrow{AC}$ **и** $\overrightarrow{AB}$



Известно, что у векторов, лежащих на параллельных прямых (либо на одной прямой), соответствующие координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} \quad \textbf{или} \quad \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} \qquad (1)$$

Отношения координат "x" и координат "y" таких векторов равны.

Теперь остаётся только вспомнить, что для определения координат вектора необходимо из соответствующих координат конца вектора вычесть координаты его начала:

у нас $A(x_1; y_1)$ $B(x_2; y_2)$ $C(x; y)$

Значит координаты векторов имеют вид:

$$x_{\overrightarrow{AC}} = x - x_1 \qquad y_{\overrightarrow{AC}} = y - y_1$$

$$x_{\overrightarrow{AB}} = x_2 - x_1 \qquad y_{\overrightarrow{AB}} = y_2 - y_1$$

Подставляем в (1). Получаем формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель. На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ называется **угловым коэффициентом прямой**.

<u>Пример 1:</u> Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Решение. Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad т.е. \quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется

уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой Ax + By + C = 0 $C \neq 0$, то, разделив на –C, получим:

$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент а является координатой точки пересечения
прямой с осью *Ox,* а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью *Oy.*

<u>Пример 2</u>*:* Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

С = 1, $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, а = -1, b = 1.

<u>Пример 3</u>: Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

Уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

Уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, то острый угол между этими прямыми
будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$. Две прямые перпендикулярны,
если $k_1 = -1/k_2$.

Формулы координат середины отрезка

Задача деления отрезка на две равные части – это частный случай деления

отрезка в данном отношении. 

В этом случае отношение выражается пропорцией $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{1} = 1$. И общие

формулы $x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}$ чудесным образом преображаются в нечто

знакомое и простое: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Удобным моментом является тот факт, что координаты концов отрезка можно

безболезненно переставить: $x_M = \frac{x_B + x_A}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_A}{2}$

Для пространственного случая справедлива очевидная аналогия. Если даны концы отрезка $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B z_B)$, то координаты его середины M выражаются

формулами: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$

<u>Пример 4</u>

Параллелограмм $ABCD$ задан координатами своих вершин

$A(-4; 0), B(4; 4), C(7; 2), D(-1; -2)$. Найти точку пересечения его диагоналей.

Решение:

Желающие могут выполнить чертёж. Граффити особенно рекомендую тем, кто капитально забыл школьный курс геометрии.

По известному свойству, диагонали параллелограмма своей точкой пересечения $O(x_O; y_O)$ делятся пополам, поэтому задачу можно решить двумя способами.

Рассмотрим противоположные вершины $A(-4; 0), C(7; 2)$. По формулам деления отрезка пополам найдём середину диагонали AC:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4+7}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

В результате: $O\left(\frac{3}{2}; 1\right)$

Задание: Выполните задания по вариантам

Вариант 1.

1. Найти расстояние между точками A(1;2;3), B(4;5;6);

2. Дан треугольник с вершинами A(-2;0), B(2;4) и C(4;0). Написать уравнение медианы AE.

Вариант 2.

1. Найти расстояние между точками A(2;2;3), B(1;5;6);

2. Даны вершины треугольника ABC: A(4, 3), B(-3, -3), C(2, 7). Найти уравнение медианы AM.

Контрольные вопросы:

1) запишите уравнение прямой по двум точкам.

2) запишите определение медианы треугольника.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Название практической работы: В***ычисление пределов. Раскрытие неопределённостей.***

Цель работы: научиться вычислять пределы.

Знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

Анализировать сложные функции и строить их графики

Теоретический материал:

Определение (нахождение предела функции на бесконечности).

Число *A* называется пределом функции *f(x)* при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности аргументов функции (бесконечно большой положительной или отрицательной), последовательность значений этой функции сходится к A. Обозначается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Замечание.

Предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$ бесконечен, если для любой бесконечно большой последовательности аргументов функции (бесконечно большой положительной или отрицательной), последовательность значений этой функции является бесконечно большой положительной или бесконечно большой отрицательной. Обозначается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Основные неопределенности пределов и их раскрытие.

Основные виды неопределенностей: ноль делить на ноль $\left(\frac{0}{0}\right)$, бесконечность делить на бесконечность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, ноль умножить на бесконечность $(0 \cdot \infty)$, бесконечность минус бесконечность $(\infty - \infty)$, единица в степени бесконечность 1^{∞}, ноль в степени ноль 0^{0}, бесконечность в степени ноль ∞^{0}.

Раскрывать неопределенности позволяет:

- упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);
- использование замечательных пределов;
- применение правила Лопиталя;
- использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным(использование таблицы эквивалентных бесконечно малых).

Сгруппируем неопределенности в **таблицу неопределенностей**. Каждому виду неопределенности поставим в соответствие метод ее раскрытия (метод нахождения предела).

Виды	Методы нахождения предела

неопределённостей	
$\left(\frac{0}{0}\right)$	Необходимо преобразовать и упростить выражение. Если есть выражение вида $\frac{\sin(kx)}{kx}$ или $\frac{kx}{\sin(kx)}$, то применяется первый замечательный предел.
$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Необходимо преобразовать и упростить выражение. Если не помогает, то использовать правило Лопиталя.
$(0 \cdot \infty),(\infty - \infty)$	Необходимо преобразовать неопределённость к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, затем применить правило Лопиталя
1^{∞},	Применяем второй замечательный предел

<u>Пример1:</u>

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2}$

Решение.

Подставляем значение: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2} = \frac{1^2+2\cdot 1-3}{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Пришли к неопределенности. Смотрим в таблицу неопределенностей для выбора метода решения и пробуем упростить выражение. Так как и числитель и знаменатель обращаются в ноль при *x=1*, то если <u>разложить на множители</u> эти выражения, можно будет сократить *(x-1)* и неопределенность исчезнет.

Разложим числитель на множители:

$$x^2+2x-3=0$$

$$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3$$

$$x_2=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=1\Rightarrow$$

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

Разложим знаменатель на множители:

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = 1 \Rightarrow$

$3x^2 - 5x + 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1)$

Наш предел примет вид:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 5x + 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{3\left(x - \frac{2}{3}\right)} = \frac{1+3}{3\left(1 - \frac{2}{3}\right)}$$

$$= 4$$

После преобразования неопределенность раскрылась.

Ответ: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 5x + 2} = 4$

Рассмотрим пределы на бесконечности от степенных выражений. Если показатели степенного выражения положительны, то предел на бесконечности бесконечен. Причем основное значение имеет наибольшая степень, остальные можно отбрасывать.

Пример2:.

Вычислить предел $\lim_{x \to \infty} \frac{x^7 + 2x^5 - 4}{3x^7 + 12}$

Решение.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^7 + 2x^5 - 4}{3x^7 + 12} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$

Степень числителя равна семи, то есть $m=7$. Степень знаменателя также равна семи $n=7$. Разделим и числитель и знаменатель на x^7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^5-4}{3x^7+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^7+2x^5-4}{x^7}}{\frac{3x^7+12}{x^7}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^7}}{3+\frac{12}{x^7}}=\frac{1+\frac{2}{\infty^2}-\frac{4}{\infty^7}}{3+\frac{12}{\infty^7}}=\frac{1+0-0}{3+0}=\frac{1}{3}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^5-4}{3x^7+12}=\frac{1}{3}$

Задание: Вычислить предел функций:

Вариант 1.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$
2. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2-1}$
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x}+1}{x}$

Вариант 2

1. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-25}{x+5}$
2. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x+x^2}{x^2+5x+6}$
3. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-25}{x^2-8}$
4. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x-2}{\sqrt{x+2-2}}$

Вариант 3

1. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x^3-11x-3}{3x^2-8x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x+x^3}{10x^3+x^{2-80}}$
4. $\lim\limits_{x\to6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$

Контрольные вопросы:

1) Что называется пределом функции?

2) Какая связь существует между бесконечно малой и бесконечно большой функцией?

3) Назовите виды неопределенностей.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Название практической работы: ***Вычисление пределов, сводящихся к замечательным пределам***

Цель работы: научиться вычислять пределы.

Знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

Анализировать сложные функции и строить их графики

Теоретический материал:

Первый замечательный предел имеет вид: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

На практике чаще встречаются **модификации первого замечательного предела** в виде: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$

где, k – коэффициент.

Следствия первого замечательного предела:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx}{\sin kx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin kx}{kx}}=\frac{1}{1}=1$

<u>Пример 1:</u>

Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}$

Решение:

Подставляем значение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

Пришли к неопределенности ноль делить на ноль. Смотрим в <u>таблицу неопределенностей</u> для определения метода решения. Комбинация синуса и его аргумента подсказывает нам о применении первого замечательного предела, но для этого сначала нужно немного преобразовать выражение. Домножим на *3x* и числитель и знаменатель дроби.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{3x\sin(3x)}{3x\cdot(2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\right)$$

В силу следствия из первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=1$, поэтому приходим к результату:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

Второй замечательный предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

или в другой записи $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

В случае второго замечательного предела имеем дело с неопределенностью вида единица в степени бесконечность(1^∞) .

Пример 2:

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}$

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}=\left(1-\frac{2}{\infty^2+1}\right)^{\frac{\infty^2+1}{4}}=(1-0)^{\infty}=(1^{\infty})$$

Пришли к неопределенности единица в степени бесконечность. Смотрим в таблицу неопределенностей для определения метода решения и останавливаемся на применении второго замечательного предела.

Сделаем замену переменных. Пусть$t=-\frac{x^2+1}{2}\Rightarrow\frac{x^2+1}{4}=-\frac{t}{2}$

Если $x\to\infty$, то $t\to-\infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}=\left\langle 1^{\infty}\right\rangle=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}\cdot t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

Пример 3:

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

Решение:

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x}=\left(\frac{1-0}{1+0}\right)^{\infty}=\left\langle 1^{\infty}\right\rangle$$

Пришли к неопределенности единица в степени бесконечность, которая указывает на применение второго замечательного предела. Выделим целую часть в основании показательно степенной функции:

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$$

Тогда предел запишется в виде:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\left\langle 1^\infty\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$$

Сделаем замену переменных. Пусть

$$t=-\frac{x+1}{2}\Rightarrow 2t=-x-1\Rightarrow x=-2t-1$$

Если $x\to\infty$, то $t\to\infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}$$

$$\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-2}\cdot\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{-1}=e^{-2}\cdot(1+0)^{-1}=e^{-2}$$

В преобразованиях были использованы свойства степени и свойства пределов.

Задание: Вычислить предел функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{x}$
2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{5x}$
3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x})^{x}$
4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Контрольные вопросы:

1) Что называется пределом функции?

2) Сформулируйте первый и второй замечательные пределы.

3) Назовите виды неопределенностей.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

Название практической работы: ***Вычисление производных элементарных и сложных функций.***

Цель работы: Научиться находить производные функций по формулам дифференцирования.

Знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

анализировать сложные функции и строить их графики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

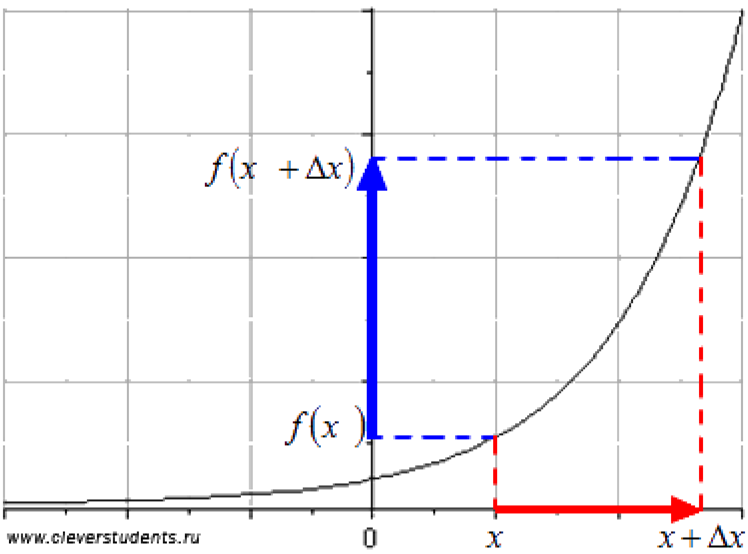
Теоретическая часть.

Путь *x* – аргумент функции *f(x)* и Δx - малое число, отличное от нуля.

Δx (читается «дельта икс») называют **приращением аргумента функции**. На рисунке по оси абсцисс показано изменение аргумента от значения *x* до значения $x + \Delta x$ (отсюда видна суть названия «приращение» аргумента).

При переходе от значения аргумента x_0 к $x_0 + \Delta x$ значения функции изменяются соответственно от $f(x_0)$ до $f(x_0 + \Delta x)$ при условии монотонности функции на отрезке

$[x_0; x_0 + \triangle x]$. Разность $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \triangle f(x)$ называют **приращением функции *f(x)***, соответствующем данному приращению аргумента. На рисунке приращение функции показано по оси ординат.



Определение производной функции в точке.

Пусть функция *f(x)* определена на промежутке *(a; b)*, x_0 и $x_0 + \Delta x$ - точки этого промежутка. **Производной функции *f(x)* в точке** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргументапри $\Delta x \to 0$.

Обозначается $f^{/}(x_0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$

Правила дифференцирования. Производные элементарных функций

1. $(\mathbf{c})^{/} = 0$	11. $(\mathbf{a}^{x})^{/} = \mathbf{a}^{x} \ln \mathbf{a}$

2. $(x)^{/} = 1$	12. $(\sin \mathbf{x})^{/} = \cos \mathbf{x}$
3. $(u+v)^{/} = u^{/} + v^{/}$	13. $(\cos \mathbf{x})^{/} = -\sin \mathbf{x}$
4. $(\mathbf{uv})^{/} = \mathbf{u}^{/}\mathbf{v} + \mathbf{v}^{/}\mathbf{u}$	14. $(\mathbf{tgx})^{/} = \dfrac{1}{\cos^2 \mathbf{x}}$
5. $\left(\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)^{/} = \dfrac{\mathbf{u}^{/}\mathbf{v} + \mathbf{v}^{/}\mathbf{u}}{\mathbf{v}^2}$	15. $(\mathbf{ctgx})^{/} = \dfrac{-1}{\sin^2 \mathbf{x}}$
6. $(\mathbf{cu})^{/} = \mathbf{uc}^{/}$	16. $(\arcsin \mathbf{x})^{/} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}$
7. $(x^n)^{/} = nx^{n-1}$	17. $(\arccos \mathbf{x})^{/} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}$
8. $(\ln \mathbf{x})^{/} = \dfrac{1}{\mathbf{x}}$	18. $(\mathbf{arctgx})^{/} = \dfrac{1}{1+\mathbf{x}^2}$
9. $(\log \mathbf{x})^{/} = \dfrac{1}{\mathbf{x}} \log \mathbf{e}$	19. $(\mathbf{arctgx})^{/} = \dfrac{-1}{1+\mathbf{x}^2}$
10. $(\mathbf{e}^{\mathbf{x}})^{/} = \mathbf{e}^{\mathbf{x}}$	

Найти производные следующих функций:

Пример 1

$y=x^2-4x+3$.

Решение:

$y^{/} = (x^2-4x+3)^{/} = (x^2)^{/} - (4x)^{/} + 3^{/}$.

По формулам 1,2, 3,6 и 7 таблицы 2.1, получим $y^{/} = 2x-4$.

Пример 2

$$\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{\mathbf{x}}} - \frac{1}{\mathbf{x}^2} + \frac{1}{3\mathbf{x}^3} \quad .$$

Решение:

Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\frac{1}{2}} + 5\mathbf{x}^{\frac{-1}{3}} - \mathbf{x}^{-2} + \frac{1}{3}\mathbf{x}^{-3} \quad .$$

Применяя формулы (6 и 7), получим:

$$\mathbf{y}^{/} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\frac{1}{2}-1} + 5\left(-\frac{1}{3}\right)\mathbf{x}^{-\frac{1}{3}-1} - (-2)\mathbf{x}^{-2-1} + \frac{(-3)}{3}\mathbf{x}^{-3-1} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}\mathbf{x}^{-\frac{4}{3}} + 2\mathbf{x}^{-3} - \mathbf{x}^{-4}$$

$$\mathbf{y}^{/} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{\mathbf{x}^{4}}} + \frac{2}{\mathbf{x}^{3}} - \frac{1}{\mathbf{x}^{4}} \quad .$$

<u>Пример 3</u>

$\oint^{/}(\mathbf{x}) = \dfrac{\sqrt{\mathbf{x}}}{1+\sqrt{\mathbf{x}}}$. Вычислить $\oint^{/}(1)$.

Решение:

По формулам (5 и 7) получим:

$$\oint^{/}(\mathbf{x}) = \frac{\left(\sqrt{\mathbf{x}}\right)^{/}\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right) - \left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^{/}\cdot\sqrt{\mathbf{x}}}{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^{2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}}\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right) - \frac{\sqrt{\mathbf{x}}}{2\sqrt{\mathbf{x}}}}{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^{2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^{2}};$$

$$\oint^{/}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^{2}};$$

$$\oint^{/}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\sqrt{1}\left(1+\sqrt{1}\right)^{2}} = \frac{1}{2\cdot 2^{2}} = \frac{1}{8} \quad .$$

<u>Пример 4</u>

$$\mathbf{y} = \frac{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^{2}}{\mathbf{x}}$$

Решение:

Раскрываем скобки и производим деление:

$$\mathbf{y} = \frac{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^{2}}{\mathbf{x}} = \frac{1+2\sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \frac{1}{\mathbf{x}} + \frac{2}{\sqrt{\mathbf{x}}} + 1 \quad .$$

Используем дробные и отрицательные показатели, приводя данное выражение к виду (7) таблицы 2.1:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{-1} + 2\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} + 1 \quad .$$

Находим производную $y^{/}$:

$$\mathbf{y}^{/} = -\mathbf{x}^{-2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{x}^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\mathbf{x}^{2}} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^{3}}} \quad .$$

Пример 5

Найти производную 2-го порядка от функции $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \sin \mathbf{x}$.

Решение:

Используя формулы 4,2 и 12 таблицы 2.1, получим:

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{x})' \sin \mathbf{x} + \mathbf{x}(\sin \mathbf{x})' = \sin \mathbf{x} + \mathbf{x} \cos \mathbf{x} \ .$$

Дифференцируя производную y $'$, имеем:

$$\mathbf{y}'' = (\sin \mathbf{x})' + (\mathbf{x})' \cos \mathbf{x} + \mathbf{x}(\cos \mathbf{x})' = \cos \mathbf{x} + \cos \mathbf{x} - \mathbf{x} \sin \mathbf{x} =$$

$$= 2 \cos \mathbf{x} - \mathbf{x} \sin \mathbf{x} .$$

Пример 6

Движение летчика при катапультировании из реактивного самолета можно приблизительно описать формулой $\mathbf{S} = 3{,}7\mathbf{t}^3 + \ln \mathbf{t} - 19\mathbf{t}$ (м). Определить скорость и ускорение летчика через 2 с после катапультирования.

Решение:

По формулам 3, 6,7 и 8 таблицы 2.1:

$$v = \frac{ds}{dt}, v = (3{,}7^3 + \ln t - 19t)' \ ,$$

Тогда v=3,7•3t^2 $+ \frac{1}{\mathbf{t}} - 19 = 25{,}9$ м/с; $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}; \mathbf{a} = 11{,}1\mathbf{t}^2 + \frac{1}{\mathbf{t}} - 19;$

$$\mathbf{a} = 22{,}2\mathbf{t} - \frac{1}{\mathbf{t}^2}\left(\frac{\mathbf{м}}{\mathbf{c}^2}\right); \mathbf{a}_{\mathbf{t}=2} = 22{,}2 \cdot 2 - \frac{1}{4} = 44{,}15 \,\mathbf{м}/\mathbf{c}^2 \ .$$

Производная сложной функции

Если $\mathbf{y} = \oint(\mathbf{u})$, где $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$, т.е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y называется сложной функцией от x.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной: $\mathbf{y}' = \oint{}'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x})$.

Некоторые формулы таблицы производных теперь будут иметь вид :

$$(\mathbf{u}^{\mathbf{n}})' = \mathbf{n}\mathbf{u}^{\mathbf{n}-1} \cdot \mathbf{u}'$$

$$(\sin \mathbf{u})' = \cos \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$$

$$(\cos \mathbf{u})' = -\sin \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$$

и т.д.

Найти производные следующих функций:

Пример 1.

$\mathbf{y} = (1 + 5\mathbf{x})^3$.

Решение:

Полагая 1+5x = u и y = u^3, применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\mathbf{y} = 3\mathbf{u}^2 (1 + 5\mathbf{x})' = 3(1 + 5\mathbf{x})^2 \cdot 5 = 15(1 + 5\mathbf{x})^2.$$

Пример 2

$\mathbf{y} = \sin 3\mathbf{x}$.

Решение:

Полагая 3x= u, найдем, используя соответствующие формулы:

$$y' = (\sin x^3)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos 3x^3 \cdot 3.$$

$$y' = 3\cos 3x.$$

Пример 3

$\mathbf{y} = \sin \mathbf{x}^3$.

Решение:

Полагая x^3= u, найдем:

$$\mathbf{y}' = (\sin \mathbf{x}^3)' = (\sin \mathbf{u})' = \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}' = 3\mathbf{x}^2 \cos \mathbf{x}^3.$$

Пример 4

В какой момент времени скорость тела, движущегося по закону $\mathbf{S} = 3\mathbf{t}^2 - 15\mathbf{t} + 2$, равна 0? Найти ускорение тела.

Решение:

Скорость тела v - это первая производная от перемещения $\vec{S}$ по времени:

$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt}$; закону $v = (3t^2 - 15t + 2)' = 16t - 15.$

Если v=0, то 0=16t-15 $\Rightarrow t = \frac{15}{6} = 2{,}5(c)$

Ускорение $\vec{a}$ – это первая производная от скорости $\vec{v}$ по времени: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$;

$a = (6t - 15)' = 6\left(\frac{м}{c^2}\right)$

<u>Пример 5</u>

Точка совершает колебательные движения по оси абсцисс по закону $x = \cos \omega t$.
Найти момент времени, когда скорость равна нулю. Чему в это время равно x?

Решение:

$v = \frac{dx}{dt} = -\omega \sin \omega t$; $\quad 0 = \omega \sin \omega t$;

$\kappa\pi = \omega t \Rightarrow t\,\frac{\kappa\pi}{\omega}$; $\quad x = \cos\frac{\omega\kappa\pi}{\omega} = \pm 1$.

Задание: Найти производные функций при данном значении аргумента:

Вариант 1

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5;\ f'(2)$
2. $f(x) = (x-1)\sqrt{x+1}\ ;\ f'(3)$
3. $f(z) = \frac{\sqrt{z-1}}{z}\ ; f'(2)$
4. $f(t) = t^2 + e^{2t};\ f'(0)$
5. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}\ ; f'(\sqrt{3})$
6. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 3;\ f'(2)$
7. $f(x) = (x-1)\sqrt{x+1};\ f'(3)$
8. $f(z) = \frac{z-1}{z};\ f'(2)$
9. $f(t) = 3t^2 - e^{3t} + 1;\ f'(2)$

10. $f(x) = 1 - \frac{x+1}{x-1}$; $f'(\sqrt{3})$

Вариант 2

1. $f(x) = 4x \quad + 10 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x}$; $f'(1)$
2. $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2 - 1}$; $f'(2)$
3. $f(z) = \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}$; $f'(\sqrt{3})$
4. $f(x) = 3\sqrt{e^{4x+3}}$; $f'(0)$
5. $(x) = 1 - \frac{x-1}{x^2+1}$; $f'(2)$
6. $f(x) = sin^2 x$; $f'(\pi/4)$
7. $F(x) = \ln\cos x$; $F'(-\pi/3)$
8. $f(t) = \sin t - cos^2 t$; $f'(0)$
9. $f(z) = tgz$; $f'(\pi/4)$
10. $f(x) = e^{\sin x}$; $f'(0)$

Вариант 3

1. $f(x) = cos^2 x$; $f'(-\pi/4)$
2. $f(z) = ln \sin z$; $f'(\pi/6)$
3. $F(x) = \cos x + sin^2 x$; $F'(0)$
4. $f(x) = \ln ctg\, x$; $f'(-\pi/4)$
5. $f(y) = e^{\cos 2y}$; $f'(\pi/4)$
6. $f(z) = \ln sin^2 4z$; $f'(\pi/16)$
7. $f(x) = cos^2 x^2$; $f'(\pi/4)$
8. $f(x) = 2sin^2 x \cos x$; $f'(\pi/2)$
9. $\varphi(x) = e^{\sin 2x} - 3e^{\cos 2x}$; $f'(0)$
10. $F(y) = tg^2 3y$; $F'(0)$

Контрольные вопросы:

1) Запишите определение производной

2) Чем отличается производная сложной функции от производной элементарной функции?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

Название практической работы: ***Вычисление неопределённых и определённых интегралов.***

Цель работы: научиться вычислять определённый и неопределённый интегралы с помощью таблицы основных интегралов

знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

Теоретический материал:

Определение первообразной.

Первообразной функции *f(x)* на промежутке *(a; b)* называется такая функция *F(x)*, что выполняется равенство $F'(x)=f(x)$ для любого *x* из заданного промежутка.

Если принять во внимание тот факт, что производная от константы *C* равна нулю, то справедливо равенство $(F(x)+C)^{/}=f(x)$. Таким образом, функция *f(x)* имеет множество первообразных *F(x)+C*, для произвольной константы *C*, причем эти первообразные отличаются друг от друга на произвольную постоянную величину.

Определение неопределенного интеграла.

Все множество первообразных функции *f(x)* называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Выражение $f(x)dx$ называют *подынтегральным выражением*, а *f(x)* – *подынтегральной функцией*. Подынтегральное выражение представляет собой дифференциал функции *f(x)*.

Действие нахождения неизвестной функции по заданному ее дифференциалу называется *неопределенным* интегрированием, потому что результатом интегрирования является не одна функция *F(x)*, а множество ее первообразных *F(x)+C*.

На основании свойств производной можно сформулировать и доказать ***свойства неопределенного интеграла*** (свойства первообразной)

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$

   Производная результата интегрирования равна подынтегральной функции.

2. $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

   Неопределенный интеграл дифференциала функции равен сумме самой функции и произвольной константы.

3. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, где k – произвольная константа.

   Коэффициент можно выносить за знак неопределенного интеграла.

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

   Неопределенный интеграл суммы/разности функций равен сумме/разности неопределенных интегралов функций.

Задача интегрирования является обратной задаче дифференцирования, причем между этими задачами очень тесная связь:

- первое свойство позволяет проводить проверку интегрирования. Чтобы проверить правильность выполненного интегрирования достаточно вычислить производную полученного результата. Если полученная в результате дифференцирования функция окажется равной подынтегральной функции, то это будет означать, что интегрирование проведено верно;

- второе свойство неопределенного интеграла позволяет по известному дифференциалу функции найти ее первообразную. На этом свойстве основано непосредственное вычисление неопределенных интегралов.

Несомненно, основным методом нахождения первообразной функции является непосредственное интегрирование с использованием таблицы первообразных и свойств неопределенного интеграла. Все другие методы используются лишь для приведения исходного интеграла к табличному виду.

Таблица первообразных (неопределенных интегралов).

$\int x^p \cdot dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$	
$\int 0 \cdot dx = C$	
$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \neq 1$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
$\int e^x \cdot dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right\| + C$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left\| \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right\| + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left\| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right\| + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$	
$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$	

Формулы из левого столбца таблицы называют основными первообразными. Формулы из правого столбца основными не являются, но очень часто используются при нахождении неопределенных интегралов. Их можно проверить дифференцированием.

Пример 1:

Найдите множество первообразных функции $f(x) = 2^x + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{5x+4}$.

Решение.

Запишем функцию в виде $f(x)=2^x+\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{5x}=2^x+\frac{3}{2}\cdot(5x+4)^{\frac{1}{3}}$.

Так как интеграл суммы функций равен сумме интегралов, то $\int f(x)dx=\int\left(2^x+\frac{3}{2}\cdot(5x+4)^{\frac{1}{3}}\right)dx=\int 2^x\,dx+\int\frac{3}{2}\cdot(5x+4)^{\frac{1}{3}}\,dx$

Числовой коэффициент можно вынести за знак интеграла:

$$\int f(x)dx=\int 2^x\,dx+\int\frac{3}{2}\cdot(5x+4)^{\frac{1}{3}}\,dx=$$

$$=\int 2^x\,dx+\frac{3}{2}\cdot\int(5x+4)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

Первый из интегралов приведен к табличному виду, поэтому из таблицы первообразных для показательной функции имеем $\int 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C_1$.

Для нахождения второго интеграла $\int(5x+4)^{\frac{1}{3}}dx$ воспользуемся таблицей первообразных для степенной функции $\int x^p\cdot dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$ и правилом $\int f(k\cdot x+b)dx=\frac{1}{k}\cdot F(k\cdot x+b)+C$. То есть

$$\int(5x+4)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}\cdot(5x+4)^{\frac{1}{3}+1}+C_2=\frac{3}{20}\cdot(5x+4)^{\frac{4}{3}}+C_2$$.

Следовательно,

$$\int f(x)dx=\int 2^x\,dx+\frac{3}{2}\cdot\int(5x+4)^{\frac{1}{3}}\,dx=$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}+C_1+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{20}\cdot(5x+4)^{\frac{4}{3}}+C_2\right)=$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{9}{40}\cdot(5x+4)^{\frac{4}{3}}+C$$

где $C=C_1+\frac{3}{2}C_2$

Определенный интеграл Ньютона-Лейбница.

Сейчас покажем, как дается понятие определенного интеграла Ньютона-Лейбница.

Пусть функция *y=f(x)* имеет первообразную *F(x)* на отрезке *[a; b]*, причем значение первообразной в точке *x=a* равно нулю: *F(a)=0*. *Определенным интегралом Ньютона-Лейбница* называется значение этой первообразной в точке *b*, то есть, $\int_a^b f(x)dx = F(b)$ при *F(a)=0*.

Это определение тесно связано с формулой Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. В формуле Ньютона-Лейбница *F(x)* – любая первообразная из их множества, а в понятии определенного интеграла Ньютона-Лейбница фигурирует именно та первообразная, которая обращается в ноль при *x=a*.

Формулу Ньютона-Лейбница называют *основной формулой интегрального исчисления*.

Пример2:

Вычислить значение определенного интеграла $\int_1^3 x^2 dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение.

Для начала отметим, что подынтегральная функция $y = x^2$ непрерывна на отрезке *[1;3]*, следовательно, интегрируема на нем.

Из таблицы неопределенных интегралов видно, что для функции $y = x^2$ множество первообразных для всех действительных значений аргумента (следовательно, и для $x \in [1;3]$) записывается как $F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Возьмем первообразную при *C = 0*: $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Теперь осталось воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла: $\int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$.

Пример 3:

Вычислить определенные интегралы $\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2} dx$ и $\int_{-1}^{1} \frac{4x^3+2}{x^2} dx$.

Решение.

На отрезке $\left[-4; -\frac{1}{2}\right]$ подынтегральная функция непрерывна, следовательно, интегрируема.

Найдем множество первообразных функции $y = \frac{4x^3+2}{x^2}$: $\int \frac{4x^3+2}{x^2} dx = 4\int x dx + 2\int x^{-2} dx = 2x^2 - \frac{2}{x} + C$. Возьмем первообразную $F(x) = 2x^2 - \frac{2}{x}$ и по формуле Ньютона-Лейбница вычислим требуемый определенный интеграл:

$$\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2} dx = \left.\left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)\right|_{-4}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} - \left(2(-4)^2 - \frac{2}{-4}\right) = \frac{1}{2} + 4 - 32 - \frac{1}{2} = -28$$

Переходим ко второму определенному интегралу.

На отрезке *[-1;1]* подынтегральная функция не ограничена, так как $\lim_{x \to 0} \frac{4x^3+2}{x^2} = +\infty$, то есть, не выполняется необходимое условие интегрируемости функции на отрезке. Более того, $F(x)=2x^2-\frac{2}{x}$ не является первообразной функции $y=\frac{4x^3+2}{x^2}$ на отрезке *[-1;1]*, поскольку точка *0*, принадлежащая отрезку, не входит в область определения функции. Следовательно, не существует определенный интеграл Римана и Ньютона-Лейбница для функции $y=\frac{4x^3+2}{x^2}$ на отрезке *[-1;1]*.

Задание: Выполните задания по вариантам

Вариант 1

1. Найти интегралы: а) $\int(\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+8)dx$; б) $\int sin^2 x\cos x\, dx$;

   в) $\int(e^{2x}+2)dx$
2. Найти интегралы: $\int x2^{-x}dx$
3. Найдите интегралы: а) $\int_0^{2\pi}\sin x dx$; б) $\int_0^{03}(2x+5)dx$

Вариант 2

1. Найти интегралы: а) $\int(x^4-8x^3+4x)dx$; б) $\int cos^2 x\sin x\, dx$;

   в) $\int(e^{3x}+1)dx$
2. Найти интегралы: $\int x^2e^{3x}dx$;
3. Найдите интегралы: а) $\int_0^3 3\,x dx$; б) $\int_{-\pi}^0\cos(2x)dx$

Контрольные вопросы:

1) Какой интеграл называется неопределённым?

2) Какой интеграл называется определённым?

3) Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

4) Назовите основные методы интегрирования.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

Название практической работы: ***Решение прикладных задач с использованием интегрального исчисления***

Цель работы: Научиться вычислять площади плоских фигур с помощью определённого интеграла.

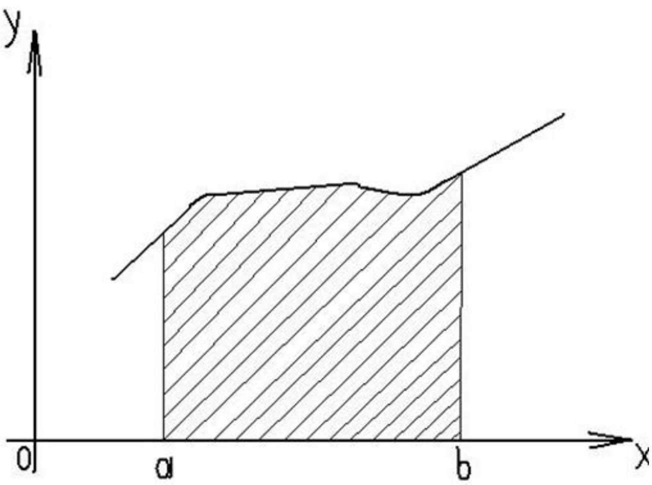
Знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; основные математические методы решения прикладных задач; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности;

умения:

решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

Теоретический материал:

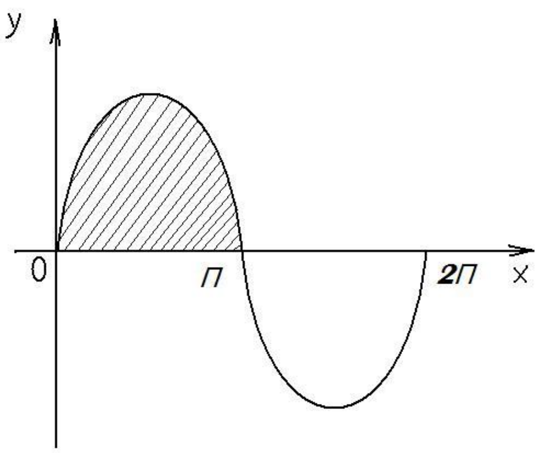


Геометрический смысл определенного интеграла: он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми x=a; x=b; y=0 и частью графика функции y=f(x), взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна. $y = f(x)$

$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx}$= **F(b) – F(a)**

Применение определенного интеграла для решения прикладных задач.

Пример 1



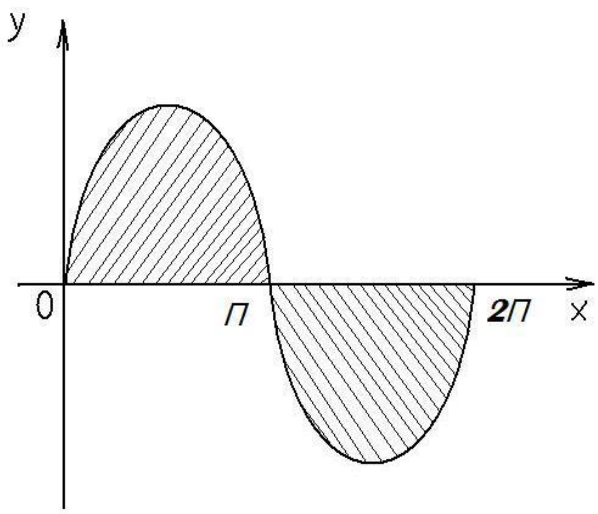
Определить площадь полуволны синусоиды. $y = \sin x$

$$S = \int_0^{\Pi} \sin x \, dx = -\cos x|_0^{\Pi} = -(\cos \Pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2 \text{ (кв. ед.)}$$

Пример 2

Определить площадь полной синусоиды.

$$y = \sin x$$



Решение:

$$S = \int_0^{2\Pi} \sin x \, dx = -\cos x|_0^{2\Pi}$$

$$= -(-1 - 1) = 0.$$

Ответ: S=0.

Пример 3

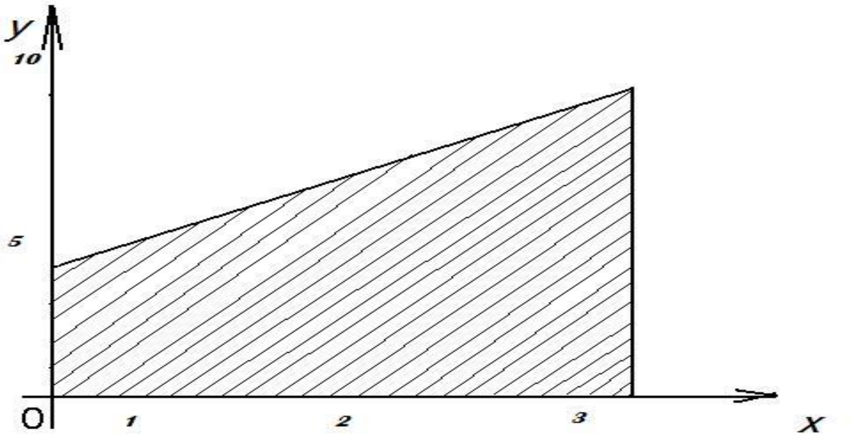
Сколько краски нужно, чтобы закрасить области, заштрихованные на рисунке задачи 3.15?

Решение:

Для ответа на этот вопрос надо брать площади по модулю

Пример 4

Определить площадь фигуры, образованной функцией $y = 2x + 5$ и осью, при изменении x от 0 до 3.



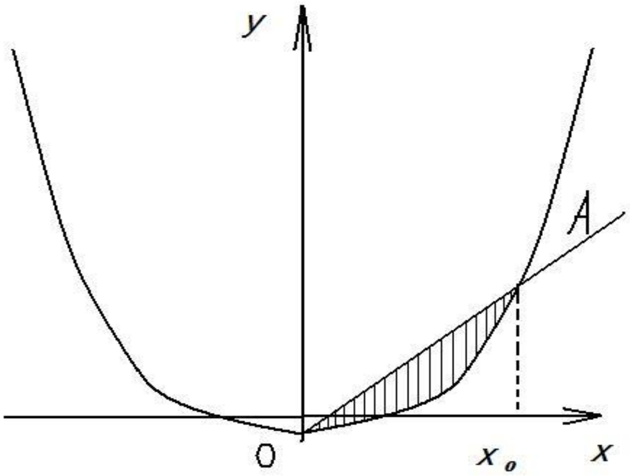
$$S=\int_{0}^{3}(2x+5)\,dx=-2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^3+5x\bigg|_0^3=x^2\bigg|_0^3+5x\bigg|_0^3=9+15=24\text{ (кв. ед.)}$$

<u>Пример 5</u>

Вычислить площадь между линиями $y_1=x^2 и y_2=3x$.

Решение:

Искомая площадь – это разность между площадью треугольника $\mathrm{OA}\,\mathrm{x}_0$ и площадью криволинейного треугольника, ограниченного сверху участком параболы.



$$S=\int_{0}^{x_0}3xdx-\int_{0}^{x_0}x^2dx$$

Точку x_0 - абсциссу точки пересечения графиков находим из уравнения $x^2 = 3x \Rightarrow x_0 = 3$:

$$S = \int_0^3 3x dx - \int_0^3 x^2\, dx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = 4{,}5(\text{кв. ед.}).$$

Пример 6

Определить силу давления воды на стенку аквариума с основанием 1,8 м и высотой 0,6 м.

Дано:

I=1,8м

H=0,6м

Найти: F-?

Решение

$$P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot sF = \int pds.$$

Величина p давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины ее погружения x, т.е. от расстояния площадки до поверхности жидкости

P=$10^3\ ^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$ $p = \rho \cdot g \cdot x$.

G=$9{,}8\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$Площадь этой полоски $ds = I \cdot dx$.

$$F = \int_0^{0,6} \rho g x \cdot I \cdot dx = \rho g I \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,6} = \frac{\rho g I}{2}(0{,}36 - 0) = 0{,}18 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}8$$
$$= 3{,}2(kH).$$

Задание: Выполните задания по вариантам

Вариант 1.

Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями: $f(x) = 1 - x^2, \quad y = 0.$

Вариант 2.

Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями: $y = 3x - x^2, \quad y = -x.$

Вариант 3.

Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями: $y=1-x^2$, $y=x^2+2$, $x=0$, $x=1$.

Контрольные вопросы:

1) Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

2) В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

Название практической работы: ***Решение прикладных задач с использованием дифференциального исчисления***

Цель работы: научиться выполнять действия с числовыми множествами.

Знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; основные математические методы решения прикладных задач; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

Теоретический материал:

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то есть приращение этой функции можно представить в виде суммы двух слагаемых: линейного относительно Δx и нелинейного членов:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Определение

Дифференциалом функции называется линейная относительно Δx часть приращения функции. Она обозначается как dy или $df(x)$. Таким образом:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Замечание

Дифференциал функции составляет основную часть ее приращения.

Замечание

Наряду с понятием дифференциала функции вводится понятие дифференциала аргумента. По определению ***дифференциал аргумента*** есть приращение аргумента:

$$dx = \Delta x$$

Замечание

Формулу для дифференциала функции можно записать в виде: $dy = f'(x)dx$

Отсюда получаем, что $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Итак, это означает, что производная может быть представлена как обыкновенная дробь - отношение дифференциалов функции и аргумента.

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции в точке x_0 равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в этой точке, соответствующему приращению аргумента Δx.

Свойства дифференциала

Дифференциал обладает свойствами, аналогичными свойствам производной:

$dC = 0;$ (С – постоянная величина) (1)

$d(u+v) = du + dv;$ (2)

$d(uv) = u\ dv + v\ du;$ (3)

$d(Cu) = C\ du;$ (4)

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}. \qquad (5)$$

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Установленное приближенное равенство

$\Delta y\approx y'\Delta x$ или $\Delta y = dy,$

позволяет использовать дифференциал для приближенных вычислений значений функции.

Запишем приближенное равенство более подробно. Так как $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$ а $dy = f'(x_0)\Delta x$ то $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$ или

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \qquad (6)$$

Дифференциал сложной функции.

Пусть *y* сложная функция *x*: $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$. Дифференциал $dy = y'dx$ этой функции, используя формулу для <u>производной сложной функции</u>, можно записать в виде $dy = f'(u)u'dx$. Но $u'dx$ есть дифференциал функции *u*, поэтому $dy = f'(u)du$, т. е. $df(u) = f'(u)du$.

Здесь дифференциал записан в том же виде, как и в формуле для дифференциала функции независимой переменной *x*, т. е. $df(x)= f'(x)dx$, хотя аргумент *u* является не независимой переменной, а функцией *x*.

<u>Пример 1</u>. Дана функция $y=(3x-5)^7$.

Решение.

Через *dx*:

$$dy=\left((3x-5)^7\right)'\bullet(3x-5)'dx=$$

$$=7(3x-5)^6\bullet 3dx=21(3x-5)^6\,dx.$$

Использовали правило дифференцирования степенной функции.

Через *du*:

$$u=3x-5\Rightarrow y=u^7\Rightarrow dy=7u^6du.$$

Подставляя в полученное равенство $u=3x-5$ и $du=3dx$, получаем

$$dy = 7u^6 du = 7(3x-5)^6 \bullet 3dx =$$
$$= 21(3x-5)^6 dx.$$

Частные производные

Каждая частная производная (по x и по y) функции двух переменных представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной при фиксированном значении другой переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

(где y = const),

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

(где x = const).

Поэтому частные производные вычисляют по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной, считая при этом другую переменную постоянной (константой).

Пример 2. Найти частные производные функции

$$z = 5x^3y^2 - x.$$

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2y^2 - 1$$

(y фиксировано);

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^3y$$

Пример 3. Найти частные производные функции

$$z = \sin(xy).$$

Решение. В один шаг находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos(xy)$$

(y фиксировано и является в данном случае множителем при x, как если бы аргументом синуса было $5x$: точно так же 5 оказывается перед знаком функции);

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\cos(xy)$$

(x фиксировано и является в данном случае множителем при y).

Пример 4. Количественная величина потока *П* пассажиров железных дорог может быть выражена функцией

$$П = N^2 / R,$$

где *П* – количество пассажиров, N – число жителей корреспондирующих пунктов, R – расстоянии между пунктами.

Частная производная функции *П* по R, равная

$$\frac{\partial П}{\partial R} = -\frac{N^2}{R^2},$$

показывает, что уменьшение потока пассажиров обратно пропорционально квадрату расстояния между корреспондирующими пунктами при одной и той же численности жителей в пунктах.

Частная производная *П* по N, равная

$$\frac{\partial П}{\partial N} = \frac{2N}{R},$$

показывает, что увеличение потока пассажиров пропорционально удвоенному числу жителей населённых пунктов при одном и том же расстоянии между пунктами

Задание: Выполните задания по ходу работы

1. Найти частные производные функции $z = 5x^3y^2 - x.$
2. Найдите дифференциалы первого порядка: а) $y = e^x \sin x$; б) $y = e^x\sqrt{2x}$;

   в) $y = (x^3 - 2)^4$; г) $y = \sqrt{x^2 - 1}$
3. Найдите дифференциалы второго порядка: а) $y = \ln \sin^2 2x$;б) $y = e^{-x}$

4. Составьте формулу для вычисления относительной погрешности функции $y = \sin^2 3x$

Контрольные вопросы:

1. Что называется дифференциалом функции?
2. Перечислите свойства дифференциала
3. Что называется дифференциалом сложной функции?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

Название практической работы: ***Решение прикладных задач с использованием комбинаторики***.

Цель работы: научиться решать задачи на подсчет числа комбинаций.

знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; основные математические методы решения прикладных задач; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Теоретическая часть

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект В может быть выбран n способами, то выбрать либо А, либо В можно m + n способами.

Правило произведения. Если объект А можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то пара объектов (А, В) в указанном порядке может быть выбрана m·n способами.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$P_n=n!$,   где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

Заметим, что удобно рассматривать 0!, полагая, по определению, 0! = 1.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 1.

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение.

Искомое число трехзначных чисел

$P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$.

Пример 2.

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение.

Искомое число сигналов

$A^2_6 = 6 * 5 = 30$.

Пример3.

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение.

Искомое число способов

$C^2_{10} = 10! / (2!\ 8!) = 45$.

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$A^m_n = P_m C^m_n$.

Пример 4.

На родительском собрании присутствует 20 человек. Сколько существует различных вариантов состава родительского комитета, если в него должны войти 5 человек?

Решение:

В этом примере нас не интересует порядок фамилий в списке комитета. Если в результате в его составе окажутся одни и те же люди, то по смыслу для нас это один и тот же вариант. Поэтому мы можем воспользоваться формулой для подсчета числа сочетаний из 20 элементов по 5.

Иначе будут обстоять дела, если каждый член комитета изначально отвечает за определенное направление работы. Тогда при одном и том же списочном составе комитета, внутри него возможно 5! Вариантов перестановок, которые имеют значение. Количество разных (и по составу, и по сфере ответственности) вариантов определяется в этом случае числом размещений из 20 элементов по 5.

Замечание.

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1элементов одного вида, n_2элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями

$P_n(n_1, n_2, ...) = n!/ (n_1! \, n_2! \, ...)$,где $n_1+ n_2+ ... = n$.

Размещениями с повторениями из n элементов по m называются *упорядоченные* m-элементные выборки, в которых элементы могут *повторяться*. *Число размещений с повторениями* вычисляется по формуле: $\tilde{A}_n^m = n^m$

<u>Пример 5</u>.

Возьмем буквы ***Б, А, Р***. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буквы могут повторяться?

Решение.

1. Получатся следующие наборы: ***БА, БР, АР, АБ, РБ, РА***.

По формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

получаем: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$ наборов.

2. Получатся наборы: ***ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.***

По формуле $\tilde{A}_n^m = n^m$ получаем: $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$. наборов.

Число сочетаний с повторениями(n элементов, взятых по m, где элементы в наборе могут повторяться) вычисляется по формуле: $\tilde{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$

<u>Пример 6</u>.

В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

Решение.

Обозначая булки белого и черного хлеба буквами Б и Ч, составим несколько выборок: ББББББ, ББЧЧББ, ЧЧЧЧЧБ, ... Состав меняется от выборки к выборке, порядок элементов несуществен, значит это - сочетания с повторениями из 2 по 6.

По формуле $\tilde{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$ получаем $\tilde{C}_2^6 = C_{2+6-1}^6 = C_7^6 = C_7^1 = 7$ способов.

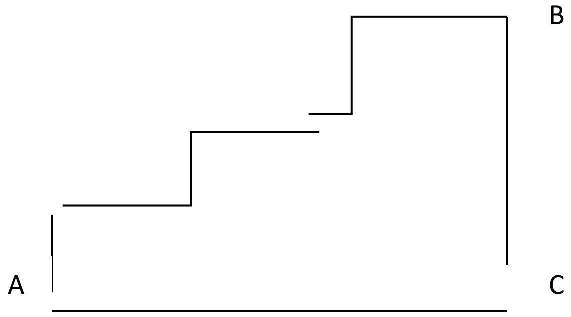
Сделаем проверку и выпишем все варианты покупки: ББББББ, БББББЧ, ББББЧЧ, БББЧЧЧ, ББЧЧЧЧ, БЧЧЧЧЧ, ЧЧЧЧЧЧ. Их действительно 7.

Пример 7.

Строительство лестницы.

Решение.

Строится лестница, ведущая из точки А в точку В(см. рис.).



Расстояние АС равно 4,5 м, а расстояние СВ — 1,5 м. Высота каждой ступеньки равна 30 см, а ее ширина должна быть целым кратным 50 см Сколькими способами

можно построить лестницу?

Из условия задачи видно, что лестница должна иметь 5 ступенек и состоять из 9 «блоков» длиной 50 см. Поэтому ступеньки можно строить в 10 местах. Таким образом, надо из 10 мест выбрать 5, и это можно сделать C^2_{10}= 252 способами.

Задание: Выполните задания по вариантам.

Вариант 1

1. Сколько двухзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,8,9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?
2. Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно?

3. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Вариант 2

1. Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?
2. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов?
3. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

Вариант 3

1. Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать?
2. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?
3. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

Контрольные вопросы:

1) Назовите виды комбинаций

2) Назовите основные правила комбинаторики

Схема определения вида комбинации

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

Название практической работы: ***Решение задач на вычисление вероятностей***.

Цель работы: Научиться вычислять вероятности событий.

знания:

основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального ис-числения; основные математические методы решения прикладных задач; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности;

умения:

решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Теоретическая часть:

1. Случайное событие

Случайное событие – это любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти. Случайное событие – это результат испытания.

Испытание (опыт, эксперимент) – в этом определении понимается определение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат. Испытание может проводиться человеком, но может осуществляться и независимо от человека. Человек в этом случае выступает в роли наблюдателя.

Событие обозначаются начальными прописными (заглавными) буквами латинского алфавита **A, B, C**.

1. Достоверное событие – это событие, которое в результате испытания обязательно должно произойти.
2. Невозможное событие – это событие, которое в результате испытания вообще не может произойти.

События называются несовместимыми, если наступление одного из них исключает появление другого. В противном случае события – совместные.

Противоположные события: два события A и Ā называются противоположными, если не появлени~~е~~ одного из них в результате данного испытания влечет появление другого. (Ā читается «не A»).

2. Вероятность случайного события

Численная мера степени объективности возможности наступления события называется *вероятностью случайного события*.

Классическое определение вероятности события A:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность события A равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию A (m), к общему числу случаев (n).

<u>Пример 1</u>

Лабораторная крыса, помещенная в лабиринт, должна избрать один из пяти возможных путей. Лишь один из них ведет к поощрению в виде пище. В предположении, что крыса с одинаковой вероятностью изберет любой путь, какова вероятность выбранного пути, ведущего к пище?

Решение:$\frac{1}{5}$

<u>Пример 2</u>

При бросании игральной кости, возможно, шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Какова вероятность появления четного числа очков?

Решение: *P(A)* = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Событие А – «появление четного числа очков» благоприятствуют 3 исхода (2, 4 и 6 очков).

<u>Пример 3</u>

Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение:

Обозначим через А событие, состоящее в том, что число на взятой карточке кратно 5. В данном испытании имеется 30 равновозможных исходов, из которых событию А благоприятствуют 6 исходов 5, 10, 15, 20, 25, 30).

Следовательно, P(A) = $\frac{6}{30}$ = 0,2

<u>Пример 4</u>

Подбрасывают 2 монеты. Какова вероятность, что обе упадут «гербом» кверху?

Решение:

4 исхода бросания монет: ГГ, ГР, РГ, РР.

Пусть событие А – «выпали 2 герба» - этому событию благоприятствует один исход.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Пример 5

Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 7 или 8?

Решение:

Обозначим события: А – «выпало 7 очков», В –«выпало 8 очков».

Событию А благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1).

События В благоприятствует 5 исходов: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2).

Всех равновозможных исходов $n=6^2=36$.

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}167, \qquad P(B) = \frac{5}{36} = 0{,}139$$

Итак, $P(A) > P(B)$ получить в сумме 7 очков более вероятное событие, чем в сумме 8 очков.

3. Статистическое определения вероятности

Относительная частота события – это доля тех фактически проведенных испытаний, в которых событие А появилось $W = P^*(A)= \frac{m}{n}$. Это опытная экспериментальная характеристика, где m – число опытов, в которых появилось событие А; n – число всех поведенных опытов.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний $P(A) = \lim\limits_{n-\infty} \frac{m}{n}$

Пример 6

Из 982 больных, поступивших в хирургическую больницу за месяц, 275 человек имели травмы. Какова относительная частота поступления больных с этим видом заболевания?

Решение: $P^*(A) =\frac{275}{982}$

Пример 7

При стрельбе по мишени частота w=0,75. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

Решение: $W = \frac{m}{n} \Rightarrow m = Wn$; $m = 0{,}75 \cdot 40 = 30$.

Ответ: было получено 30 попаданий.

4. Закон сложения вероятностей

Сумма двух событий – это такое событие, при котором появляется хотя бы одно из этих событий (А или В).

Если А и В совместные события, то их сумма А+В обозначает наступление события А или события В, или обоих событий вместе.

Если А и В несовместимые события, то сумма А+В означает наступление или события А или события В.

Пример 8

Победитель соревнования награждается призом (событие А), денежной премией (событие В), медалью (событие С). Что представляют собой события А+В?

Решение:

События А+В состоит в награждении победителя или призом денежной премией, или тем и другим.

Пример 9

Турист имеет возможность посетить 3 города: А, В и С. Обозначаем события: А – турист посетил город А; В- турист посетил город В;

С-турист посетил город С. В чем заключается событие А+С?

Решение:

Турист посетил только один из городов А или С, или он посетил их оба.

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+(B).$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+(B) – P(AB).$$

Сумма вероятностей дискретный событий, образующих полную группу, равна единице

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots= P(A_n)=1$$

Или

$$\sum_{i=1}^{n} P(Ai) = 1$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Пример 10

Пусть вероятность того, что забег выигрывает Джим, равна $\frac{1}{3}$, а вероятность того, что забег выиграет Том, равна $\frac{1}{5}$. Какова вероятность того, что забег выиграет один из них?

Решение: $P(A+B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

Пример 11

Вероятность того, что у взрослого пациента все зубы сохранились равна 0,67. Вероятность того, что некоторые зубы отсутствуют равна 0,24. Вероятность того, что он беззубый равно 0,09. Вычислить вероятность того, что у пациента несколько зубов.

Решение: P(A+B)=P(A)+P(B)=0,67+0,24=0,91.

Пример 12

Вероятность попадания в опухолевую клетку «мишень» первого радионуклида равна P =0,7, а второго –P =0,8. Найти вероятность попадания в клетку - «мишень», если бы одновременно использовались оба препарата.

Решение:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(A \cdot B)=0{,}7+0{,}8 - 0{,}56=0{,}94.$$

Для непрерывных случайный величин условие нормировки имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Пример 13

В большой популяции плодовой мушки 25% мух имеют мутацию глаз, 50% - мутацию крыльев, а 40% мух с мутацией глаз и крыльев. Какова вероятность того, что у мухи, наудачу выбранной из этой популяции, окажется хотя бы одна из этих мутаций?

Решение:

А – Событие, состоящее в том, что случайно выбранная мха имеет мутации глаз. В есть событие, состоящее в том, что случайно выбранная муха имеет мутацию крыльев. Вероятность того, что муха имеет одну или обе мутации:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(AB).$$

Тогда $P(A+B)=0{,}25+0{,}5 - 0{,}4\cdot 0{,}25=0{,}65.$

4. Условная вероятность

Условная вероятность события В – это вероятность события В, найденная при условии, что событие А произошло. Обозначается Р(А/В).

<u>Пример 14</u>

В коробке содержатся 3 белых и 3 желтых таблетки. Из коробки дважды вынимают наугад по одной таблетке, не возвращая их в коробку. Найти вероятность появления белых таблеток при втором испытании (событие В), если при первом испытании была извлечена желтая таблетка (событие А).

Решение:

После первого испытания в коробке осталось 5 таблеток, из них 3 белых.

Искомое условие вероятности: $P(B/A)= 3/5 =0{,}6$.

<u>Пример 15</u>

В коробке находится 8 красных и 6 белых таблеток. Из коробки последовательно без возвращения извлекают 3 таблетки. Найти вероятность того, что все 3 таблетки белые.

Решение:

Обозначим; A_1 - первая таблетка белая, A_2 - вторая таблетка белая, A_3 - третья таблетка белая.

$$P(A_1A_2\,A_3)=P(A_1)P(A_2\,/A_1)\cdot P(A_3\,/A_1\,A_2);$$

$$P(A_1\,)=\ \frac{6}{14};\quad P(A_2\,/A_1)=\ \frac{5}{13};\quad P(A_3\,/A_1\,A_2)=\frac{4}{12};$$

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}=\frac{5}{91}=0{,}055.$$

<u>Пример 16</u>

Предположим, что в некоторой семье имеются 2 ребенка.

1. Какова вероятность, что оба ребенка – мальчики?

2. Если известно, что, по крайней мере, один из детей – мальчик, то какова вероятность того, что об ребенка – мальчики?

3. Если известно, что старший ребенок – мальчик, то вероятность того, что оба ребенка – мальчики?

Решение:

1. Четыре равновероятных события ММ, МД, ДМ ДД; Р(ММ)= 1/4 .

2. Исключается вариант ДД: Р(ММ)= 1/3.

3. Варианты только: ММ, МД: Р(ММ)= 1/2.

5.Закон умножения вероятностей

Произведение двух событий – это событие, состоящее в совместном появлении этих событий (А и В).

<u>Пример 17</u>

Пусть имеются следующие события: А – «из колоды карт вынута дама»; В – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Что представляет собой событие АВ?

Решение: АВ есть событие «вынута дама пик».

Событие В называются независимыми от события А, если появление события А не изменяет вероятности появления события В.

Вероятность появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot\ P(B).$$

Для зависимых событий:

$$P(AB)=P(A)\ \cdot P(B/A).$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло.

<u>Пример 18</u>

Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение: P(A/B)=P(A) ·P(B) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

<u>Пример 19</u>

Вероятность того, что у взрослого пациента все зубы сохранились равна 0,67. Какова вероятность того, что у двух не имеющих отношения друг к другу больных, ожидающих приема в кабинете стоматолога, есть все зубы?

Решение: P(A · B)=P(A) · P(B)=0,67 · 0,67=0,45.

<u>Пример 20</u>

Найти вероятность того, что в семье из двух детей:

1) оба ребенка – мальчики; 2) оба ребенка – девочки; 3) старший ребенок

мальчик, а младший – девочка. Вероятность рождения мальчика – 0,515.

Решение:

P(ММ)=P(М) ·P(М)=0,515 ·0,515=0,265;

P(ДД)=0,485· 0,485=0,235;

P(МД)=0,515· 0,485=0,25

<u>Пример 21</u>

Известно, что в 3 случаях из 250 на свет появляются близнецы, причем в одном случае – это истинные (монозиготные) близнецы. Какова вероятность, что у определенной беременной женщины родятся близнецы мальчик и девочка. Учтите, что однояйцовые близнецы никогда не бывают разных полов – это обязательно либо 2 мальчика, либо 2 девочки.

Решение:

Вероятность иметь дизиготных близнецов равна:

$$P(A)=\frac{3}{250}; \quad 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Искомая вероятность:

$$P(A)\cdot P(B)= \frac{3}{250}\cdot\frac{2}{3}\cdot \frac{1}{125}\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{250}.$$

Пример 22

Вероятность того, что студент в летнюю сессию сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы 1)только второй экзамен; 2)все три экзамена.

Решение:

1) $P(B)=P(A_1\ A_2\ A_3\ )=P(A_1\ )\cdot P(A_2\ )\cdot P(A_3\ )=0,1\ \ 0,9\ \ 0,2=0,018$

2) $P(A_1A_2\ A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2\ )\cdot P(A_3\ )=0,9\ \ 0,9\ \ 0,8=0,648.$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1 , A_2 ,…, A_n , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, …, $\bar{A}_n$.

Пример 23

Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий такова: P_1 = 0,75; P_2 = 0,8; P_3 = 0,85. Какова вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех этих орудий?

Решение:

$g_1= 1 – P_1 = 1 – 0,75= 0,25;$

$g_2= 1 – P_2 = 1 – 0,8 = 0,2;$

$g_3= 1 – P_3 = 1 – 0,85= 0,15;$

$P(A) = 1 – g_1g_2g_3;$

$P(A)= 1 – 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,15=0,9925.$

Пример 24

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

Решение:

Вероятность того, что в мишень попадет первый стрелок и не попадет второй, равна:

$$P(A_1\ \bar{A}_2)=0{,}7\cdot\ (1-0{,}8)=0{,}7\cdot\ 0{,}2=0{,}14$$

Вероятность того, что попадает второй стрелок в мишень и не попадет первый, равна:

$$P(\bar{A}_1\ A_2)=(1-0{,}7)\cdot\ 0{,}8=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24.$$

Вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок, равна сумме этих вероятностей:

$$P(A_1\ \bar{A}_2\ )+P(A_1\ \bar{A}_2\ )=0{,}14+0{,}24=0{,}38.$$

<u>Пример 25</u>

Сколько должна планировать пара иметь детей, что бы вероятность хотя бы одного мальчика была выше 90% (вероятность рождения мальчика и девочки – 0,5).

Решение:

Пусть вероятность того, что все девочки:

$$P(Д) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\ \ldots \frac{1}{2}n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}9$$

Вероятность того, что не все девочки:

P(хотя бы один мальчик)= $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}9.$

$$0{,}1=\left(\frac{1}{2}\right)^n;\ \frac{1}{10} = 1/2^n;\ \ 2^n = 10 \Rightarrow n\approx 4.$$

6.Формула Байеса

Формула Байеса применяется, когда событие *A,* которое может появиться только с одной из гипотез $H_1,\ H_2\ \ldots H_n$, произошло и необходимо произвести количественную переоценку *априорных* вероятностей этих гипотез $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$, известных до испытания, т.е. найти *апостериорные* (получаемые после проведения испытания) условные вероятности гипотез $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$, …, $P(H_n/A)$:

$$P(H_i/A) = \frac{P(Hi)\cdot P(A/Hi)}{P(A)}$$

Или вместо $P(A)$ используем ее значение, вычисленное по формуле полной вероятности:

$$P(H_i/A) = \frac{P(Hi)\cdot P(A/Hi)}{P(Hi)\cdot P(A/Hi)+\ldots+P(Hn)\cdot P(A/Hn)}$$

Итак, пусть до опыта имеются гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$. После опыта становится известной информация о результатах опыта, но не полная, а именно: результаты наблюдений показывают, что наступило некоторое событие A.

Считается, что до опыта были известны *(априорные)* вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ и *условные* вероятности $P(A/H_1)$, $P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$. Необходимо определить *апостериорные* вероятности гипотез $P(H_1/A), P(H_2/A), \ldots, P(H_n/A)$.

Значение формулы Байеса состоит в том, что при наступлении события*A*, т.е. по мере получения новой информации, мы можем проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы. Такой подход называется байесовским.

Пример 26

Два охотника одновременно стреляют одинаковыми пулями в медведя. В результате медведь был убит одной пулей (событие *A*). Как охотники должны поделить шкуру убитого медведя, если известно, что вероятность попадания у первого охотника 0,3,а у второго 0,6?

Решение:

Воспользуемся формулой Байеса. Определим предварительно гипотезы.

Гипотеза H_1 :попал первый охотник, второй промахнулся.

Гипотеза H_2: попал второй, первый промахнулся.

Гипотеза H_3: попали оба охотника.

Гипотеза H_4: оба промахнулись.

Событие A может произойти только тогда, когда произошла либо гипотеза H_1, либо гипотеза H_2, т. е.:

$$P(A/H_1)=1, \qquad P(A/H_3)=0$$

$$P(A/H_2)=1, \qquad P(A/H_4)=0$$

Предполагаем, что попадания охотников в медведя не зависят друг от друга. И получаем:

$P()$ = 0,3·(1 – 0,6) = 0,12;

$P(H_2)$ = 0,6·(1 – 0,3) = 0,42;

$P(H_3)$ = 0,3·0,6 = 0,18;

$P(H_4)$ = (1 – 0,3)(1 – 0,6) = 0,28.

Применяем формулу Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H1)\cdot P(A/H1)}{P(H1)\cdot P(A/H1) + P(H2)\cdot P(A/H2) + P(H3)\cdot P(A/H3) + P(H4)\cdot P(A/H4)}$$

$$P(H_1/A) = \frac{0{,}12\cdot 1}{0{,}12\cdot 1+0{,}42\cdot 1+0{,}18\cdot 0+0{,}28\cdot 0} = \frac{2}{9}$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H2)\cdot P(A/H2)}{P(H1)\cdot P(A/H1) + P(H2)\cdot P(A/H2) + P(H3)\cdot P(A/H3) + P(H4)\cdot P(A/H4)}$$

$$P(H_2/A) = \frac{0{,}42\cdot 1}{0{,}12\cdot 1+0{,}42\cdot 1+0{,}18\cdot 0+0{,}28\cdot 0} = \frac{7}{9}.$$

Таким образом, при справедливом делении первый охотник должен получить $\frac{2}{9}$ шкуры, т.е. меньше четвертой части шкуры, в то время как, на первый взгляд, казалось, что ему причитается $\frac{1}{3}$ шкуры (0,3).

Задание: Выполните задания по вариантам:

Вариант 1

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6?
2. Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты она три раза упадет гербом кверху?
3. Консультационный пункт университета получает пакеты с контрольными работами из городов A, B и C. Вероятность получения пакета из города A равна 0,6, а из города B – 0,1. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C.

4. Вероятность того, что в летнюю сессию студент сдаст первый экзамен, равна 0,8; второй — 0,9; третий — 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст хотя бы один экзамен.
5. Имеется два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, а во втором — 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один ящик и вынимают из него шар. Какова вероятность того, что оставшийся шар является белым?

Вариант 2

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 30 (включительно) является делителем числа 30?
2. В НИИ работает 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60-немецкий, а 50-знают оба. Какова вероятность того, что выбранный наудачу сотрудник не знает ни одного иностранного языка?
3. С первого предприятия поступило 200 пробирок, из которых 190 стандартных, а со второго – 300, из которых 280 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу взятая пробирка будет стандартной.
4. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.
5. Два автомата производят одинаковые хирургические зажимы. Производительность первого автомата вдвое больше, чем второго. Первый автомат производит в среднем 60% зажимов отличного качества, а второй — 84%. Наудачу взятый зажим оказался отличного качества. Найти вероятность того, что он произведен первым автоматом.

Вариант 3

1. Группа туристов, состоящая из 12 юношей и 8 девушек, выбирает по жребию хозяйственную команду в составе 4 человек. Какова вероятность того, что в числе избранных окажется двое юношей и две девушки?

2. Имеется три урны. В первой находится 5 белых шаров и 3 черных, во второй – 6 белых и 2 черных, в третьей—10 белых шаров. Вынимают наугад один шар. Урна выбирается тоже наугад. Найти вероятность того, что этот шар белый.
3. На тридцати историях болезни написаны 30 двухзначных чисел от 1 до 30 (их порядковые номера). Эти истории болезней лежат на полке в случайном порядке. Какова вероятность вынуть историю болезни с номером, кратным 2 или 3?
4. Отдел технического контроля проверяет медицинское изделие на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное
5. В пяти аптечках находятся одинаковые по массе и размерам таблетки. В двух — по 6 зеленых и 4 желтых таблеток. (Это аптечка состава H_1). В двух других аптечках (состава H_2) — по 8 зеленых и 2 желтых таблеток. В одной аптечке (состава H_3) — 2 зеленых и 8 желтых таблеток. Наудачу выбирается аптечка и из нее извлекается таблетка, которая оказалась зеленой. Какова вероятность того, что зеленая таблетка извлечена из аптечки первого состава

Критерии оценивания практических работ

- оценка «отлично» выставляется обучающемуся за работу, выполненную безошибочно, в полном объеме с учетом рациональности выбранных решений;
- оценка «хорошо» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в полном объеме с недочетами;
- оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (не менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы);
- оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пехлецкий И.Д. Математика [Текст] : учеб. пособие для студ. Учреждений сред. проф. образования /И.Д. Пехлецкий. - 12-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2017 . - 320с.

2. Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. Учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 2-е изд., стер. – М: Издательский центр «Академия», 2018. – 368 с.

Интернет-ресурсы:

1. www.ru.Wikipedia.org
2. www.ru.matformula.ru
3. www.reshebnik.ru
4. www.exponenta.ru

Приложение А

Некоторые сведения из элементарной математики

Алгебра

Законы действий над числами

Переместительный закон сложения: $a + b = b + a$.

Сочетательный закон сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Переместительный закон умножения: $ab = ba$.

Сочетательный закон умножения: $(ab)c = a(bc)$.

Распределительный закон умножения относительно сложения: $(a + b)c = ac + bc$.

Распределительный закон умножения относительно вычитания: $(a - b)c = ac - bc$.

Дробные выражения

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},\ b \neq 0,\ c \neq 0.$

Действия с дробями (предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля):

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b},$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Степени и корни

Степень с целым показателем

$$a^n = a \cdot a \cdots a \ (n \text{ раз}, \ n \in N,\ n \neq 1),$$

$$a^1 = a,\ a^0 = 1 \quad (a \neq 0), \quad a^{-n} = 1/a^n \quad (a \neq 0).$$

Свойства:

$$a^m a^n = a^{m+n},\ \ a^m / a^n = a^{m-n},\ \ \left(a^m\right)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n,\ \ (a/b)^n = a^n / b^n.$$

Корень n-й степени

$\sqrt[n]{a}$ - арифметический корень n-й степени из числа $a,\ a \geq 0,\ \sqrt[n]{a} \geq 0,\ \ n \in N,\ \ n > 1.$

Свойства:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b} \quad (b > 0), \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

В частности, $\sqrt{a}$ - арифметический квадратный корень: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \quad \sqrt{a^2} = |a|$

Степень с дробным (рациональным) показателем

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \quad m \in Z, \; n \in N, \; n \geq 2, \; a > 0.$$

Свойства степени с действительным показателем

$$(a > 0, \; b > 0, \; x \in R, \; y \in R)$$

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}, \; (ab)^x = a^x b^x,$$

$$(a/b)^n = a^x/b^x, \quad a^x = b^{x \log_b a},$$

$$a^x = e^{x \ln a} = \exp(x \ln a), \quad a^x = 10^{x \lg a}.$$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия - числовая последовательность (a_n), определяемая условиями: 1) $a_1 = a$, 2) $a_{n+1} = a_n + d, \quad n = 1, 2, \ldots$ (d - разность арифметической прогрессии).

Свойства арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

Формула n-го члена: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия - числовая последовательность (b_n), определяемая условиями: 1) $b_1 = b \quad (b \neq 0)$; 2) $b_{n+1} = b_n q \quad (q \neq 0)$, $n = 1, 2, \ldots$ (q - знаменатель геометрической прогрессии).

Свойства геометрической прогрессии:

$$b_{n+1}/b_n = b_{n+2}/b_{n+1}, \quad b_{n+1}^2 = b_n b_{n+2}.$$

Формула n-го члена: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Формулы суммы n первых членов $(q \neq 1)$:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$b + bq + bq^2 + \ldots = b/(1-q), \quad |q| < 1.$$

Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2),$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$
$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4),$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc,$$
$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd,$$
$$(a+b-c-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd + 2cd,$$
$$a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 + bx + c,$$

где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Свойства числовых неравенств

1) Если $a < b$, то при любом c: $a + c < b + c$.
2) Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac<bc$.
3) Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac>bc$.
4) Если $a < b$, a и b одного знака, то $1/a > 1/b$.
5) Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c< b + d$, $a - d < b - c$.
6) Если $a < b$, $c < d$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то $ac < bd$.
7) Если $a < b$, $a > 0$, $b > 0$, то $a^2 < b^2, \quad a^n < b^n \quad (n \in N)$.
8) Если $|a| < |b|$, то $a^2 < b^2$.

Логарифмы

$\log_a b \quad (a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$ - логарифм числа *b* по основанию *a*.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b.$

$\lg b$ - десятичный логарифм (логарифм по основанию 10): $10^{\lg b} = b.$

$\ln b$ - натуральный логарифм (логарифм по основанию *e*): $e^{\ln b} = b.$

Переход от одного основания к другому:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

В частности, $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a},\quad \ln b = \frac{\lg b}{\lg e} = \frac{\lg b}{M}$$ ($M = \lg e = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343$ - модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным).

Свойства логарифмов (*u*, *v* >*0*):

$$\log_a a = 1,\quad \log_a 1 = 0,\quad \log_a(uv) = \log_a u + \log_a v,$$

$$\log_c \frac{1}{v} = -\log_c v,\quad \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v,$$

$$\log_a u^\alpha = \alpha \log_a u,\quad \log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\log_a u,\quad n\in N,\quad n\neq 1.$$

Тригонометрические формулы

Тригонометрические функции

$$\sin\alpha,\quad \cos\alpha,$$

$$tg\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha,\quad \alpha\neq \pi/2+\pi n,\quad n\in Z,$$

$$ctg\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha,\quad \alpha\neq \pi n,\quad n\in Z,$$

$$\sec\alpha = 1/\cos\alpha,\quad \alpha\neq \pi/2+\pi n,\quad n\in Z,$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha,\quad \alpha\neq \pi n,\quad n\in Z.$$

Знаки тригонометрических функций

Четверть	Величина угла	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
I	$0<\alpha<\pi/2$	+	+	+	+
II	$\pi/2<\alpha<\pi$	+	–	–	–
III	$\pi<\alpha<3\pi/2$	–	–	+	+
IV	$3\pi/2<\alpha<2\pi$	–	+	–	–

Формулы приведения

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$tg\beta$	$ctg\beta$
$\pi/2+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$3\pi/2+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi/2-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$3\pi/2-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$
$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1,\quad \alpha\neq\pi n/2,\quad n\in Z,$$
$$1+tg^2\alpha=1/\cos^2\alpha,\quad \alpha\neq\pi/2+\pi n,\quad n\in Z,$$
$$1+ctg^2\alpha=1/\sin^2\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z.$$

Выражение тригонометрических функций через одну из них того же аргумента

(выбор знака перед корнем зависит от того, в какой четверти находится угол α)

Через $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$
$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\quad ctg\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Через $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},$$
$$tg\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},\quad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Через $tg\alpha$:

$$ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha},$$
$$\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Через $ctg\alpha$:

$$tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha},$$
$$\sin\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}.$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta},\ tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

(в последних двух формулах $\alpha\neq\pi/2+\pi n,\quad \beta\neq\pi/2+\pi n$ и соответственно $\alpha+\beta\neq\pi/2+\pi n,\quad \alpha-\beta\neq\pi/2+\pi n,\quad n\in Z$);

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha},\ ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

(в последних двух формулах $\alpha\neq\pi n,\quad \beta\neq\pi n$ и соответственно $\alpha+\beta\neq\pi n,\quad \alpha-\beta\neq\pi n,\quad n\in Z$).

Преобразование суммы тригонометрических функций

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z,$$
$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z,$$
$$ctg\alpha+ctg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\quad n\in Z,$$
$$ctg\alpha-ctg\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\quad n\in Z,$$
$$A\sin x+B\cos x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi_0),$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

Тригонометрические функции двойного и тройного аргумента

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}, \quad tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}.$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

(выбор знака зависит от того, в какой четверти находится угол $\alpha/2$)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Выражение тригонометрической функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)}, \quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)},$$
$$tg\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1-tg^2(\alpha/2)}, \quad ctg\alpha = \frac{1-tg^2(\alpha/2)}{2tg(\alpha/2)}.$$

Числовые функции

Основные понятия

Область определения (множество задания) функции *f*: $X \to R$: $X = D(f)$.

Множество значений функции *f*: $E(f) = \{f(x) | x \in X\} = f(X)$

График функции: $\Gamma_f = \{(x,\ y) \in R^2 \,|\, x \in X,\ y = f(x)\}$

Четная функция: $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = f(x)$

Нечетная функция: $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = -f(x)$

Периодическая функция (периода ω): $\forall x \in X \Rightarrow x + \omega \in X,\ x - \omega \in X$ и $f(x+\omega) = f(x)$.

Монотонные функции

Функция *f* строго возрастает (возрастает) на множестве *X*:
$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
Функция *f* возрастает (не убывает) на множестве *X*:
$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$
Функция *f* строго убывает (убывает) на множестве *X*:
$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
Функция *f* убывает (не возрастает) на множестве *X*:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

тепенная функция $y = x^{\alpha},\ \alpha \in R$

1. $\alpha = 2n,\ n \in N:$

$$y = x^{2n},\ D(f) = R,\ E(f) = [0,\ +\infty\ [.$$

Функция четная, строго убывает на $]-\infty;\ 0]$ и строго возрастает на $[0;\ +\infty\ [$ (рис. 2.1).

2. $\alpha = 2n-1,\ n \in N:$

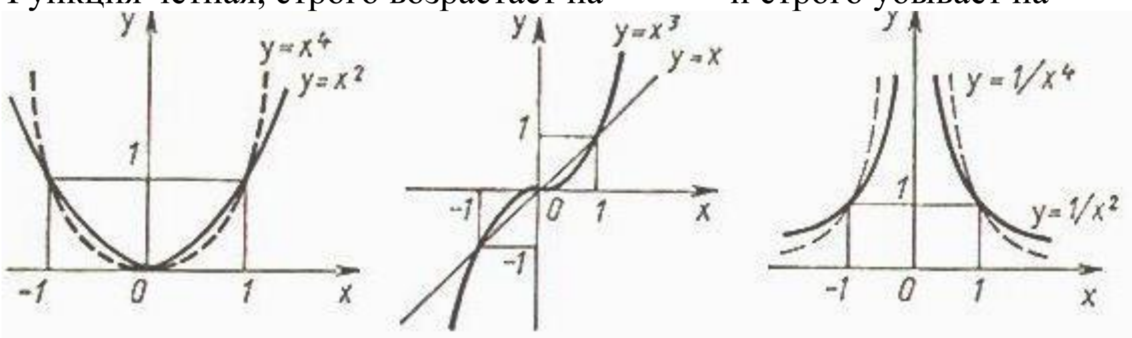
$$y = x^{2n-1},\ D(f) = R,\ E(f) = R.$$

Функция нечетная, строго возрастает (рис. 2.2).

3. $\alpha = -2n,\ n \in N:$

$$y = \frac{1}{x^{2n}},\ \ D(f) = R \setminus \{0\},\ \ E(f) =]\ 0;\ +\infty\ [.$$

Функция четная, строго возрастает на $]-\infty; 0[$ и строго убывает на $]0;+\infty[$



4. $\alpha = -2n+1,\ n \in N:$

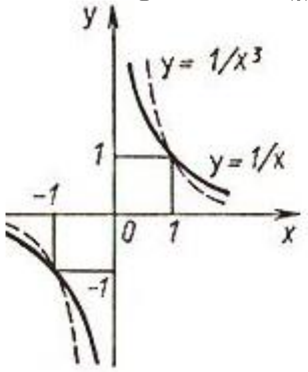
$$y = \frac{1}{x^{2n-1}},\ D(f) = R \setminus \{0\},\ E(f) = R \setminus \{0\}$$

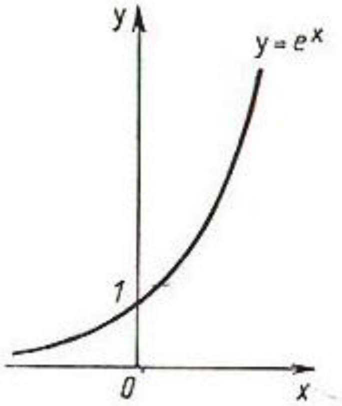
Функция нечетная, строго убывает на $]-\infty; 0[$ и $]0;+\infty[$ (рис. 2.4).

5. $\alpha \notin Z:$

$$y = x^{\alpha},\ \ D(f) =]\ 0;\ +\infty\ [,\ \ E(f) =]\ 0;\ +\infty\ [.$$

При некоторых α *D(f)* и *E(f)* могут быть шире.





Экспонента

$$y = e^x = \exp(x),\ \ D(f) = R,\ \ E(f) = \left]\,0;\ +\infty\right[.$$

Функция строго возрастает.

Показательная функция (рис. 2.6)

$$y = a^x = e^{x\ln a},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1;$$
$$D(f) = R,\ \ E(f) = \left]\,0;\ +\infty\right[.$$

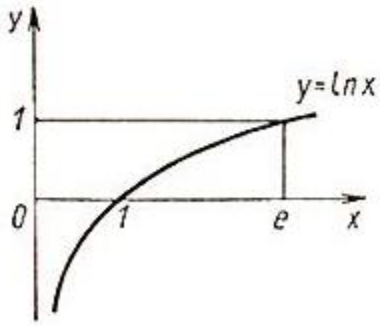
При *0 < a < 1* функция строго убывает, при *a > 1* строго возрастает.

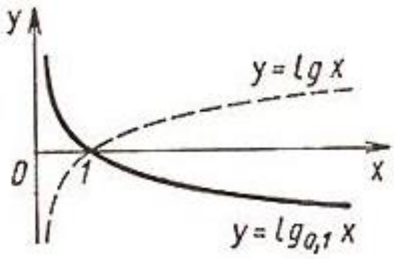
Логарифмическая функция

Логарифм натуральный

$$y = \ln x,\ \ D(f) = \left]\,0;\ +\infty\right[,\ \ \ E(f) = R.$$

Функция строго возрастает.





Логарифм с основанием *a*

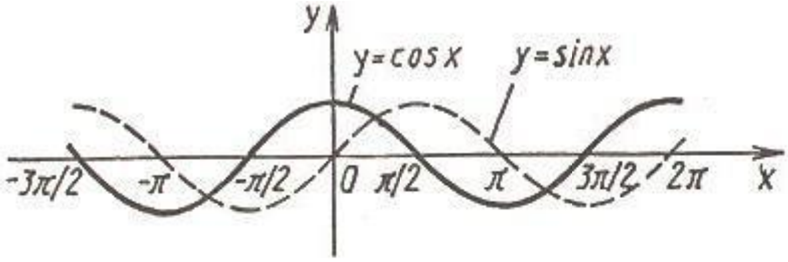
$$y = \log_a x,\ \ \ a > 0,\ \ \ a \neq 1,$$
$$D(f) = \left]\,0;\ +\infty\right[,\ \ E(f) = R.$$

При *0 < a < 1* ф. строго убывает, при *a > 1* строго возрастает.

Тригонометрические функции

1. $y = \sin x$:

$$D(f) = R,\ \ E(f) = \left]\,-1;\ 1\,\right[.$$



Функция нечетная. Период $\omega = 2\pi.$ На каждом из промежутков $[-\pi/2+2\pi k;\ \pi/2+2\pi k\ ],\ k\in Z,$ ф. строго возрастает, на $[\pi/2+2\pi k;\ 3\pi/2+2\pi k\ ],\ k\in Z,$ строго убывает.

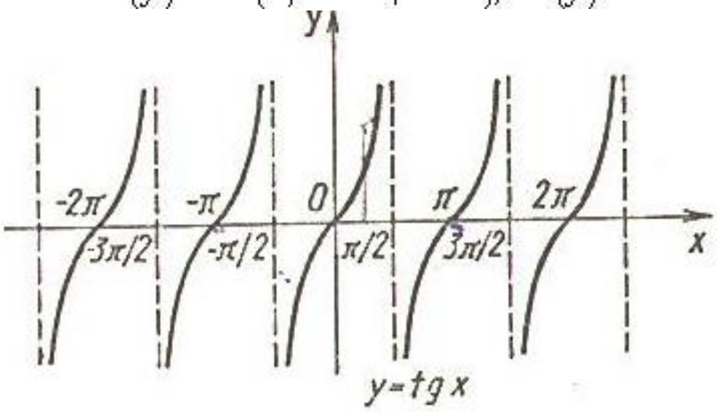
2. $y=\cos x$ (рис. 2.9):

$$D(f)=R,\ E(f)=\,]-1;\ 1\,[.$$

Функция четная. Период $\omega = 2\pi.$ На каждом из промежутков $[2\pi k;\ \pi+2\pi k],\ k\in Z,$ ф. строго убывает, на $[\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k],\ k\in Z,$ строго возрастает.

3. $y=tgx$

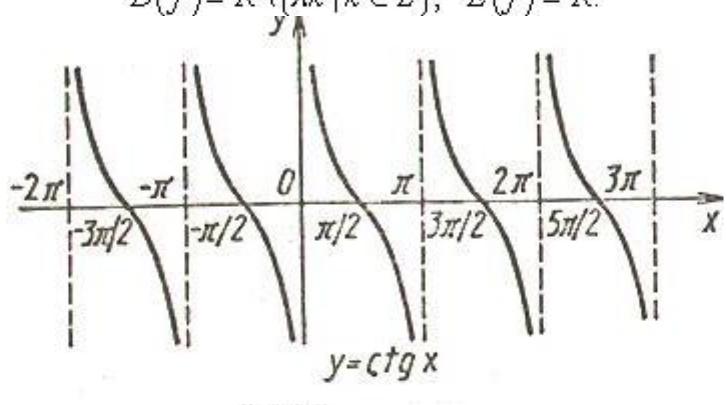
$$D(f)=R\setminus\{\pi/2+\pi k\,|\,k\in Z\},\quad E(f)=R.$$



Функция нечетная. Период $\omega = \pi.$ Функция строго возрастает на каждом из промежутков $]-\pi/2+\pi k;\ \pi/2+\pi k[,\ k\in Z.$

4. $y=ctgx$

$$D(f)=R\setminus\{\pi k\,|\,k\in Z\},\quad E(f)=R.$$



Функция нечетная. Период $\omega = \pi.$ Функция строго убывает на каждом из промежутков $[\pi k;\ \pi+\pi k],\ k\in Z.$

Обратные тригонометрические функции

1. $y=\arcsin x$

$$D(f)=[-1;\ 1],\quad E(f)=[-\pi/2;\ \pi/2].$$

Функция нечетная, строго возрастает.

$$\arcsin 0 = 0,\quad \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},\quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3},\ \arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

2. $y=\arccos x$

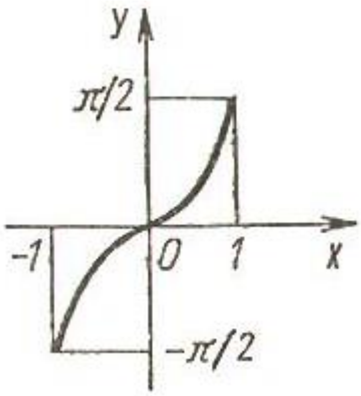
$$D(f)=[-1;\ 1],\quad E(f)=[0,\ \pi]$$

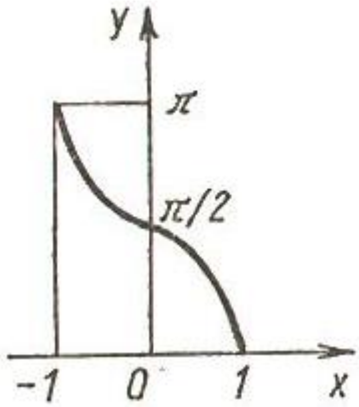
Функция строго убывает

$$\arccos(-1)=\pi,\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6},\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3},\quad \arccos 0=\frac{\pi}{2},\quad \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3},$$

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6},\quad \arccos 1=0.$$





Пределы

Свойства пределов

1. Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\left(\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0\right).$$

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ и $a_n\le b_n\quad \forall n,$ то $a\le b.$

3. Если $a_n\le c_n\le b_n\quad \forall n,$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a.$

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$

Некоторые пределы

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, \quad \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{shx}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{chx-1}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{thx}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha, \quad \lim_{x\to +0} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha>0),$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha>0), \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0, \quad \lim_{x\to +0} x^x = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q|<1), \quad \lim_{n\to\infty} nq^n = 0 \quad (|q|<1),$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}(n^\alpha/a^n) = 0 \quad (|a|>1),$$

$$\lim_{n\to\infty}(a^n/n!)^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(\ln n/n) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\ln^q n/n^\alpha) = 0 \quad (\alpha>0), \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a>0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1/\sqrt[n]{n!}\right) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(n/\sqrt[n]{n!}\right) = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_n}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \quad (b_0 \neq 0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 3\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \quad (\textit{формула} \quad \textit{Валлиса}),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1,$$

Производные и дифференциалы

Определение производной

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Односторонние производные

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция, дифференцируемая в точке x_0

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+o(\Delta x)$$ при $$\Delta x\to 0$$

$$A=f'(x_0).$$

Дифференциал

$$dy=f'(x)dx,\quad f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Дифференцирование арифметических комбинаций

(u, v, w - дифференцируемые функции, $\alpha,\ \beta$ - постоянные

$$(\alpha u+\beta v)'=\alpha u'+\beta v',\quad d(\alpha u+\beta v)=\alpha du+\beta dv,$$

$$(uv)'=u'v+uv',\quad d(uv)=udv+vdu,$$

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw',$$

$$d(uvw)=vwdu+uwdv+vudw,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0),\quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}(v\neq 0),\quad d\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{dv}{v^2}.$$

Производные основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$\ln x$	$1/x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$
x^2	$2x$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$	$\sin x$	$\cos x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x\rvert>1$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$1(x)$	$\delta(x)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$		

Производная степенно-показательной функции

$$\left(u^v\right)' = \left(e^{v\ln u}\right)' = v u^{v-1} u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Производные высших порядков некоторых функций

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
c	0
x^{α}	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\,(0!=1)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln^n a$
$\sin x$	$\sin(x+\pi n/2)$
$\cos x$	$\cos(x+\pi n/2)$
$\operatorname{sh} x$	$\begin{cases} shx & при \quad n=2k, \\ chx & при \quad n=2k-1 \end{cases}$
$\operatorname{ch} x$	$\begin{cases} chx & при \quad n=2k, \\ shx & при \quad n=2k-1 \end{cases}$
$y=\operatorname{arctg} x$	$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y \sin n(y+\pi/2)$

Локальный экстремум дифференцируемой функции

Необходимое условие локального экстремума

Если x_0 - точка локального экстремума функции f, то $f'(x_0)=0.$

Достаточные условия локального экстремума

I Правило. Пусть $f'(x_0)=0.$

Если f' при переходе через точку x_0 меняет знак с "+" на "-", то x_0 - точка локального максимума.

Если f' при переходе через точку x_0 меняет знак с "-" на "+", то x_0 - точка локального минимума.

Если f' при переходе через точку x_0 не меняет знака, то точка x_0 не является точкой локального экстремума.

II Правило. Пусть f дважды дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)\neq 0.$

Если $f''(x_0)<0,$ то x_0 - точка локального максимума.

Если $f''(x_0)>0,$ то x_0 - точка локального минимума.

III Правило. Пусть f n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$

Если n - четное и $f^{(n)}(x_0)<0,$ то x_0 - точка локального максимума.

Если n - четное и $f^{(n)}(x_0)>0,$ то x_0 - точка локального минимума.

Если n - нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Точки перегиба

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную. Если при переходе через точку x_0 функция f меняет направление выпуклости, то x_0 называют точкой перегиба функции f, а точку $(x_0; f(x_0))$ - точкой перегиба графика функции f. График функции переходит с одной стороны касательной, проведенной в точке $(x_0; f(x_0))$, на другую сторону. Точки перегиба f - точки экстремума для f'.

Необходимые условия наличия перегиба

$f''(x_0)=0$ либо $f''(x_0)$ не существует.

Достаточные условия наличия перегиба

1. Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 - точка перегиба.

2. Если $f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0,$ то при n четном x_0 - точка перегиба, при n нечетном x_0 не является точкой перегиб

Неопределенный интеграл

Первообразная

Первообразной функции f на промежутке I называется функция F, такая, что $F'(x)=f(x)\quad \forall x\in I.$

Неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где F - первообразная функции f (на промежутке); C - произвольная постоянная.

Основные свойства

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x),\quad d\int f(x)dx=f(x)dx.$

2. $\int F'(x)dx = F(x)+C, \quad \int dF(x) = F(x)+C.$

3. Если $\int f(x)dx = F(x)+C,$ то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \quad a \neq 0.$$

4. $\int (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx, \quad \alpha^2+\beta^2 \neq 0.$

Замена переменных в неопределенном интеграле

1. $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(u(x))+C.$

2. Если $x=\varphi(t),\ \varphi'(t)\neq 0,\ F$ - первообразная для $(g\circ\varphi)\varphi',$ то

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C = F(\varphi^{-1}(x))+C.$$

Формула интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

(u, v - дифференцируемые функции).

Простейшие интегралы

$$\int 0\cdot dx = C, \quad \int 1\cdot dx = \int dx = x+C,$$

$$\int xdx = \frac{x^2}{2}+C, \quad \int x^2dx = \frac{x^3}{3}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x|+C, \quad \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}+C, \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq -1,$$

$$\int\frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{-\beta+1}\frac{1}{x^{\beta-1}}+C, \quad \beta\neq 1, \quad \int\frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C, \quad a\neq 0,$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C, \quad a\neq 0,$$

$$\int\frac{xdx}{x^2+\alpha} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\alpha\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\, x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\,\frac{x}{a}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$$

Элементы комбинаторики, формула Ньютона

Перестановки. Размещения. Сочетания.

Число перестановок из *n* элементов:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!.$$

Число размещений из *n* по $m(n \geq m)$:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (0! = 1, \ \ 1! = 1,)$$

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1), \quad A_n^0 = 1,$$

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m,$$

$$A_n^n = P_n = n!, \quad A_n^{n-1} = A_n^n = n!.$$

Число сочетаний из *n* по $m(n \geq m)$:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}.$$

Свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n, \quad C_n^0 = C_n^n = 1,$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Рекурентная формула для числа сочетаний:

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}, \quad 0 \leq m \leq n.$$

Формула бинома Ньютона

$$(a+b)^1 = a+b,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots +$$

$$+ C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n, \quad n \in N.$$

Если *k*-й член ((*k+1*)-е слагаемое) разложения степени бинома обозначать через T_k, то

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Треугольник Паскаля

0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

(n-я строка состоит из чисел $C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots, C_n^n$).

Возведение многочлена в степень

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc,$$
$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc,$$
$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + \right.$$
$$\left. + c^2a + c^2b\right) + 6abc,$$
$$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4\left(a^3b + a^3c + b^3a + \right.$$
$$\left. + b^3c + c^3a + c^3b\right) + 6\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right) +$$
$$+12\left(a^2bc + b^2ac + c^2ab\right),$$