Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

по учебной дисциплине

«Математика»

для специальности 15.02.12

Монтаж, техническое обслуживание и ремонт промышленного оборудования (по отраслям)

(ТОП-50)

г. Челябинск, 2019г.

Методические рекомендации составлены в соответствии с программой учебной дисциплины «Математика», для специальности 15.02.12. Монтаж, техническое обслуживание и ремонт промышленного оборудования (по отраслям) (Топ 50), а также с требованиями работодателя

ОДОБРЕНО
Предметной (цикловой) комиссией
протокол № ______
от «__»__________2019 г.
Председатель ПЦК

_________О.И.Макаренко

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по НМР

_________ Т.Ю. Крашакова

«___»__________2019 г.

Автор: Чернова И.И. - преподаватель ГБПОУ «Южно-Уральский государственный технический колледж»

АКТ СОГЛАСОВАНИЯ

Методических рекомендаций по выполнению самостоятельных работ по дисциплине «Математика» для специальности

15.02.12. Монтаж, техническое обслуживание и ремонт промышленного оборудования (по отраслям) (Топ 50), разработанных преподавателем Южно-Уральского государственного технического колледжа Черновой И.И.

Учебная дисциплина «Математика» является частью программы подготовки специалистов среднего звена согласно ФГОС по специальности СПО 15.02.07 Монтаж, техническое обслуживание и ремонт промышленного оборудования (по отраслям) (Топ 50). «Математика» относится к математическому и общему естественнонаучному циклу и определяет общий объем знаний и умений, составляющих базу профессиональных компетенций.

Практическая направленность дисциплины реализуется через выполнение самостоятельных работ, на проведение которых программой отводится 23 часа.

Методические рекомендации по выполнению самостоятельных работ разработаны с учетом требований работодателя к подготовке специалистов среднего звена по данной специальности и включают в себя работу с различными источниками информации, доказательство теорем, выполнение индивидуальных расчетных и графических работ. Самостоятельные работы составлены с учетом требований работодателей к владению специалистами среднего звена умением выполнять необходимые измерения и связанные с ними расчеты; применять математические методы для решения профессиональных задач.

Самостоятельные работы направлены на формирование компетентности специалистов в осуществлении поиска и использования информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития, в использовании информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности, в работе с коллективом, руководством, потребителями.

Методические рекомендации по выполнению самостоятельных работ могут быть использованы для работы в учреждениях среднего профессионального образования.

Закрытое акционерное общество «Вометаллургмонтаж-2» ЗАО г.Челябинск

Технический директор
ЗАО «ВММ-2» Р.Г. Девальд

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов – это учебная деятельность студента, выполняемая во внеаудиторное время без непосредственного участия преподавателя, но по его заданию и под его руководством, направленная на формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствование и самореализацию.

Целью самостоятельной работы студентов является:

-систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практическое их применение;

-развитие аналитических способностей и логического мышления;

-овладение навыками работы с нормативной и справочной литературой;

-развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

-овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;

Для успешности организации самостоятельной работы необходимы следующие условия:

– мотивация получения знаний и готовность студентов к самостоятельной деятельности;

– наличие и доступность всего необходимого учебно-методического и справочного материала;

– система регулярного контроля качества выполненной самостоятельной работы;

– консультационная помощь преподавателя.

Для внеаудиторной работы студентов по учебной дисциплине «Математика» следующие формы самостоятельной работы:

- самостоятельная работа с учебной литературой и интернет ресурсами;

- заполнение таблиц и составление схем;
- решение расчетных задач;
- подготовка рефератов;
-выполнение презентаций

В результате выполнения самостоятельной работы студент должен сформировать: *элементы следующих компетенций*:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 3. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста

ПК 3.1. Определять оптимальные методы восстановления работоспособности промышленного оборудования

умения:

- Анализировать сложные функции и строить их графики;
- Выполнять действия над комплексными числами;
- Вычислять значения геометрических величин;
- Производить операции над матрицами и определителями;
- Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- Решать системы линейных уравнений различными методами

знания:

- Основные математические методы решения прикладных задач;
- Основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- Основы интегрального и дифференциального исчисления;
- Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

Общий объём времени, отведённого на самостоятельную работу составляет 23 часа.

Отчеты по внеаудиторной самостоятельной работе выполняются в тетрадях.

Критерии оценивания:

- оценка «отлично» выставляется обучающемуся за работу, выполненную безошибочно, в полном объеме с учетом рациональности выбранных решений;
- оценка «хорошо» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в полном объеме с недочетами;
- оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (не менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы);
- оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы).

Тематический план

Номер темы	Название ВСР	Количество часов
1.2.	Выполнить расчётную работу по теме: « Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей» Выполнение расчётных заданий по теме: «Различные варианты использования первого и второго замечательных пределов для решения профессиональных задач»	4
1.3.	Выполнение расчётных заданий по теме: «Вычисление производных сложных функций». Выполнение расчётно-графических заданий по теме: «Исследование и построение графиков функций» Выполнение расчётных работ по теме: «Вычисление неопределенных интегралов».	6
2.1.	Выполнение расчетной работы по теме: «Вычисление определителя 3-го порядка с использованием свойств определителей» Подготовка реферата по теме: « Методы решения систем линейных уравнений с n неизвестными».	3
2.2.	Выполнение расчетной работы по теме: «Применение обыкновенных дифференциальных уравнений для профессиональных расчетов».	2
3.1.	Выполнение расчетной работы по темам: «Показательная форма комплексных чисел», «Действия над комплексными числами», « Геометрическое изображение комплексного числа»	4
4.1.	Выполнение расчетной работы по теме: « Применение комбинаторики для решения профессиональных задач»	2
4.3.	Самостоятельная работа студентов Расчетные работы по теме «Решение задач на вычисление вероятностей с использованием элементов математической статистики».	2
ИТОГО:		23

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тема 1. 2. Предел функции. Непрерывность функции

1.2.1. Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей

Цель работы: Отработка навыков вычисления пределов функций

Задание: Раскройте неопределённости неопределённостей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для всех значений x, достаточно близких к x_0 и отличных от x_0, значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа b. Пишут: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.

Свойства пределов. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$. Тогда:

1. Предел константы равен самой константе: $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.
2. Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=a+b$.
3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=a\cdot b$.
4. Постоянный множитель выносится за знак предела: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[k\cdot f(x)\right]=k\cdot a$.
5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$, если $g(x)\neq 0$.
6. Показатель степени можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n=a^n$.

Задания для самостоятельной работы.

Раскройте неопределённости

1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-2x^3+3)$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+5x-3}{x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{6x^2-x-1}{x-\frac{1}{2}}$

4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{x+2}$ 5) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{5x^2-51x+10}{x-10}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$ 8) $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ 9) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)^2}{x^2+2x-15}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 11) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1})$ 12) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x^5+4x^3+3}{7x^5-4}$

13) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+1}{3x^5+7x+8}$ 14) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{6x^7-2}{4x^5+7x^6+1}$ 15) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x-3x^4}{9x^4+5}$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией одной независимой переменной?
2. Перечислить основные элементарные функции.
3. Какие функции называются элементарными? Приведите примеры.
4. Что такое предел функции y = f(x) при x→ a?
5. Дайте определение правого и левого пределов функции y = f(x)
6. Дайте определение предела последовательности.
7. Какая функция называется бесконечно большой величиной при x→ a и x→ +∞?
8. Какова связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?

1.2.2. Различные варианты использования первого и второго замечательных пределов для решения профессиональных задач

Цель работы: Отработка навыков вычисления 1-го и 2-го замечательных пределов

Задание: Раскройте неопределённости неопределённостей $\frac{0}{0}$, 1^{∞}

Ход работы:

Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

<u>Определение.</u> Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для всех значений x, достаточно близких к x_0 и отличных от x_0, значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа b. Пишут: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$

.

<u>Свойства пределов</u>. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$.

Тогда:

7. Предел константы равен самой константе: $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

8. Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$.

9. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$.

10. Постоянный множитель выносится за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot a$.

11. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, если $g(x) \neq 0$.

12. Показатель степени можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^n = a^n$.

Задания для самостоятельной работы.

Раскройте неопределённости :

Вариант 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg^2 x}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x - 1}{4x + 3}\right)^{2x}.$$

Вариант 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{x^2}; \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{6x - 5}{6x - 1}\right)^{2x}.$$

Вариант 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot tg 2x}; \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x + 5}\right)^{7x}.$$

Вариант 4

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}; \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + 4}{x - 1}\right)^{6x}.$$

Вариант 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \cdot \sin x}; \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{5x - 2}{5x + 1}\right)^{2x}.$$

Вариант 6

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}; \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{7x - 1}{7x + 5}\right)^{4x}.$$

Вариант 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\cdot\sin 2x};\qquad \lim_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}.$$

Вариант 8

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot tg3x};\qquad \lim_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}.$$

Вариант 9

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x};\qquad \lim_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией одной независимой переменной?
2. Перечислить основные элементарные функции.
3. Что такое предел функции y = f(x) при x→ a?
4. Дайте определение правого и левого пределов функции y = f(x)
5. Дайте определение предела последовательности.
6. Какая функция называется бесконечно большой величиной при x→ a и x→ +∞?
7. Какова связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
8. По какой формуле вычисляется первый замечательный предел?
9. По какой формуле вычисляется второй замечательный предел?

Тема 1. 3. Дифференциальное и интегральное исчисления

1.3.1. Вычисление производных сложных функций

Цель работы: Отработка навыков вычисления производной функций и практического применения производной.

Задание 1: Вычислите производные сложных и элементарных функций

Ход работы

Краткие теоретические сведения

Формулы дифференцирования		Правила дифференцирования	Применение производной
$c'=0$ $x'=1$ $(x^n)'=nx^{n-1}$ $(kx)'=k$	$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(u+v)'=u'+v'$ $(uv)'=u'v+v'u$ $(cu)'=cu'$	$f'(x)=tg\alpha=k$ $v(t)=S'(t)$ $a(t)=v'(t)$ Уравнение касательной:

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, $v \neq 0$ $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $f(x)$ возрастает на I, если $f'(x) > 0$ на I. $f(x)$ убывает на I, если $f'(x) < 0$ на I. Выпуклость графика функции и его перегибы: $y'' > 0$, выпуклость вниз y'' _> 0, выпуклость вверх

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1: Вычислите производные сложных и элементарных функций

1.1. Вычислить производные следующих функций:

1)$y = 2x^2 - 3x + 5$; 2)$y = 4 - x^4$; 3)$y = x^4 - x^2$; 4)$y = 5x^4 - 7x^2 + x - 3$; 5)$y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 9x - 5$; 6) $y = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 6x - 1$; 7) $y = \frac{3x^6}{2} + 4x^5 - 2x^3 - \frac{1}{2x}$; 8) $y = 2 - \frac{x}{2} - 5x^2 - \frac{3}{x^2}$;

9) $y = (2x-3)(3x^4 + 5x - 8)$; 10) $y = 3x^{-2}$; 11) $y = 4x^{-3}$; 12) $y = 3x^{-\frac{2}{3}}$; 13) $y = 5x^{-\frac{3}{5}}$;

14) Найти $f'(-1)$, *если* $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$;

15) Найти $f'(0{,}5)$, *если* $f(x) = -x^3 + 9x^2 - x + 2$;

1.2. Вычислите производные сложных функций:

1) $y = 3\sin 5x$; 2) $y = 4\cos\frac{x}{2}$; 3) $y = \arccos 3x$; 4) $y = \ln\sqrt{2x-1}$;

5) $y = (x^4 - x - 1)^4$; 6). $y = \sqrt{x^3 + 2x - 5}$; 7) $y = \cos^2 x$; 8) $y = \sin^3 x$; 9) $y = \ln\sin 3x$;

10) $y = \ln\sqrt{2x-1}$; 11) $y = 3^{\sin x} - 2^{2x} + e^{5x}$; 12) $y = 3^{\sqrt{x}} - 4^{7x} + 3e^{2x}$;

1.3. Вычислите производные показательно-степенных функций:

1) $y = x^x$; 2) $y = x^{x^x}$; 3) $y = x^{\frac{1}{x}}$; 4) $y = x^{\ln x}$; 5) $y = x^{tgx}$; 6) $y = (arctgx)^{\ln x}$;

7) $y = (arctgx)^x$; 8) $y = (x + x^2)^x$.

1.4. Геометрический и физический смысл производной.

1) Составьте уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой а) $x_0 = -1$; б)$x_0 = 0$; в)$x_0 = 1$.

2) Дана кривая $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$. Составьте уравнение касательной в точке, абсцисса которой равна а) -1; б) 0; в) 1.

3) В какой точке касательная к кривой $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ параллельна прямой а) $2x + 2y - 5 = 0$; б)y – 3x -5 =0; в) y + x =0?

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение производной функции y =f(x).
2. Каковы геометрический и механический смыслы производной?
3. Как найти производную сложной функции?
4. Дать определение дифференциала функции y =f(x).
5. Какой геометрический смысл имеет дифференциал?
6. Что называется производной второго порядка от функции y =f(x)?

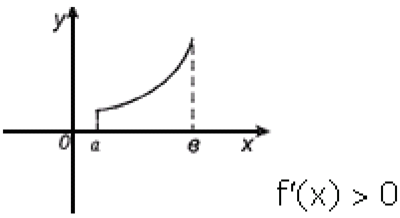
1.3.2. Исследование и построение графиков функций

Цель работы: Отработка навыков применения производной к исследованию функции

Задание 1: Исследуйте и постройте график функции:

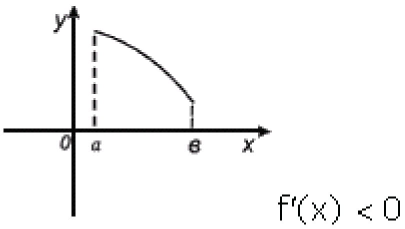
Ход работы

Достаточное условие возрастания функции



Если в каждой точке интервала (a, b) f'(x)>0, то функция f(x) возрастает на этом интервале.

Достаточное условие убывания функции.



Если в каждой точке интервала (a, b) f'(x)<0, то функция f(x) убывает на этом интервале.

Определение:

x_0 называется критической точкой функции f(x), если

1) x_0 – внутренняя точка области определения f(x) ;

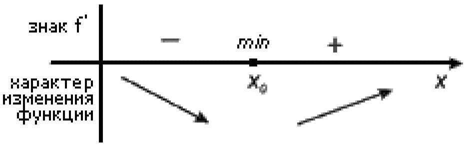
2) $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

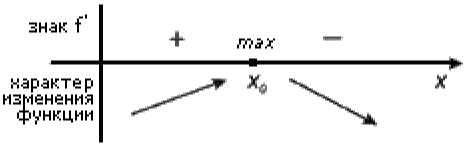
Необходимое условие экстремума:

Если x_0– точка экстремума функции f(x), то эта точка является критической точкой данной функции.

Достаточное условие экстремума:

Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак, то x_0 – точка экстремума функции f(x).





Примеры экстремумов:

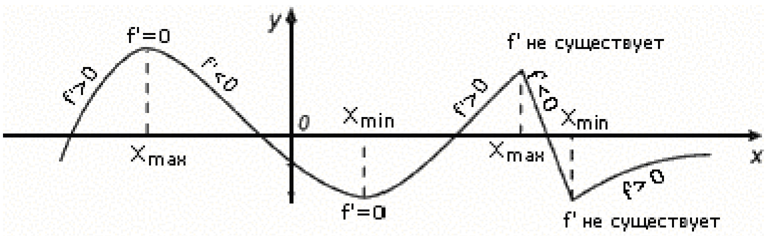


Схема исследования функции.

1. Найти область определения функции.
2. Проверить, не является ли функция четной или нечетной; проверить также, не является ли она периодической.
3. Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции. Иногда для уточнения построения графика следует найти две три дополнительные точки.
4. Найти производную функции и ее критические точки.
5. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.
6. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f(x), непрерывной на отрезке [a; b].

1. Найти значения функции в концах отрезка, т.е. f(a) и f(b) ;
2. Найти значения функции в тех критических точках, которые принадлежат интервалу (a, b) ;
3. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Задания для самостоятельной работы

Исследуйте и постройте график функции:

1) $y=8-2x-x^2$; 2) $y=x^3-3x^2+4$; 3) $y=3-3x+x^3$; 4)$y = x^4 + 2x^3 – 5x^2$; 5) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; 6) $y=x\sqrt{2-x}$; 7) $y=\ln(x^2+1)$;

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит достаточный признак экстремума?
2. Какие точки называются точками перегиба функции y =f(x)?
3. Что называется асимптотой функции y =f(x)?

1.3.3. Вычисление неопределенных интегралов

Цель работы: Отработка навыков вычисления первообразной функций и практического применения интеграла.

Задание 1: Вычислите неопределённые интегралы

Задание 2: Примените формулу Ньютона-Лейбница для вычисления площадей фигур

Ход работы

Теоретический материал

I.Основные формулы интегрирования

$\int dx = x + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$;

$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$;

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

$\int e^x dx = e^x + C$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

$\int e^x dx = e^x + C$;

$\int \sin x dx = -\cos x + C$;

$\int \cos x dx = \sin x + C$;

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

II. Основные свойства интегралов

1⁰. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2⁰. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3⁰. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций: $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

4⁰. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx.$$

5⁰. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной *C*: $\int df(x)=f(x)+C$.

6⁰. Интеграл от сложной функции с линейным аргументом вычисляется по формуле:

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

III. Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенных интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование. Используется таблица интегралов, свойства неопределённых интегралов и различные преобразования подынтегрального выражения.
2. Интегрирование по частям. Данный способ состоит в том, подынтегральное выражение представляется в виде произведения двух множителей u и dv и заменяется двумя интегрированиями: 1) отыскание v из выражения для dv; 2) отыскание интеграла для vdu:
   $\int udv=uv-\int vdu$.
3. Метод замены переменной. Его применяют в том случае, если исходный интеграл сложно или невозможно с помощью алгебраических и иных преобразований свести к одному или нескольким табличным интегралам. Способ заключается в том, что заменяется новой переменной такая часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя).

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1: Вычислите неопределённые интегралы

1.1. Вычислите интеграл применяя основные правила интегрирования.

1. $\int x^6 dx$; 2. $\int \frac{dx}{x^2}$; 3. $\int x^{\frac{2}{3}} dx$; 4. $\int \sqrt{x} dx$; 5. $\int \left(5x^3 - 2x^2 + 3x - 8\right) dx$; 6. $\int \left(4x^3 - 15x^2 + 14x - 3\right) dx$;

7. $\int (2x-1)^3 dx$; 8. $\int x^3 (1+5x) dx$; 9. $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x} dx$; 10. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx$; 11. $\int \frac{4x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2} dx$;

1.2. Вычислите интегралы, используя метод подстановки.

1. $\int (7-2t)^3 dt$; 2. $\int (5u-1)^3 du$; 3. $\int \left(1+x^5\right)^7 x^4 dx$; 4. $\int \left(9-2x^3\right)^4 x^2 dx$; 5. $\int 4\left(x^4+5\right)^2 x^3 dx$;

1.3. Вычислите интегралы, применяя метод интегрирования по частям.

1. $\int x \cos x dx$; 2. $\int x e^x dx$; 3. $\int x^5 \ln x dx$; 4. $\int x e^{2x} dx$; 71. $\int x \ln x dx$;

1.4. Вычислите определённый интеграл , применяя формулу Ньютона-Лейбница

1. $\int_3^5 dx$; 2. $\int_0^1 x dx$; 3. $\int_0^2 3x^2 dx$; 4. $\int_{-1}^1 (2x+1) dx$; 5.92. $\int_0^2 3e^{3x} dx$; 93. $\int_0^\pi \cos\frac{x}{2} dx$; 94.

Задание 2: Примените формулу Ньютона-Лейбница для вычисления площадей фигур.

Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1. Осью Ох, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$; 2.$y^2 = 9x$, $x = 16$, $x = 25$, $y = 0$;

3. $y = -x^2 + 4$ и $y = 0$; 4. $y = x^2$, $y = 1/x$, $x \in [1; e]$; 5. $y^2 = x$, $y = x^2$;

6. $y = 8+2x-x^2$, $y = x+6$;

7. $xy = 6$ и $x + y - 7 = 0$; 8.$x - 2y + 4 = 0$, $x + y - 5 = 0$, $y = 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется первообразной?
2. В чём состоит суть метода интегрирования по частям?
3. В чём состоит суть метода замены переменной?

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 2.1. Матрицы и определители

2.1.1. Вычисление определителя 3-го порядка с использованием свойств определителей

Цель работы: Совершенствование умений выполнять действия над матрицами, вычислять определители разными способами

Задание: Вычислите определители 3-го порядка с использованием свойств определителей

Ход работы

Краткие теоретические сведения

Сложение матриц

Суммой матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковых размеров называется матрица $C=(c_{ij})$ тех же размеров, у которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \forall \ i, \ j.$ Обозначение: $C = A + B$.

Свойства сложения матриц: $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + 0 = A$, $A + (-A) = 0$, $\forall$ A, B, C.

Вычитание матриц

$$A - B = A + (-B).$$

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число α называется матрица $C=(c_{ij})$ тех же размеров, у которой $c_{ij}=\alpha a_{ij} \quad \forall \ i, \ j.$ Обозначение: $C=\alpha A.$

Свойства $1\cdot A = A,$ $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A, \ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, \ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A \quad \forall \ A, \ B$, и $\forall \ \alpha, \ \beta\in R.$

Умножение матриц

Произведением матрицы $A = (a_{ik})$ размером $m \times n$ на матрицу $B = (b_{ik})$ размером $n \times p$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размером $m \times p,$ у которой $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \forall \ i, \ j.$ Обозначение: *C* = *AB*.

Свойства *AE* = *EA* = *A*, *AO* = *OA* = *O*, *(AB)D* = *A(BD)*, α*(AB)* = (α*A)B* = *A*(α*B)*, *(A + B)D=AD + BD*, *D(A + B) = DA + DB* (при условии, что указанные операции имеют смысл).

Для квадратных матриц *A* и *B*, вообще говоря, $AB \neq BA.$

Транспонирование матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Свойства: $\left(A^T\right)^T = A, \ (\alpha A)^T = \alpha A^T, \ (A+B)^T = A^T + B^T,$ $(AB)^T = B^T A^T.$

Обратная матрица

Матрица A^{-1} - обратная для матрицы *A*, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E.$

Для квадратной матрицы *A* обратная существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0.$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы *A*.

Элементарные преобразования матрицы

Элементарными преобразованиями матрицы называют:

1) умножение какой-нибудь строки (столбца) на отличное от нуля число;

2) прибавление к какой-нибудь строке (столбцу) другой ее строки (столбца), умноженной на произвольное число;

3) перестановку местами любых двух строк (столбцов).

Вычисление обратной матрицы

Если с помощью элементарных преобразований строк квадратную матрицу *A* можно привести к единичной матрице *E*, то при таких же элементарных преобразованиях над матрицей *E* получим A^{-1}.

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(A \setminus E) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\text{Ко второй строке} \\ \text{прибавляем первую,} \\ \text{умноженную на 2.}}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\text{Вторую строку} \\ \text{умножаем на } -1/2.}}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \end{array}\right] \underset{\substack{\text{К первой строке} \\ \text{прибавляем вторую,} \\ \text{умноженную на 3.}}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3/2 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Определители

В частности *n = 2*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{I(2,1)} a_{12}a_{21} =$$

$$= (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

при *n = 3*

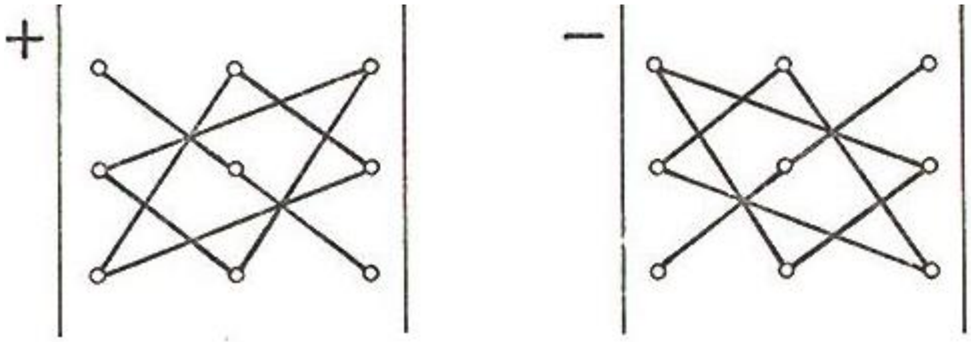
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} +$$

$$+(-1)^{I(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{I(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$+(-1)^{I(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{I(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} +$$

$$+(-1)^{I(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$



Задания для самостоятельной работы

Вычислите определители 3-го порядка с использованием свойств определителей

1.1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ 1.2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ 1.3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 1.4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

Вопросы для самопроверки

1. По какой формуле вычисляется определитель второго порядка?
2. По какой формуле вычисляется определитель третьего порядка?

2.1.2. Подготовка реферата по теме: « Методы решения систем линейных уравнений с n неизвестными».

Критерии оформления реферата смотрите в приложении А

Тема 2.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

2.1.1. Применение СЛАУ для профессиональных расчетов

Цель работы: Совершенствование умений применять методы решения СЛАУ для решения профессиональных задач

Задание: Решите задачи на практическое применение СЛАУ

Ход работы

Краткие теоретические сведения

Системой линейных алгебраических уравнений содержащей m уравн ений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где: числа a_{ij} , $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ называются коэффициентами системы, числа b_n – свободными членами.

x_n –подлежат нахождению

Первые СЛАУ встречаются ещё в вавилонских и египетских рукопи сях II века до н. э., а также в трудах древнегреческих, индийских и ки тайских мудрецов. В китайском трактате «Математика в девяти книгах»

словесно изложены правила решения систем уравнений, были замечены некоторые закономерности при решении. На протяжении многих лет вы дающиеся математики своего времени разрабатывали методы решения С ЛАУ. На данный момент существует множество различных методов реш ения систем. В своей работе я разберу один из основных методов реше ния СЛАУ, метод Гаусса.

Суть метода заключается в том, что систему линейных алгебраичес ких уравнений приводят к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования.

Приведённая система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{kk}k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

где $k \leq n,\ a_{ii} \neq \overline{1,k}$.

Коэффициенты a_{ii} называются главными элементами системы .

Составив ступенчатую систему.

Если система оказывается треугольной, то есть $k = n$ то система имеет единственное решение. Если же $k < n$, то исходная система имеет множество решений.

В электротехнике часто встречаются задачи, в которых необходим р асчёт электрической цепи, то есть необходим расчёт напряжения и силы тока во всех ветвях цепи. Например, известны сопротивления и ЭДС, но нет значений силы тока. Для решения таких задач используют прави ла Кирхгофа.

Разберём этот метод на конкретной задаче. При решении будем исп ользовать метод Гаусса. Этот метод является наиболее простым, и подх одит практически к любой системе.

Пример1:

Дана схема (рисунок 1), и известны сопротивления резисторов и ЭДС источников

$R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 150$ Ом, $R_3 = 150$ Ом, $E_1 = 75$ В, $E_2 = 100$ *В*

Требуется найти токи в ветвях

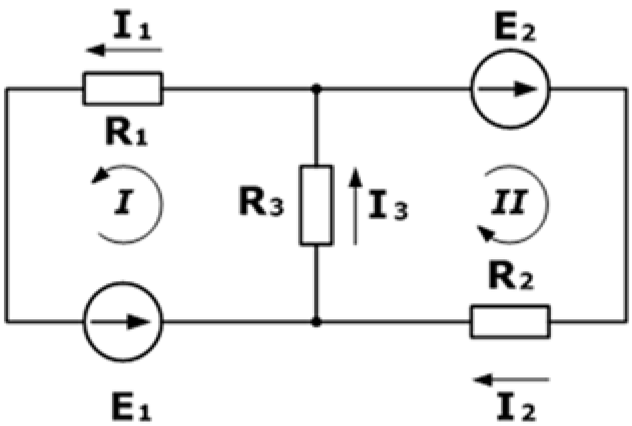


Рисунок 1. (Схема электрической цепи)

Решение:

Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равно 0. Значит: $I_3 - I_1 - I_2 = 0$.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений

на всех ветвях, принадлежащих любому замкнутому контуру цепи, равн а алгебраической сумме ЭДС ветвей этого контура. С помощью этого з акона составим уравнения для первого и второго контура цепи: $R_1I_1 + R_3I_3 = E_1$; $R_2I_2 + R_3I_3 = E_2$.

Теперь из трёх уравнений составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases} \begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0 \\ 100 I_1 + 150 I_3 = 75 \\ 150 I_2 + 150 I_3 = 100 \end{cases}$$

Из коэффициентов перед неизвестными составляем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 150 & 75 \\ 0 & 150 & 150 & 100 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение можно разбить на два этапа. Сначала с помощью элемента рных преобразований приведём систему к ступенчатому виду:

1-ую строку делим на 100: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 3/4 \\ 0 & 150 & 150 & 100 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

к 3 строке добавляем 1 строку, умноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & \frac{3}{4} \\ 0 & 150 & 150 & 100 \\ 0 & -1 & 2.5 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

2-ую строку делим на 150: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -1 & 2.5 & 3/4 \end{pmatrix}$

к 3 строке добавляем 2 строку: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3.5 & 17/12 \end{pmatrix}$

Теперь решаем ступенчатую систему:

$$\begin{cases} I_1 + 1.5 I_3 = 3/4 \\ I_2 + I_3 = 2/3 \\ 3.5 I_3 = 17/12 \end{cases}$$

Так как $k = n$, система имеет единственное решение.

Находим значения токов:

$$I_1 = \frac{1}{7} = 0.143\ \text{А};\ I_2 = \frac{11}{42} = 0.262\ \text{А};\ I_3 = \frac{17}{42} = 0.405\ \text{А}.$$

Вычислительная техника выполняет такие операции за доли секунд. Так им образом, СЛАУ играет большую роль в электротехнике. С помощью СЛАУ можно быстро и точно рассчитать эклектическую цепь.

Пример 2: На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов.

Записать в математической форме условия выбора технологий при производстве из 94 ед. сырья 574 изделий А и 328 изделий Б.

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
А	2	1	7	4
Б	6	12	2	3

Решение.

Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить плановое задание. Получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 94,$$

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 574,$$

$$6x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 328.$$

Решаем ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 574 \\ 6 & 12 & 2 & 3 & 328 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386 \\ 0 & 6 & -4 & -3 & -236 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386 \\ 0 & 0 & 26 & 9 & 2080 \end{pmatrix}$$

.

Имеем: r (A) = r (A) = 3, следовательно, число главных неизвестных равно трем, одно неизвестное x_4 - свободное. Исходная система равносильна следующей:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 94 - x_4,$$

$$- x_2 + 5x_3 = 386 - 2x_4,$$

$$26x_3 = 2080 - 9x_4.$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = 80 - 9/26\ x_4$, подставляя x_3 во второе уравнение, будем иметь: $x_2 = 14 + 7/26 x_4$ и, наконец, из первого уравнения получим: $x_1 = - 12/13\ x_4$. С математической точки зрения система имеет бесчисленное множество решений, т. е. неопределенна. С учетом реального экономического содержания величины x_1 и x_4 не могут быть отрицательными, тогда из соотношения $x_1 = -12/13\ x_4$ получим: $x_1 = x_4 = 0$. Тогда вектор (0, 14, 80, 0) является решением данной системы.

Задания для самостоятельной работы

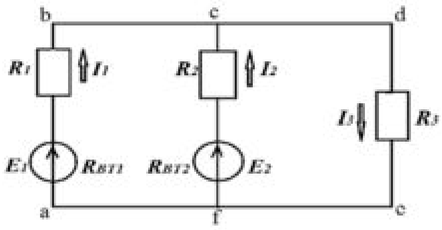
Задание: Решите задачи на практическое применение СЛАУ

1. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип	Способ раскроя		
заготовки	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Записать в математической форме условия выполнения задания.

2. Расстояние между городами 564 км. Навстречу друг другу из городов одновременно вышли поезда и встретились через 6 часов. Скорость одного поезда на 10 км больше скорости другого. Чему равна скорость каждого поезда?
3. Рассчитать сложную электрическую цепь, если E_1=246 В, R_1=0,3 Ом, E_2=230 В, R2=1 Ом, R_3=24 Ом, R_{BT1}= R_{BT2}=0.



РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Тема 3.1. Комплексные числа и действия над ними

3.1.1. Действия над комплексными числами

Цель работы: Совершенствование умений выполнять действия над комплексными числами

Задание 1: Заполните таблицу.

Задание 2: Выполните операции над комплексными числами

Ход работы

Краткие теоретические сведения

Комплексные числа - это минимальное расширение множества привычных нам действительных чисел. Их принципиальное отличие в том, что появляется элемент, который в квадрате дает -1, т.е. i, или мнимая единица.

$i^2 = -1$

Любое комплексное число состоит из двух частей: вещественной и мнимой:

$x + yi$ – комплексное число, x, y – действительные числа.

x – вещественная часть,

y – мнимая.

Операции над комплексными числами.

На самом деле, если брать в расчет модель множества комплексных чисел, интуитивно понятно, что сложение (вычитание) и умножение двух комплексных числе производятся так же как соответственные операции над векторами. Причем имеется в виду векторное произведение векторов, потому что результатом этой операции является опять же вектор.

Сложение.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

(Как видно, данная операции в точности соответствует

Вычитание, аналогично, производится по следующему правилу:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Умножение.

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

Деление.

Определяется просто как обратная операция к умножению.

$$(a+bi)\div(c+di)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

Пример 1

Сложить два комплексных числа $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 4-5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части: $z_1 + z_2 = 1+3i+4-5i = 5-2i$

Пример 2

Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2+i$, $z_2 = \sqrt{3}+5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 - z_2 = -2+i-(\sqrt{3}+5i) = -2+i-\sqrt{3}-5i = -2-\sqrt{3}-4i$$

Пример 3

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1-i$, $z_2 = 3+6i$

Очевидно, что произведение следует записать так: $z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i)$

Чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена.

$$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i) = 1\cdot 3 - i\cdot 3 + 1\cdot 6i - i\cdot 6i = 3-3i+6i+6 = 9+3i$$

Пример 4

Даны комплексные числа $z_1 = 13+i$, $z_2 = 7-6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Составим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13+i}{7-6i}$$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Вспоминаем формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7-6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7+6i$

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7+6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7+6i$:
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (помним, что $i^2=-1$

Распишу подробно:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}=\frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2}=\frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)}=$$
$$=\frac{85+85i}{49+36}=\frac{85+85i}{85}=1+i$$

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1: Прочитайте каждое утверждение, если вы с ним согласны то в колонке ответов поставьте «+», если же вы не согласны с данным утверждением, поставьте « – » в колонке ответов.

№п/п	Утверждение	Ответ
1	Число$\sqrt{2}$ является комплексным	
2	Число а, такое что $a^2 = -2$ является действительным.	
3	Число а, такое что $a^4 = 1$ является действительным.	
4	0 – комплексное число.	
5	Число 3i является чисто мнимым.	
6	Действительная и мнимая части комплексного числа 3 – 2i соответственно равны 3 и 2.	
7	Действительная и мнимая части сопряженных чисел отличаются только знаками.	
8	Сопряженным для действительного числа является само это число.	
9	Если$\bar{z}=-z$, то действительная часть числа z равна 0.	

Задание 2: примените правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел, определения равенства комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

1. Даны числа: $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-2i$. Найдите: a) z_1+z_2 b) z_1-z_2 c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$
   e) $z_1^2 - 2z_2$
2. Для чисел $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-2i$ найдите действительные числа a и b, для которых верно равенство $\frac{z_1}{z_2} = az_1 + bz_2$.
3. Запишите z в алгебраической форме: $z = \frac{-41+63i}{50} - \frac{6i+1}{1-7i}$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения комплексного числа
2. Какие действия можно производить с комплексными числами?

3.1.2. Показательная форма комплексных чисел

Запись комплексного числа z в виде $z=r\cdot e^{i\varphi}$ называется показательной формой записи, где число r - модуль комплексного числа z, φ - аргумент комплексного числа z.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Пример 1:

Представить в показательной форме заданные комплексные числа, для которых: 1) r=0,φ=5π; 2) r=10,φ=π/2 ; 3) r=2,φ=−π/3; 4)r=3,φ=0.
Решение:
Показательная форма записи некоторого комплексного числа имеет вид $z=r\cdot e^{i\varphi}$.

Для r=0, φ=5π получаем комплексное число $z=0\cdot e^{i\cdot 5\pi}$.
Для r=10, φ=π/2 получаем комплексное число $z=10\cdot e^{i(-\pi/3).}$
Для r=2, φ=−π/3 получаем комплексное число $z=3\cdot e^{i\cdot 0}$.
Для r=3, φ=0 получаем комплексное число $z=3\cdot e^{i\cdot 0}$.

Чтобы комплексное число z, записанное в тригонометрической форме, привести к показательной форме записи, необходимо выполнить следующее:

1. определить из тригонометрической записи числа значения модуля и аргумента;
2. подставить полученные значения в выражение $z=r\cdot e^{i\varphi}$.

Запись некоторого комплексного числа z в виде z=a+bi называется алгебраической формой записи (или алгебраической записью) комплексного числа. При этом: a - вещественная (действительная) часть, обозначение
Re z=a; b - мнимая часть, обозначение Im z=b.

Чтобы комплексное число z, записанное в алгебраической форме, привести к тригонометрической форме записи, необходимо выполнить следующее:

1. вычислить модуль и аргумент;
2. подставить полученные значения в выражение $z=r\cdot e^{i\varphi}$.

Пример 2:

Представить заданные комплексные числа в показательной форме: 1) $z=2+0\cdot i$; 2) $z=1/2+1/2\cdot i$.

Решение:

Показательная форма записи некоторого комплексного числа имеет вид $z=r\cdot e^{i\varphi}$.

1. По условию a=2,b=0. Вычислим модуль исходного комплексного числа: $r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

Вычислим аргумент исходного комплексного числа, используя формулу : $\varphi = z \cdot arctg\frac{0}{2} = arctg0 = 0$

Подставим полученные значения и получим: $z=2\cdot e^{i.0}$ Следовательно, $z=2\cdot e^{i.0}$ - искомая запись комплексного числа.

2. По условию a=1/2,b=1/2.

Вычислим модуль исходного комплексного числа: $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Вычислим аргумент исходного комплексного числа, используя формулу:

$\varphi = arctg\frac{1/2}{1/2} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$. Подставим полученные значения и получим:

$z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$. Следовательно, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ - искомая запись комплексного числа.

Арифметические действия над комплексными числами в показательной форме выполняются на основании свойств показательной функции.

Пусть $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$.

1. Произведение чисел z_1 и z_2

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\phi_1} \cdot |z_2|e^{i\phi_2} = |z_1| \cdot |z_2|e^{i\phi_1+i\phi_2} = |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

2. Частное чисел z_1 и z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\phi_1}}{|z_2|e^{i\phi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i\phi_1-i\phi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$

3. Возведение комплексного числа в степень:

$$z^n = \left(|z|e^{i\phi}\right)^n = |z|^n e^{in\phi}$$

4. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа $z=re^{i\varphi}$:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Записать комплексные числа в показательной форме
   a) z=4-3i
   b) z=12i

2. Выполните действия в показательной форме. Результат записать в алгебраической и тригонометрической форме:

а) $2e^{\frac{7\pi i}{4}} \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}$; б) $2e^{\frac{4\pi i}{3}} : 4e^{\frac{2\pi i}{i}}$; в) $6e^{2\pi i} \cdot 3e^{\frac{\pi i}{3}}$; г) $4e^{\frac{11\pi i}{6}} : 2e^{\frac{7\pi i}{6}}$

Вопросы для самопроверки

1. Запишите общий вид комплексного числа в показательной форме.
2. Запишите формулы для выполнения арифметических действий с комплексными числами в показательной форме.

3.1.3. Геометрическое изображение комплексного числа

Цель работы: Совершенствование умений изображать комплексное число на плоскости

Задание: Изобразите комплексные числа на плоскости

Ход работы

Краткие теоретические сведения

Каждому комплексному числу z=a+bi на комплексной плоскости соответствует точка z(a;b).

И наоборот, каждую точку z(a;b) плоскости можно считать изображением комплексного числа z=a+bi.

Таким образом, геометрическое изображение комплексных чисел в виде точек координатной плоскости устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости.

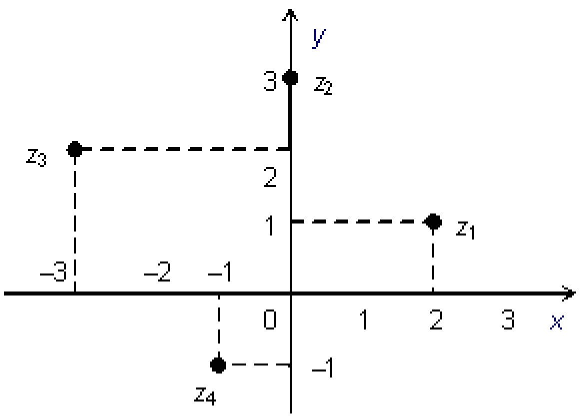
Действительные числа z=a+0i на комплексной плоскости изображаются точками с координатами (a;0) (лежащими на оси Ox), чисто мнимые числа z=0+bi — точками с координатами (0;b) (на оси Oy).

Поэтому ось абсцисс *Ox* называют *действительной осью*, а ось ординат *Oy*— *мнимой осью*.

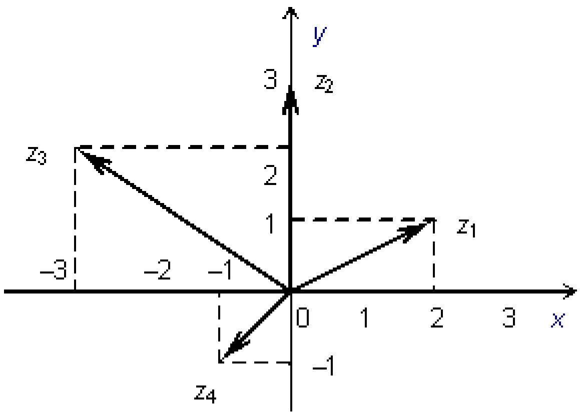
Пример 1:

Изобразим на комплексной плоскости числа

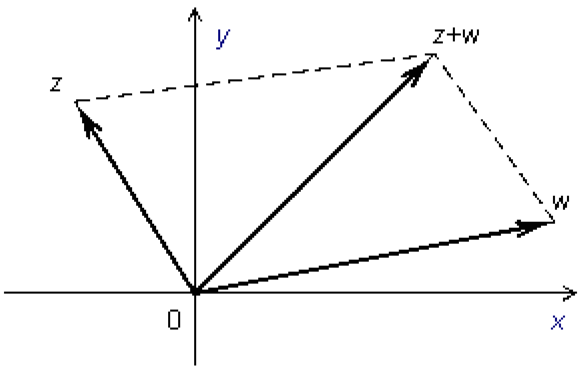
$z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3 + 2i$, $z_4 = -1 - i$, $z_5 = -3$:



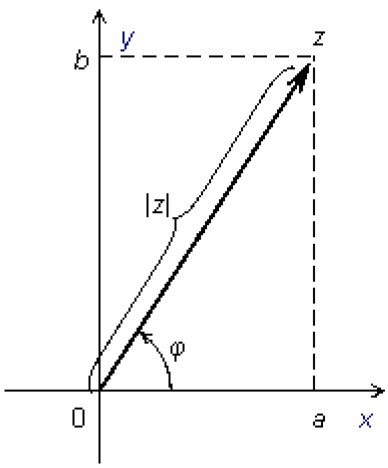
Однако чаще комплексные числа изображают в виде вектора с началом в точке O, а именно, комплексное число $z = a + bi$ изображается радиус-вектором точки с координатами (a; b). В этом случае изображение комплексных чисел из предыдущего примера будет таким:



Изображением суммы двух комплексных чисел z , w является вектор, равный сумме векторов, изображающих числа z и w . Иными словами, при сложении комплексных чисел складываются и векторы, их изображающие



Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображается радиус-вектором. Тогда длина этого вектора называется модулем числа z и обозначается $|z|$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



Угол, образованный радиус-вектором числа z с осью Ox, называется аргументом числа z и обозначается arg z . Аргумент числа определяется не однозначно, а с точностью до числа, кратного 2π . Однако, обычно аргумент указывают в диапазоне от 0 до 2π или в диапазоне от $-\pi$ до π . Кроме того у числа $z = 0$ аргумент не определен.

Угол, образованный радиус-вектором числа z с осью Ox, называется *аргументом* числа z и обозначается arg z . Аргумент числа определяется не однозначно, а с точностью до числа, кратного 2π. Однако, обычно аргумент указывают в диапазоне от 0 до 2π или в диапазоне от $-\pi$ до π. Кроме того у числа $z = 0$ аргумент не определен.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

С помощью этого соотношения можно находить аргумент комплексного числа:

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$ или $$\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a},$$

Задания для самостоятельной работы

1. Изобразите на комплексной плоскости середину отрезка, соединяющего точки:
   a) -1-2i и -3-4i
   b) 3-4i и 7-6i
2. Изобразите на комплексной плоскости точки пересечения отрезка, соединяющего точки
   a) -1+3i и 4-2i,
   b) -1+3i и 4-2i, с осями координат
3. Изобразите на плоскости середину отрезка, соединяющего точки 3-4i и 7-6i

Вопросы для самопроверки

1) Какая плоскость называется комплексной?

2) Как можно изображать комплексные числа на плоскости?

3) Какие операции можно производить с комплексными числами на плоскости?

РАЗДЕЛ 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Тема 4.1. Вероятность. Теорема сложения вероятностей

4.1.1. Применение комбинаторики для решения профессиональных задач

Цель работы: Совершенствование умений решать задачи содержащие элементы комбинаторики.
Задание: Решите задачи с элементами комбинаторики

Ход работы

Краткие теоретические сведения

1. Размещения без повторений

Подсчитаем количество способов расположить n различных элементов по k различным позициям ($k < n$). Такие расположения называются размещениями, а их количество, от французского слова *arrangement* обозначается A_n^k. В случае, если $k = n$ количество предметов совпадает с количеством имеющихся мест, и это уже изученная задача о числе перестановок.

Если из n объектов выбирают k штук, то число выборов последнего объекта есть $n - k$ невыбранных объектов, что означает наличие $n - k + 1$ возможности выбора последнего выбранного объекта. То же, другими словами: после выбора первых $k - 1$ элемента остается выбрать $n - (k - 1) = n - k + 1$ элемент.

Теорема: число размещений n различных элементов по k различным позициям есть

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1),$$

или, в терминах факториалов,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Примечание: заметим, что в случае, когда число мест, по которым размещают предметы, совпадает с количеством самих предметов, т. е. когда $k = n$, рассматриваемая задача становится задачей о числе перестановок. В нашем случае при этом мы получаем в знаменателе дроби ноль факториал, и для того, что бы разные формулы, соответствующие одной и той же задаче, приводили к одинаковым результатам, полагают, что $0! = 1$.

2. Сочетания

Подсчитаем количество способов, которыми можно выбрать k из n различных предметов. Такие выборки называются сочетаниями, а их количество обозначается C_n^k.

При $k < n$, выбрать *k* предметов из n можно A_n^k способами, переставляя их P_k способами:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Рекуррентная формула: $C_m^n = C_m^{n-1}\dfrac{m-n+1}{n}$.

Свойства сочетаний: $C_m^n = C_m^{m-n}$; $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

3. Перестановки с повторениями

Пусть даны n_1 элементов первого типа, n_2 — второго типа, ..., n_k — k-го типа, всего n элементов. Способы разместить их по n различным местам называются перестановками с повторениями. Их количество обозначается $P_n(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k)$.

Теорема: число перестановок с повторениями есть

$$P_n(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Размещения с повторениями

Пусть даны n различных видов предметов, которые можно разместить по k различным местам, причем выбирать предметы можно с повторениями (т.е. можно выбрать несколько предметов одного вида). Такие выборки называются размещениями с повторениями, а их количество вычисляется по формуле: $\bar{A}_n^k = n^k$ ..

4. Сочетания с повторениями

Пусть имеются предметы n различных видов предметов, и из них составляются наборы, содержащие k элементов. Такие выборки называются сочетаниями с повторением. Их число обозначается $\bar{C}_n^k$.

Теорема: число сочетаний с повторениями может быть вычислено по формулам:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} .$$

Задания для самостоятельной работы.

1) Сколькими способами можно в группе из 21 студентов выбрать старосту, заместителя старосты и физорга?
2) Порядок выступлений 9 участников конкурса определяется жеребьевкой. Сколько вариантов жеребьевки при этом возможно?
3) В семье двое детей. Найдите вероятность, что старший ребенок – мальчик.
4) В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны по очереди извлекаются 2 шара. Найти вероятность того, что вынутые шары одного цвета.
5) Игральную кость бросают два раза. Найдите вероятность того, что в сумме выпало не менее 10 очков.
6) Игральная кость брошена 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «шестерка».
7) Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что среди 4 фирм-нарушителей будет выявлено больше половины.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основную формулу размещений без повторений.
2. Что значит сочетание событий?
3. Какие события называются случайными?

Тема 4.3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

4.3.1. Решение задач на вычисление вероятностей с использованием элементов математической статистики

Цель работы: Совершенствование умений решать задачи содержащие элементы математической статистики

Задание 1: Выполните задания на вычисление количества вариантов событий.

Задание 2: Выполнение задания на вычисление вероятностей случайных событий с использованием элементов математической статистики».

Ход работы

Краткие теоретические сведения:

1. Теория вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется ***вероятностью*** этого события и обозначается символом *P(A).*

Определение. Вероятностью события *A* называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события *A*, к числу *n* всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$.

Следовательно, для нахождения вероятности события необходимо, рассмотрев различные исходы испытания, подсчитать все возможные несовместные исходы *n*, выбрать число интересующих нас исходов m и вычислить отношение *m* к *n*.

Из этого определения вытекают следующие свойства:

Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.

Действительно, число m искомых событий заключено в пределах $0\le m\le n$. Разделив обе части на *n*, получим

$0\le P(A)\le 1$.

2. Вероятность достоверного события равна единице, т.к. $n/n=1$.

3. Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку $0/n=0$.

Пример 1:. В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

Решение. Число всех равновозможных независимых исходов *n* равно числу сочетаний из 18 по 5 т.е.

$$n=C_{18}^{5}=\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=18\cdot17\cdot28=8568$$

Подсчитаем число m, благоприятствующих событию A. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$.

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно

$$C_{14}^3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 364$$.

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число комбинаций *m* составляет

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184$$.

Искомая вероятность события A равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2184}{8568} \approx 0{,}255$$.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$P(A+B) = P(A) + P(B)$ или

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

<u>Следствие 1.</u> Если событие A_1, A_2, : ,A_n образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$.

<u>Следствие 2</u>**.** Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$.

2. Математическая статистика

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики – разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:
а)оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен;
б)проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.
Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.
Выборочной совокупностью или просто выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов.
Генеральной совокупностью называют совокупность
объектов, из которых производится выборка.
Статистическим рядом распределения называют перечень всех значений x_i из выборки и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде интервального статистического ряда, т.е. последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Пример. Пусть объем выборки n = 20 и

x_i	2	6	12
m_i	3	10	7

Найдем относительные частоты:

$P_1^* = \frac{3}{20} = 0{,}15$; $P_2^* = \frac{10}{20} = 0{,}50$; $P_3^* = \frac{7}{20} = 0{,}35$.

Тогда распределение относительных частот:

x_i	2	6	12
P_i^*	0,15	0,50	0,35

Контроль: $0{,}15 + 0{,}50 + 0{,}35 = 1$.

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1: Выполните задания на вычисление количества вариантов событий

1.1. Найти число размещений: 1) A_{11}^3; 2) A_9^2; 3) A_{12}^5; 4) A_6^3; 5) A_7^5.

1.2. Вычислить значение выражения: 1) 3! + 4!; 2) 5! – 2!; 3) 6! * 2!

1.3. Вычислить:1) C_6^4; 2) C_5^1; 3) C_7^3; 4) C_4^2

1.4. Вычислить:1) $\frac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3} + A_5^2 * A_4^2 * A_3^2$

1.5. Вычислить: 1) $P_3 - P_4$; 4) 45+$P_2 * P_4$; 5) $P_6 + P_5$.

Задание 2: Выполнение задания на вычисление вероятностей случайных событий с использованием элементов математической статистики.

2.1. Из корзины, в которой находятся 9 красных, 8 желтых и 7 зеленых шаров, наудачу вынимается один. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется: а) красным, б) желтым; в) черным; г) зеленым.

2.2. В корзине находятся 30 белых и 20 черных шаров. Наугад вынимают один шар, который оказался белым, и откладывают его в сторону. Наугад вынимают еще один шар, который оказался черным, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

2.3. В колоде 36 карт. Наудачу вынимаются 2карты. Найти вероятность того, что это будут два туза

2.4. Дискретная случайная величина *X*имеет закон распределения.

x_i	*0,2*	*0,4*	*0,6*	*0,8*	*1*
p_i	*0,1*	*0,2*	*0,4*	P_4	*0,1*

Чему равна вероятность $P_4(X = 0{,}8)$? Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2.5. Дискретная случайная величина *X*имеет закон распределения.

x_i	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
p_i	P_1	*0,15*	P_3	*0,25*	*0,35*

Найти вероятность $P_1(x = 3)$ и $P_3(x = 5)$, если известно, что P_3в 4 раза больше P_1. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2.6. Известны значения распределения случайных величин X и Y — число очков выбиваемых первым и вторым стрелками.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Необходимо выявить, какой из двух стрелков стреляет лучше. Построить многоугольники распределения.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая величина называется случайной?
2. Закон распределения случайных величин
3. Что называется плотностью вероятности
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей
5. Формула полной вероятности
6. Формула Бернулли

Список литературы

1. Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. Учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 2-е изд., стер.-М.: Издательский центр «Академия», 2018. – 368 с

2. Пехлецкий И.Д. Математика [Текст] : учеб. пособие для студ. Учреждений сред. проф. образования /И.Д. Пехлецкий. - 12-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2017 . - 320с.

Интернет-ресурсы:

1. www.ru.Wikipedia.org
2. www.ru.matformula.ru
3. www.reshebnik.ru
4. www.exponenta.ru

Приложение А

Методические рекомендации по выполнению реферата

Реферат – это самостоятельная исследовательская работа, в которой автор раскрывает суть исследуемой проблемы; приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды не нее. Содержание реферата должно быть логичным; изложение материала носит проблемно-тематический характер.

Реферат – это один из самых сложных видов самостоятельной работы с книгой, а для этого следует овладеть более простыми приемами работы – разработкой плана, составлением тезисов и конспектов. Подготовка реферата и выступление с его изложением углубляет знания, расширяет кругозор, приучает логически, творчески мыслить, развивать культуру речи.

При просмотре литературы намечается ориентировочный план реферата, в который включается обычно 3-4 основных вопроса или раздела. В каждом из разделов формулируются подвопросы, помогающие последовательно раскрыть содержание проблемы.

В процессе изучения материала формулировки подвопросов и разделов обычно уточняются. При реферировании следует делать выписки, записывать мысли, возникающие при чтении; следует также точно записывать и определения тех понятий, которые будут использованы в реферате. Из прочитанной литературы нужно заимствовать не буквальный текст, а важнейшие мысли, идеи, теоретические положения; можно цитировать небольшие отрывки, приводить диаграммы, схемы, чертежи, но главное – высказывать собственные соображения по вопросам реферата. Приведенные выше советы следует рассматривать как примерные, предполагающие и другие подходы, поскольку у каждого человека вырабатываются свои приемы и навыки составления рефератов. Большую помощь в работе над рефератом оказывают предисловия к сборникам. В них можно найти сведения о цели издания, а также о существующих пробелах в исследовании.

При разработке плана реферата важно учитывать, чтобы каждый его пункт раскрывал одну из сторон избранной темы, а все пункты в совокупности охватывали тему целиком. Различают несколько композиционных решений реферата: во-первых, хронологическое, когда тема раскрывается в исторической последовательности; во-вторых, описательное, при котором тема расчленяется на составные части, в целом раскрывающие определенное явление; в-третьих, аналитическое, когда тема исследуется в ее причинно-следственных связях и взаимозависимых проблемах. Важно следить за тем, чтобы каждый пункт плана был соотнесен с главной темой и не содержал повторения в других пунктах. Важными разделами реферата является вступление и заключение. Во вступлении надо обосновать актуальность темы, обозначить круг составляющих ее проблем, четко и кратко определить задачу своей работы. В заключении делаются краткие выводы, подводятся итоги. В конце реферата должен быть приложен список литературы.

В отличие от конспекта реферат требует большей творческой активности, самостоятельности в обобщении изученной литературы, умения логически стройно изложить материал, оценить различные точки зрения на исследуемую проблему и высказать о ней собственное мнение. В реферате важно связать теоретические положения с практикой.

Таким образом, реферативная работа – это самостоятельная работа, которая должна свидетельствовать о знании литературы по данной теме, ее основной проблематике, отражать точку зрения студента на эту проблему, его умение осмысливать явления жизни на основе теоретических знаний.

При оценке реферата обычно руководствуются следующими критериями:

1. Удалось ли его студенту раскрыть сущность данной проблемы;
2. Сумел ли студент показать связь рассматриваемой проблемы с жизнью;
3. Проявил ли студент самостоятельность и творческий подход в изложении реферата;
4. Можно ли считать реферат логически стройным и т.д.

Реферат должен быть правильно оформлен. Содержание и оформление разделов реферата:

Титульный лист. Является первой страницей реферата и заполняется по строго определенным правилам. В верхнем поле указывается полное наименование учебного заведения. В среднем поле дается заглавие реферата, которое проводится без слова " тема " и в кавычки не заключается. Далее, ближе к правому краю титульного листа, указываются фамилия, инициалы студента, написавшего реферат, а также его курс и группа. Немного ниже или слева указываются название и код специальности, фамилия и инициалы преподавателя - руководителя работы. В нижнем поле указывается год написания реферата.

После титульного листа помещают оглавление, в котором приводятся все заголовки работы и указываются страницы, с которых они начинаются. Заголовки оглавления должны точно повторять заголовки в тексте. Сокращать их или давать в другой формулировке и последовательности нельзя. Все заголовки начинаются с прописной буквы без точки на конце. Последнее слово каждого заголовка соединяют отточием / ………….. / с соответствующим ему номером страницы в правом столбце оглавления. Заголовки одинаковых ступеней рубрикации необходимо располагать друг под другом. Заголовки каждой последующей ступени смещают на три - пять знаков вправо по отношению к заголовкам предыдущей ступени.

Введение. Здесь обычно обосновывается актуальность выбранной темы, цель и содержание реферата, указывается объект / предмет / рассмотрения, приводится характеристика источников для написания работы и краткий обзор имеющейся по данной теме литературы. Актуальность предполагает оценку своевременности и социальной значимости выбранной темы, обзор литературы по теме отражает знакомство автора реферата с имеющимися источниками, умение их систематизировать, критически рассматривать, выделять существенное, определять главное.

Основная часть. Содержание глав этой части должно точно соответствовать теме работы и полностью ее раскрывать. Эти главы должны показать умение исследователя сжато, логично и аргументировано излагать материал, обобщать, анализировать, делать логические выводы.

Заключительная часть. Предполагает последовательное, логически стройное изложение обобщенных выводов по рассматриваемой теме.

Библиографический список использованной литературы составляет одну из частей работы, отражающей самостоятельную творческую работу автора, позволяет судить о степени фундаментальности данного реферата.

В работах используются следующие способы построения библиографических списков: по алфавиту фамилий, авторов или заглавий; по тематике; по видам изданий; по характеру содержания; списки смешанного построения. Литература в списке указывается в соответствии с Методическими указаниями по оформлению

В приложении помещают вспомогательные или дополнительные материалы, которые загромождают текст основной части работы / таблицы, карты, графики, неопубликованные документы, переписка и т.д. /. Каждое приложение должно начинаться с нового листа / страницы / с указанием в правом верхнем углу слова " Приложение" и иметь тематический заголовок. При наличии в работе более одного приложения они нумеруются арабскими цифрами / без знака " № " /, например, " Приложение 1". Нумерация страниц, на которых даются приложения, должна быть сквозной и продолжать общую нумерацию страниц основного текста. Связь основного текста с приложениями осуществляется через ссылки, которые употребляются со словом " смотри " / оно обычно сокращается и заключается вместе с шифром в круглые скобки - (см. прил.1)/.

Приложение Б

Некоторые сведения из элементарной математики

Алгебра

Законы действий над числами

Переместительный закон сложения: $a + b = b + a$.

Сочетательный закон сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Переместительный закон умножения: $ab = ba$.

Сочетательный закон умножения: $(ab)c = a(bc)$.

Распределительный закон умножения относительно сложения: $(a + b)c = ac + bc$.

Распределительный закон умножения относительно вычитания: $(a - b)c = ac - bc$.

Дробные выражения

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},\ b \neq 0,\ c \neq 0.$

Действия с дробями (предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля):

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b},$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Степени и корни

Степень с целым показателем

$$a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ раз}, \ n \in N,\ n \neq 1),$$

$$a^1 = a,\ a^0 = 1 \quad (a \neq 0), \quad a^{-n} = 1/a^n \quad (a \neq 0).$$

Свойства:

$$a^m a^n = a^{m+n},\ \ a^m / a^n = a^{m-n},\ \ \left(a^m\right)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n,\ \ (a/b)^n = a^n / b^n.$$

Корень n-й степени

$\sqrt[n]{a}$ - арифметический корень n-й степени из числа $a,\ \ a \geq 0,\ \ \sqrt[n]{a} \geq 0,\ \ n \in N,\ \ n > 1.$

Свойства:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b} \quad (b > 0), \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

В частности, $\sqrt{a}$ - арифметический квадратный корень: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \quad \sqrt{a^2} = |a|$

Степень с дробным (рациональным) показателем

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \quad m \in Z, \ n \in N, \ n \geq 2, \ a > 0.$$

Свойства степени с действительным показателем

$$(a > 0, \ b > 0, \ x \in R, \ y \in R)$$

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x,$$

$$(a/b)^x = a^x/b^x, \quad a^x = b^{x\log_b a},$$

$$a^x = e^{x\ln a} = \exp(x\ln a), \quad a^x = 10^{x\lg a}.$$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия - числовая последовательность (a_n), определяемая условиями:
1) $a_1 = a$, 2) $a_{n+1} = a_n + d, \quad n = 1, 2, \ldots$ (d - разность арифметической прогрессии).

Свойства арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

Формула n-го члена: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия - числовая последовательность (b_n), определяемая условиями:
1) $b_1 = b \quad (b \neq 0)$; 2) $b_{n+1} = b_n q \quad (q \neq 0)$, $n = 1, 2, \ldots$ (q - знаменатель геометрической прогрессии).

Свойства геометрической прогрессии:

$$b_{n+1}/b_n = b_{n+2}/b_{n+1}, \quad b_{n+1}^2 = b_n b_{n+2}.$$

Формула n-го члена: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Формулы суммы *n* первых членов $(q \neq 1)$:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$b + bq + bq^2 + \ldots = b/(1-q), \quad |q| < 1.$$

Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2),$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$
$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4),$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc,$$
$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd,$$
$$(a+b-c-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd + 2cd,$$
$$a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 + bx + c,$$

где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Свойства числовых неравенств

1) Если $a < b$, то при любом c: $a + c < b + c$.
2) Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac<bc$.
3) Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac>bc$.
4) Если $a < b$, a и b одного знака, то $1/a > 1/b$.
5) Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c< b + d$, $a - d < b - c$.
6) Если $a < b$, $c < d$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то $ac < bd$.
7) Если $a < b$, $a > 0$, $b > 0$, то $a^2 < b^2, \quad a^n < b^n \quad (n \in N)$.
8) Если $|a| < |b|$, то $a^2 < b^2$.

Логарифмы

$\log_a b \quad (a>0, \quad a\neq 1, \quad b>0)$ - логарифм числа *b* по основанию *a*.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b.$

$\lg b$ - десятичный логарифм (логарифм по основанию 10): $10^{\lg b} = b.$

$\ln b$ - натуральный логарифм (логарифм по основанию *e*): $e^{\ln b} = b.$

Переход от одного основания к другому:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

В частности, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} = \dfrac{\lg b}{\lg a} = \dfrac{\ln b}{\ln a}, \quad \ln b = \dfrac{\lg b}{\lg e} = \dfrac{\lg b}{M}$ (

$M = \lg e = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343$ - модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным).

Свойства логарифмов (*u*, *v* >*0*):

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a (uv) = \log_a u + \log_a v,$$

$$\log_c \frac{1}{v} = -\log_c v, \quad \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v,$$

$$\log_a u^\alpha = \alpha \log_a u, \quad \log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\log_a u, \quad n\in N, \quad n\neq 1.$$

Тригонометрические формулы

Тригонометрические функции

$$\sin\alpha, \quad \cos\alpha,$$

$$tg\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha, \quad \alpha\neq \pi/2+\pi n, \quad n\in Z,$$

$$ctg\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha, \quad \alpha\neq \pi n, \quad n\in Z,$$

$$\sec\alpha = 1/\cos\alpha, \quad \alpha\neq \pi/2+\pi n, \quad n\in Z,$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha, \quad \alpha\neq \pi n, \quad n\in Z.$$

Знаки тригонометрических функций

Четверть	Величина угла	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
I	$0<\alpha<\pi/2$	+	+	+	+
II	$\pi/2<\alpha<\pi$	+	–	–	–
III	$\pi<\alpha<3\pi/2$	–	–	+	+
IV	$3\pi/2<\alpha<2\pi$	–	+	–	–

Формулы приведения

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$tg\beta$	$ctg\beta$
$\pi/2+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$3\pi/2+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi/2-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$3\pi/2-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$
$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1,\quad \alpha\neq\pi n/2,\quad n\in Z,$$
$$1+tg^2\alpha=1/\cos^2\alpha,\quad \alpha\neq\pi/2+\pi n,\quad n\in Z,$$
$$1+ctg^2\alpha=1/\sin^2\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z.$$

Выражение тригонометрических функций через одну из них того же аргумента

(выбор знака перед корнем зависит от того, в какой четверти находится угол α)

Через $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$
$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\quad ctg\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Через $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},$$
$$tg\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},\quad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Через $tg\alpha$:

$$ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha},$$
$$\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Через $ctg\alpha$:

$$tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha},$$
$$\sin\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}.$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta},\ tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

(в последних двух формулах $\alpha\neq\pi/2+\pi n,\quad \beta\neq\pi/2+\pi n$ и соответственно $\alpha+\beta\neq\pi/2+\pi n,\quad \alpha-\beta\neq\pi/2+\pi n,\quad n\in Z$);

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha},\ ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

(в последних двух формулах $\alpha\neq\pi n,\quad \beta\neq\pi n$ и соответственно $\alpha+\beta\neq\pi n,\quad \alpha-\beta\neq\pi n,\quad n\in Z$).

Преобразование суммы тригонометрических функций

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z,$$
$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z,$$
$$ctg\alpha+ctg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\quad n\in Z,$$
$$ctg\alpha-ctg\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\quad n\in Z,$$
$$A\sin x+B\cos x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi_0),$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

Тригонометрические функции двойного и тройного аргумента

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}, \quad tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}.$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

(выбор знака зависит от того, в какой четверти находится угол $\alpha/2$)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Выражение тригонометрической функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)}, \quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)},$$
$$tg\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1-tg^2(\alpha/2)}, \quad ctg\,\alpha = \frac{1-tg^2(\alpha/2)}{2tg(\alpha/2)}.$$

Числовые функции

Основные понятия

Область определения (множество задания) функции *f*: $X \to R$: $X = D(f)$.

Множество значений функции *f*: $E(f) = \{f(x) | x \in X\} = f(X)$

График функции: $\Gamma_f = \{(x,\ y) \in R^2 | x \in X,\ y = f(x)\}$

Четная функция: $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = f(x)$

Нечетная функция: $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = -f(x)$

Периодическая функция (периода ω): $\forall x \in X \Rightarrow x+\omega \in X,\ x-\omega \in X$ и $f(x+\omega) = f(x)$.

Монотонные функции

Функция *f* строго возрастает (возрастает) на множестве *X*:
$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
Функция *f* возрастает (не убывает) на множестве *X*:
$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$
Функция *f* строго убывает (убывает) на множестве *X*:
$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Функция *f* убывает (не возрастает) на множестве *X*:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

тепенная функция $y = x^{\alpha},\ \alpha \in R$

1. $\alpha = 2n,\ n \in N$:

$$y = x^{2n},\ D(f) = R,\ E(f) = [0,\ +\infty\ [.$$

Функция четная, строго убывает на $]-\infty;\ 0]$ и строго возрастает на $[0;\ +\infty\ [$ (рис. 2.1).

2. $\alpha = 2n-1,\ n \in N$:

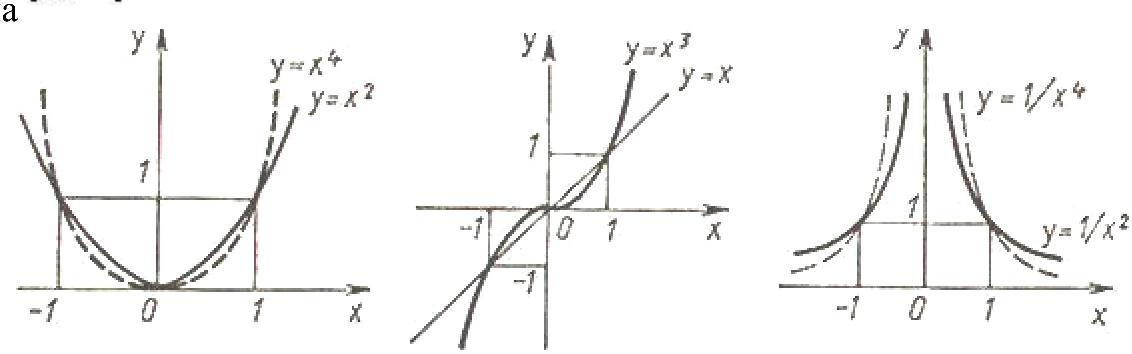
$$y = x^{2n-1},\ D(f) = R,\ E(f) = R.$$

Функция нечетная, строго возрастает (рис. 2.2).

3. $\alpha = -2n,\ n \in N$:

$$y = \frac{1}{x^{2n}},\quad D(f) = R \setminus \{0\},\quad E(f) =]\ 0;\ +\infty\ [.$$

Функция четная, строго возрастает на $]-\infty; 0[$ и строго убывает на $]0;+\infty[$



4. $\alpha = -2n+1,\ n \in N$:

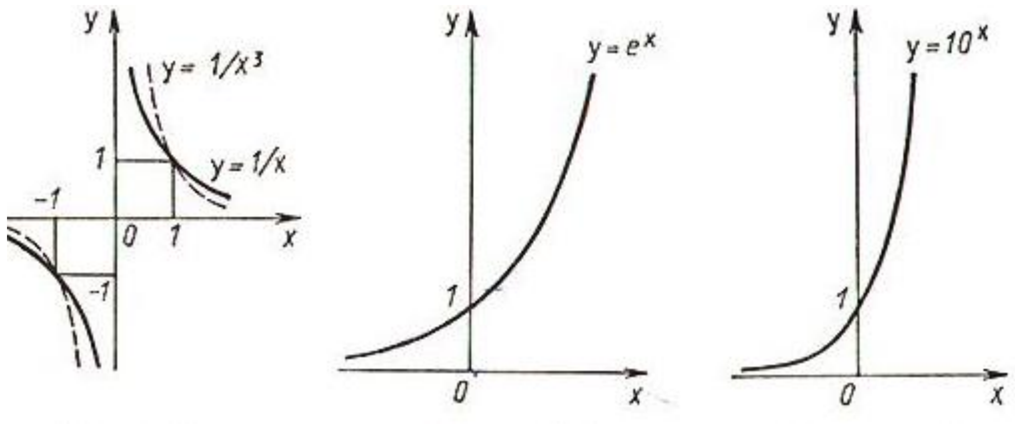
$$y = \frac{1}{x^{2n-1}},\ D(f) = R \setminus \{0\},\ E(f) = R \setminus \{0\}$$

Функция нечетная, строго убывает на $]-\infty; 0[$ и $]0;+\infty[$ (рис. 2.4).

5. $\alpha \notin Z$:

$$y = x^{\alpha},\quad D(f) =]\ 0;\ +\infty\ [,\quad E(f) =]\ 0;\ +\infty\ [.$$

При некоторых α *D(f)* и *E(f)* могут быть шире.



Экспонента

$$y = e^x = \exp(x),\ \ D(f) = R,\ \ E(f) = \left]\, 0;\ +\infty \right[.$$

Функция строго возрастает.

Показательная функция (рис. 2.6)

$$y = a^x = e^{x\ln a},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1;$$
$$D(f) = R,\ \ E(f) = \left]\, 0;\ +\infty \right[.$$

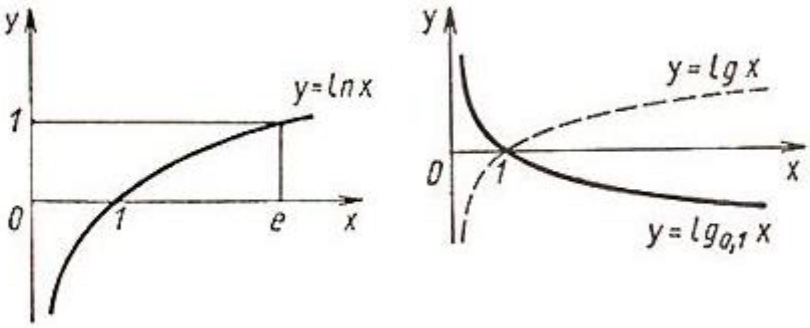
При *0 < a < 1* функция строго убывает, при *a > 1* строго возрастает.

Логарифмическая функция

Логарифм натуральный

$$y = \ln x,\ \ D(f) = \left]\, 0;\ +\infty \right[,\ \ E(f) = R.$$

Функция строго возрастает.



Логарифм с основанием *a*

$$y = \log_a x,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,$$
$$D(f) = \left]\, 0;\ +\infty \right[,\ \ E(f) = R.$$

При *0 < a < 1* ф. строго убывает, при *a > 1* строго возрастает.

Тригонометрические функции

1. $y = \sin x$ (рис. 2.9):

$$D(f) = R,\ E(f) =]-1;\ 1[.$$

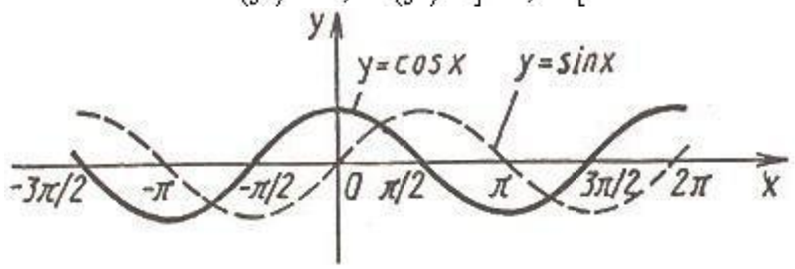


Рис. 2.9

Функция нечетная. Период $\varpi = 2\pi.$ На каждом из промежутков $[-\pi/2 + 2\pi k;\ \pi/2 + 2\pi k\ ],\ k \in Z,$ ф. строго возрастает, на $[\pi/2 + 2\pi k;\ 3\pi/2 + 2\pi k\ ],\ k \in Z,$ строго убывает.

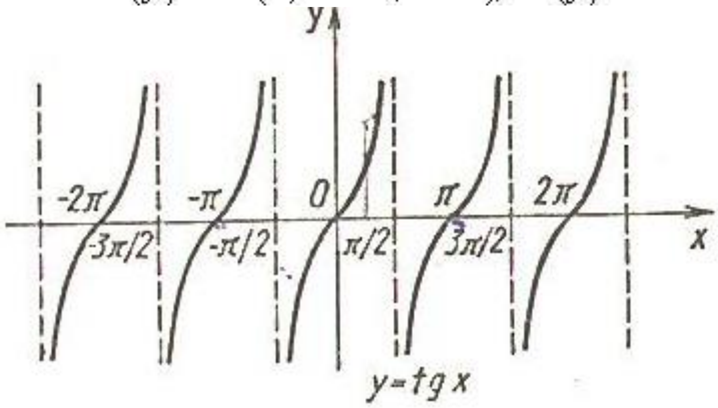
2. $y = \cos x$ (рис. 2.9):

$$D(f) = R,\ E(f) =]-1;\ 1[.$$

Функция четная. Период $\varpi = 2\pi.$ На каждом из промежутков $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k],\ k \in Z,$ ф. строго убывает, на $[\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k],\ k \in Z,$ строго возрастает.

3. $y = tgx$ (рис. 2.10):

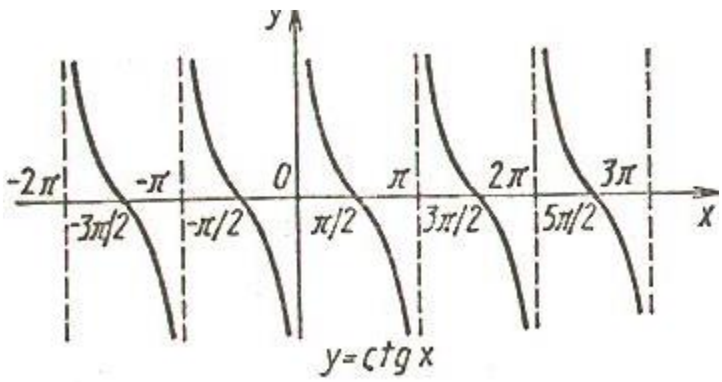
$$D(f) = R \setminus \{\pi/2 + \pi k \mid k \in Z\},\quad E(f) = R.$$



Функция нечетная. Период $\varpi = \pi.$ Функция строго возрастает на каждом из промежутков $]-\pi/2 + \pi k;\ \pi/2 + \pi k[,\ k \in Z.$

4. $y = ctgx$ (рис. 2.11):

$$D(f) = R \setminus \{\pi k \mid k \in Z\},\quad E(f) = R.$$



Функция нечетная. Период $\omega = \pi$. Функция строго убывает на каждом из промежутков $[\pi k;\ \pi + \pi k],\ k \in Z$.

Обратные тригонометрические функции

1. $y = \arcsin x$ (рис. 2.12):

$$D(f) = [-1;\ 1],\quad E(f) = [-\pi/2;\ \pi/2].$$

Функция нечетная, строго возрастает.

$$\arcsin 0 = 0,\quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},\quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},\quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. $y = \arccos x$ (рис. 2.13):

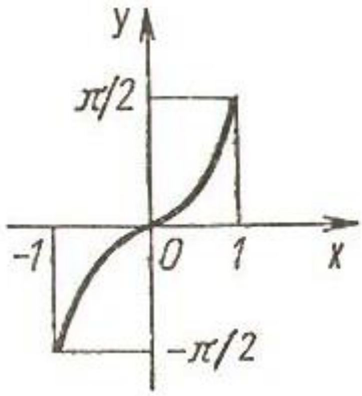
$$D(f) = [-1;\ 1],\quad E(f) = [0,\ \pi]$$

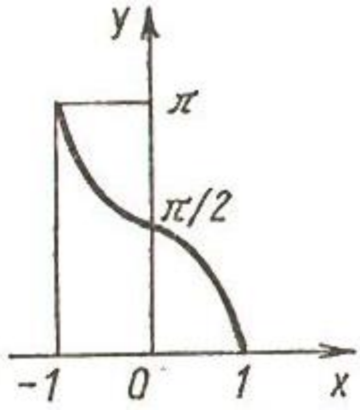
Функция строго убывает

$$\arccos(-1) = \pi,\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6},\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},\quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2},\quad \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},\quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},\quad \arccos 1 = 0.$$





Пределы

Свойства пределов

1. Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\left(\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0\right).$$

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ и $a_n\le b_n\quad \forall n,$ то $a\le b.$

3. Если $a_n\le c_n\le b_n\quad \forall n,$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a.$

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|.$

Некоторые пределы

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e,\quad \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{shx}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{chx-1}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to0}\frac{thx}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \lim_{x\to+0}x^\alpha\ln x=0\quad(\alpha>0),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\alpha}=0\quad(\alpha>0),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0,\quad \lim_{x\to+0}x^x=1.$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q|<1), \qquad \lim_{n\to\infty} nq^n = 0 \quad (|q|<1),$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(n^\alpha/a^n\right) = 0 \quad (|a|>1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^n/n!\right)^n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}(\ln n/n) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln^q n/n^\alpha\right) = 0 \quad (\alpha>0), \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a>0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1/\sqrt[n]{n!}\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(n/\sqrt[n]{n!}\right) = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_n}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \quad (b_0 \neq 0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 3\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \quad (\textit{формула} \quad \textit{Валлиса}),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1,$$

Производные и дифференциалы

Определение производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Односторонние производные

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция, дифференцируемая в точке *x₀*

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+o(\Delta x)$$ при $$\Delta x\to 0$$

$$A=f'(x_0).$$

Дифференциал

$$dy=f'(x)dx,\quad f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Дифференцирование арифметических комбинаций

(u, v, w - дифференцируемые функции, $\alpha,\ \beta$ - постоянные

$$(\alpha u+\beta v)'=\alpha u'+\beta v',\quad d(\alpha u+\beta v)=\alpha du+\beta dv,$$

$$(uv)'=u'v+uv',\quad d(uv)=udv+vdu,$$

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw',$$

$$d(uvw)=vwdu+uwdv+vudw,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0),\quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}(v\neq 0),\quad d\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{dv}{v^2}.$$

Производные основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$\ln x$	$1/x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$
x^2	$2x$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$	$\sin x$	$\cos x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x\rvert>1$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$1(x)$	$\delta(x)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$		

Производная степенно-показательной функции

$$\left(u^v\right)' = \left(e^{v\ln u}\right)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Производные высших порядков некоторых функций

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
c	0
x^{α}	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\,(0!=1)$
e^{x}	e^{x}
a^{x}	$a^{x}\ln^{n}a$
$\sin x$	$\sin(x+\pi n/2)$
$\cos x$	$\cos(x+\pi n/2)$
$\operatorname{sh} x$	$\begin{cases} shx & при \quad n=2k, \\ chx & при \quad n=2k-1 \end{cases}$
$\operatorname{ch} x$	$\begin{cases} chx & при \quad n=2k, \\ shx & при \quad n=2k-1 \end{cases}$
$y=\operatorname{arctg} x$	$y^{(n)}=(n-1)!\cos^{n}y\sin n(y+\pi/2)$

Локальный экстремум дифференцируемой функции

Необходимое условие локального экстремума

Если x_0 - точка локального экстремума функции f, то $f'(x_0)=0.$

Достаточные условия локального экстремума

I Правило. Пусть $f'(x_0)=0.$

Если f' при переходе через точку x_0 меняет знак с "+" на "-", то x_0 - точка локального максимума.

Если f' при переходе через точку x_0 меняет знак с "-" на "+", то x_0 - точка локального минимума.

Если f' при переходе через точку x_0 не меняет знака, то точка x_0 не является точкой локального экстремума.

II Правило. Пусть f дважды дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)\neq 0.$

Если $f''(x_0)<0,$ то x_0 - точка локального максимума.

Если $f''(x_0)>0,$ то x_0 - точка локального минимума.

III Правило. Пусть f n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$

Если n - четное и $f^{(n)}(x_0)<0,$ то x_0 - точка локального максимума.

Если n - четное и $f^{(n)}(x_0)>0,$ то x_0 - точка локального минимума.

Если n - нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Точки перегиба

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную. Если при переходе через точку x_0 функция f меняет направление выпуклости, то x_0 называют точкой перегиба функции f, а точку (x_0; $f(x_0)$) - точкой перегиба графика функции f. График функции переходит с одной стороны касательной, проведенной в точке (x_0; $f(x_0)$), на другую сторону. Точки перегиба f - точки экстремума для f'.

Необходимые условия наличия перегиба

$f''(x_0)=0$ либо $f''(x_0)$ не существует.

Достаточные условия наличия перегиба

1. Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 - точка перегиба.

2. Если $f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0,$ то при n четном x_0 - точка перегиба, при n нечетном x_0 не является точкой перегиб

Неопределенный интеграл

Первообразная

Первообразной функции f на промежутке I называется функция F, такая, что $F'(x)=f(x)\quad \forall x\in I.$

Неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где F - первообразная функции f (на промежутке); C - произвольная постоянная.

Основные свойства

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x),\quad d\int f(x)dx=f(x)dx.$

2. $\int F'(x)dx = F(x)+C, \quad \int dF(x) = F(x)+C.$

3. Если $\int f(x)dx = F(x)+C,$ то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \quad a \neq 0.$$

4. $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx, \quad \alpha^2+\beta^2 \neq 0.$

Замена переменных в неопределенном интеграле

1. $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(u(x))+C.$

2. Если $x=\varphi(t),\ \varphi'(t)\neq 0,\ F$ - первообразная для $(g\circ\varphi)\varphi',$ то

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C = F(\varphi^{-1}(x))+C.$$

Формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

(u, v - дифференцируемые функции).

Простейшие интегралы

$$\int 0\cdot dx = C, \quad \int 1\cdot dx = \int dx = x+C,$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}+C, \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x|+C, \quad \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}+C, \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq -1,$$

$$\int\frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{-\beta+1}\frac{1}{x^{\beta-1}}+C, \quad \beta\neq 1, \quad \int\frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C, \quad a\neq 0,$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C, \quad a\neq 0,$$

$$\int\frac{xdx}{x^2+\alpha} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\alpha\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$$

Элементы комбинаторики, формула Ньютона

Перестановки. Размещения. Сочетания.

Число перестановок из *n* элементов:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!.$$

Число размещений из *n* по $m(n \ge m)$:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (0! = 1, \quad 1! = 1,)$$

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1), \quad A_n^0 = 1,$$

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m,$$

$$A_n^n = P_n = n!, \quad A_n^{n-1} = A_n^n = n!.$$

Число сочетаний из *n* по $m(n \ge m)$:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}.$$

Свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad 0 \le m \le n, \quad C_n^0 = C_n^n = 1,$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Рекурентная формула для числа сочетаний:

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}, \quad 0 \le m \le n.$$

Возведение многочлена в степень

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc,$$

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc,$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c +$$
$$+ c^2a + c^2b) + 6abc,$$

$$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3a +$$
$$+ b^3c + c^3a + c^3b) + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) +$$

$$+12(a^2bc + b^2ac + c^2ab),$$