Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине

«МАТЕМАТИКА»

для студентов 2 курса специальности

22.02.03Литейное производство чёрных и цветных металлов

(базовая подготовка)

Челябинск, 2018

Методические рекомендации составлены в соответствии с программой учебной дисциплины «Математика», для специальности 22.02.03. Литейное производство чёрных и цветных металлов .	ОДОБРЕНО Предметной (цикловой) комиссией протокол № «___»_____________2018г. Председатель ПЦК _________/ О.И. Макаренко /	УТВЕРЖДАЮ Зам. директора по НМР __________Т.Ю. Крашакова «___»__________2018г.

Автор: Чернова И.И.преподаватели Южно-Уральского государственного технического колледжа
.

АКТ СОГЛАСОВАНИЯ
Методических рекомендаций по выполнению практических работ
по дисциплине «Математика» для специальности
22.02.03 Литейное производство черных и цветных металлов
(базовая подготовка),
разработанных преподавателем Южно-Уральского
государственного технического колледжа Черновой И.И.

Учебная дисциплина «Математика» является частью программы подготовки специалистов среднего звена согласно ФГОС по специальности СПО 22.02.03 Литейное производство черных и цветных металлов (базовая подготовка). Учебная дисциплина «Математика» относится к математическому и общему естественнонаучному циклу и определяет общий объем знаний и умений, составляющих базу профессиональных компетенций.

Практическая направленность учебной дисциплины реализуется через выполнение практических работ, на проведение которых программой отводится 32 часа.

Методические рекомендации по выполнению практических работ разработаны с учетом требований работодателя к подготовке специалистов среднего звена по данной специальности и включают в себя 16 практических работ, направленных на развитие умений анализировать сложные функции и строить их графики; выполнять действия над комплексными числами; вычислять значения геометрических величин; производить операции над матрицами и определителями; решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений; решать системы линейных уравнений различными методами.

Практические работы обеспечивают условия для формирования компетентности специалистов в осуществлении поиска и использования информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития, в использовании информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности, в работе с коллективом, руководством, потребителями.

Методические рекомендации по выполнению практических работ могут быть использованы для работы в учреждениях среднего профессионального образования.

Ведущий специалист
кузнечно-литейного дивизиона В.Н. Федоров

М.П.

ЛИТЕЙНО-КУЗНЕЧНЫЙ ДИВИЗИОН
Челябинск

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для студентов 2 курса, обучающихся по специальности 22.02.03Литейное производство чёрных и цветных металлов (базовая подготовка)

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Методические рекомендации предназначены для организации выполнения практических работ по учебной дисциплине «Математика».

Программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 16 практических работ, направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ПК 1.3. Выполнять расчеты, необходимые при разработке технологических процессов изготовления отливок.

ПК 3.3. Рассчитывать по принятой методологии основные технико-экономические показатели работы коллектива.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен

уметь:

- Анализировать сложные функции и строить их графики;
- Выполнять действия над комплексными числами;
- Вычислять значения геометрических величин;
- Производить операции над матрицами и определителями;
- Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- Решать системы линейных уравнений различными методами.

знать:

- Основные математические методы решения прикладных задач;
- Основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления;

- Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№п\п	Название практической работы	Часы
1	Вычисление определителей.	2
2	Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными методом Крамера.	2
3	Числовые множества. Числовые промежутки. Окрестности точки.	2
4	Вычисление пределов. Раскрытие неопределённости. Вычисление односторонних пределов.	2
5	Вычисление производных элементарных и сложных функций.	2
6	Анализ сложной функции и построение графиков.	2
7	Вычисление неопределённых интегралов. Таблица основных интегралов	2
8	Вычисление неопределённого интеграла заменой переменной, по частям.	2
9	Решение прикладных задач с использованием интегрального исчисления.	2
10	Решение систем линейных однородных уравнений первого порядка.	2
11	Решение дифференциальных уравнений второго порядка.	2
12	Решение профессиональных задач с использованием дифференциальных уравнений.	2
13	Линейные операции над векторами, скалярное произведение векторов в пространстве.	2
14	Нахождение расстояния между двумя точками. Решение треугольников.	2
15	Решение прикладных задач с использованием комбинаторики	2
16	Решение профессиональных задач на вычисление вероятностей с использованием элементов математической статистики	
	Итого:	**32**

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Название практической работы: ***Вычисление определителей***

Цель работы: научиться вычислять определители разными способами.

знания:

основные понятия и методы основ линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

умения:

производить операции над матрицами и определителями

Теоретический материал:

1. Определитель2-го порядка

Определителем .второго порядка называется выражение вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называют элементами определителя.

Диагональ, образованная элементами $a_{11}; a_{22}$, называется главной, а диагональ, образованная элементами $a_{12}a_{21}$ - побочной.

Таким образом, определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Заметим, что в ответе получается число.

Пример 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot4-3\cdot2=-6.$$

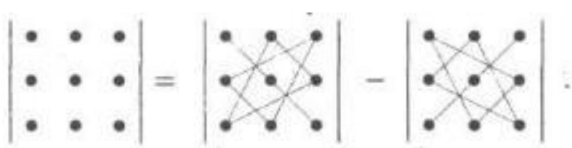
2. Определитель3-го порядка

Определителем третьего порядка называется выражение вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Элементы $a_{11}; a_{22}; a_{33}$ – образуют главную диагональ.Числа $a_{13}; a_{22}; a_{31}$ – образуют побочную диагональ.

Изобразим, схематически, как образуются слагаемые с плюсом и с минусом:



С плюсом входят: произведение элементов на главной диагонали, остальные два слагаемых являются произведением элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали.

Слагаемые с минусом образуются по той же схеме относительно побочной диагонали.

Это правило вычисления определителя третьего порядка называют**правилом треугольника или правилом Саррюса:**

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot8\cdot2+2\cdot1\cdot2+3\cdot1\cdot1-1\cdot8\cdot2-1\cdot1\cdot(-1)-2\cdot3\cdot2=-16+4+3-16+1-12=-36$$

3. Вычисление определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Вычисление определителя третьего порядка сводится к вычислению трех определителей второго порядка.

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} - 8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 38.$$

Задание: Выполните задания по вариантам:

Вариант 1

1. Найдите произведение матриц А и В, если $A=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 0 \end{vmatrix}$;

2. Найдите обратную матрицу A^{-1}: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. Найдите определители матриц:

$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. $\qquad A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -8 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$.. $\qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -6 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

Вариант 2

1. Найдите произведение матриц А и В, если **А**=$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{vmatrix}$, **В**=$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$
2. Найдите обратную матрицу A^{-1}: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
3. Найдите определители матриц:

$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$ $\qquad$ $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$A = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}..$ $\qquad$ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Контрольные вопросы:

1) Что называется определителем 2-го порядка?

2) Назовите два способа вычисления 3-го порядка.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Название практической работы: ***Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными методом Крамера***

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;

умения:

решать системы линейных уравнений различными методами; производить операции над матрицами и определителями

Теоретический материал:

1.Формулы Крамера для системы из двух уравнений

Системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases},$$

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы и обозначается Δ (дельта):

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определители Δx, Δy получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2;\Delta y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}= a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

Найти значенияхиувозможно только при условии, если $\Delta \neq 0$.

Этот вывод следует из следующей теоремы.

2. Теорема Крамера: *Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка.*

Таким образом, ф*ормулы Крамера для системы из двух уравнений:* $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$.

<u>Пример 1.</u> Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = -3 \end{cases}.$$

Согласно формулам получаем:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1\bullet4-2\bullet(-3)}{3\bullet4-1\bullet2} = \frac{4+6}{12-2} = \frac{10}{10} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3\bullet(-3)-1\bullet1}{3\bullet4-2\bullet1} = \frac{-9-1}{12-2} = \frac{-10}{10} = -1.$$

Итак, решение системы $x_1 = 1, x_2 = -1$.

2. Частные случаи

Три случая при решении систем линейных уравнений:

1) система линейных уравнений имеет единственное решение(система совместна и определённа)

Условия: $\Delta \neq 0,\ \dfrac{a_{11}}{a_{21}} \neq \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$.

2) система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений(система совместна и неопределённа)

Условия: $\Delta = 0$, $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{b_1}{b_2}$, т.е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны.

3) система линейных уравнений решений не имеет(система несовместна)

Условия: $\Delta = 0,\ \dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$,

Итак, система *m* линейных уравнений с *n* переменными называется *несовместной*, если у неё нет ни одного решения, и *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система уравнений, имеющая только одно решение, называется*определённой*, а более одного –*неопределённой*.

3.Формулы Крамера для системы из трех уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

x=$\dfrac{\Delta x}{\Delta}$; y=$\dfrac{\Delta y}{\Delta}$; z=$\dfrac{\Delta z}{\Delta}$.

Где Δ (дельта) составлен из коэффициентов при неизвестных:

Δ=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ А определители Δx, Δy, Δz получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

Δx=$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;Δy=$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$;Δz=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

Найти значениях, y и zвозможно только при условии, если $\Delta \neq 0$.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 79,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158,$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237,$$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 5$; $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -2$; $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 3$.

Ответ: (5; -2; 3)

Задание:Решите системы уравнений

Вариант 1

а) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 6x - 8y = 10 \end{cases}$ с) $\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ 5x - y - z = 10 \\ x - y + 5z = -12 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 7x + 7y + 3z = 2 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 4y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 3z = 9 \end{cases}$

Вариант 2

а) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$ с) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 3y - 4z = 5 \\ 2x - 3y + 6z = 11 \\ 8x - 3y + 10z = 21 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ 2x - 8y + 6z = 10 \\ 3x - 12y + 9z = 15 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1) Что называется системой линейных уравнений?

2) Какая система называется совместной, какая несовместной?

3) Какая система называется определенной и неопределенной?

4) При каком условии можно использовать формулы Крамера для решения системы уравнений?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Название практической работы: ***Определение числовых множеств, числовых промежутков, окрестности точки***

Цель работы:научится выполнять действия с числовыми множествами.

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики

умения:

выполнять действия над комплексными числами

Теоретический материал:

Множествомназывается совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент **x** принадлежит множеству **X**, то записывают $\mathbf{x \in X}$($\in$— принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают $\mathbf{A \subset B}$($\subset$— содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Например, перечислением заданы следующие множества:

- $A=\{1,2,3,5,7\}$ — множество чисел
- $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ — множество некоторых элементов $x_1,x_2,...,x_n$

- $N=\{1,2,...,n\}$ — множество натуральных чисел
- $Z=\{0,\pm1,\pm2,...,\pm n\}$ — множество целых чисел

Множество $(-\infty;+\infty)$ называется*числовой прямой*, а любое число — точкой этой прямой.

Пусть a — произвольная точка числовой прямой и δ — положительное число. Интервал (a-δ; a+δ) называется *δ-окрестностью точки a*.

Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется *пустым множеством* и записывается **Ø**.

Числовые промежутки

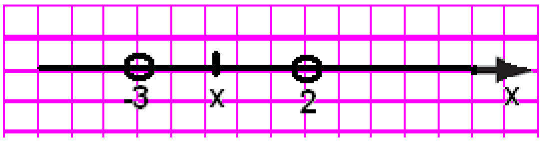
Числовые отрезки, интервалы, полуинтервалы и лучи называют числовыми промежутками.

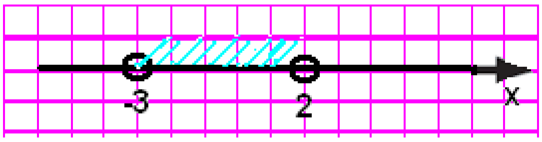
Неравенство, задающеечисловой промежуток	Обозначение числового промежутка	Названиечислового промежутка	Читается так:
$a \le x \le b$	$[a;b]$	Числовой отрезок	Отрезок от a до b
$a < x < b$	$(a;b)$	Интервал	Интервал от a до b
$a \le x < b$	$[a;b)$	Полуинтервал	Полуинтервал от *a* до *b*, включая *a*.
$a < x \le b$	$(a;b]$	Полуинтервал	Полуинтервал от *a* до *b*, включая *b*.
$x \ge a$	$[a;+\infty)$	Числовой луч	Числовой луч от *a*доплюс бесконечности
$x > a$	$(a;+\infty)$	Открытый числовой луч	Открытый числовой луч от *a*доплюс бесконечности
$x \le a$	$(-\infty;a]$	Числовой луч	Числовой луч отминус бесконечности до*a*
$x < a$	$(-\infty;a)$	Открытый числовой луч	Открытый числовой луч отминус бесконечности до *a*

<u>Пример 1.</u> Определение числового неравенства

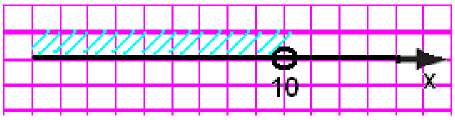
Отметим на координатной прямой точки с координатами -3 и2. Если точка расположена между ними, то ей соответствует число, которое больше -3 и меньше 2. Верно и обратное: если число x удовлетворяет условию $-3<x<2$, то оно изображается точкой, лежащей между точками с координатами -3 и 2.

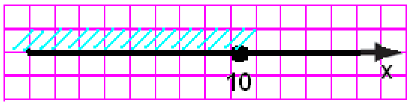
Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $-3<x<2$, называется числовымпромежуткомили просто промежутком от -3 до 2 и обозначается так: (-3;2).





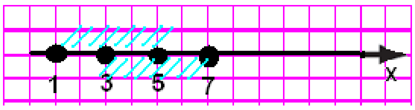
На рисунках изображены множество чисел x, для которых выполняется неравенство x<10 и x$\leq$10. Эти множества представляют собой промежутки, обозначаемые соответственно (-∞; 10) и (-∞; 10]. Читается так: число x принадлежит промежутку отминус бесконечности (-∞) до 10 (x<10) и число x принадлежит промежутку отминус бесконечности (-∞) до 10, включая число 10 (x$\leq$10). Знак <u>равенств</u>а в неравенстве обозначается<u>квадратной скобкой</u>в указании промежутка.



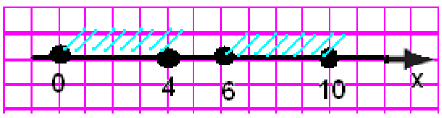


<u>Пример 2</u>. Пересечение числовых промежутков

*Множество, составляющее общую часть некоторых множеств A и B, называютпересечениемэтих множеств и обозначают A$\cap$B.*Промежуток [3;5] является пересечением промежутков [1;5] и [3;7]. Это можно записать так: [1;5]$\cap$[3;7]=[3;5].



Промежутки [0;4] и [6;10] не имеют общих элементов. Если множество не имеет общих элементов, то говорят, что их пересечение пусто. Значит, пересечение промежутков [0;4]$\cap$[6;10]=0.

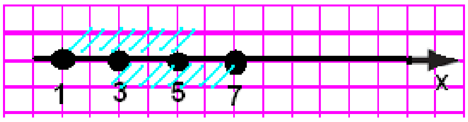


<u>Пример 3</u>. Объединение числовых промежутков

Каждое число из промежутка [1;7] принадлежит хотя бы одному из промежутков [1;5] и [3;7], то есть, либо промежутку [1;5], либо промежутку [3;7], либо им обоим.

Множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B, называютобъединениемэтих множеств обозначают $A \cup B$.

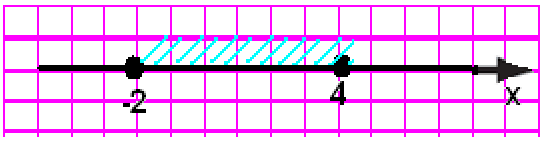
Промежуток [1;7] является объединением промежутков [1;5] и [3;7]. Это можно записать так: [1;5]$\cup$[3;7]=[1;7].

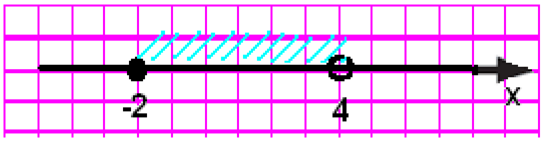


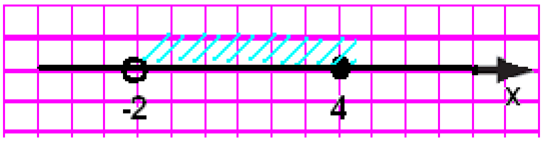
Заметим, что объединение промежутков не всегда представляет собой промежуток, например множество [0;4] $\cup$ [6;10] не является промежутком.

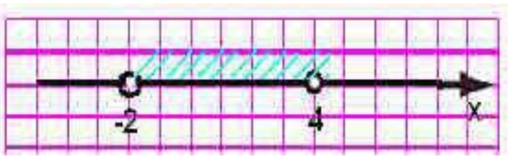
Задание: Выполните действия по ходу работы.

1. Выберите правильное изображение промежутка [-2;4] на координатной прямой

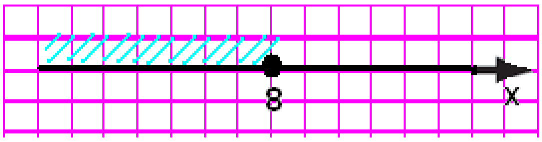
1) 

2) 

3) 

4) 

2. Выберите промежуток, изображенный на координатной прямой:



а) x $\leq$ 8; б) x<8; в) x>8; г) x $\geq$ 8.

3. Принадлежит ли промежутку [-8;-5] число…

а) -9; б) -8; в) -5,5; г)-5; д)-4; е)-7,5?

4. Использую координатную прямую, найдите пересечение промежутков:

а) (1;8) и (5;10); б) [-4;8] и [-6;6]; в) (-5;1] и (-4;2]; г) (-∞;3] и [0;+∞].

5. Покажите штриховкой на координатной прямой объединение промежутков:

а) (-∞; 4) и (10;+∞); б) [3;+∞) и (8;+∞); в) [-4;8] и [-6;6]; г) (-5;1] и (-4;6].

6. Выберите правильный ответ

6.1.Числовым промежутком называется…

а) множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству;

б) множество всех чисел;

в) переменных.

6.2. Какие из чисел не удовлетворяют неравенству -2<x $\leq$ 8:

а) 2 и 5; б) -1 и 8; *в) -2 и 9;* г) 0 и 8.

6.3. Укажите множество решений неравенства x>20:

а) ($-\infty$; 20); б) *(20;* $+\infty$*);*в) [20; $+\infty$); г)[-20;$+\infty$).

6.4. Укажите множество, представляющее собой общую часть множеств:

$x \leq 3$ и -5<x<3,2:

а) (- 5; 3); б) (-5; 3,2); в) (-5; 3]; г) [3; 3,2).

Контрольные вопросы:

1) Назовите основные числовые множества;

2) Что называется объединением множеств?

3) Что называется пересечением множеств?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Название практической работы*: Вычисление пределов, раскрытие неопределённости. Вычисление односторонних пределов*

Цель работы:научиться вычислять пределы.

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики

умения:

анализировать сложные функции и строить их графики

Теоретический материал:

Определение (нахождение предела функции на бесконечности).

Число *A* называется пределом функции *f(x)* при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности аргументов функции (бесконечно большой положительной или отрицательной), последовательность значений этой функции сходится к A.

Обозначается $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$.

Замечание.

Предел функции *f(x)* при $x \to \infty$ бесконечен, если для любой бесконечно большой последовательности аргументов функции (бесконечно большой положительной или отрицательной), последовательность значений этой функции является бесконечно большой положительной или бесконечно большой отрицательной. Обозначается $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Основные неопределенности пределов и их раскрытие.

основные виды неопределенностей: ноль делить на ноль $\left(\frac{0}{0}\right)$, бесконечность делить на бесконечность$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, ноль умножить на бесконечность $(0\cdot\infty)$, бесконечность минус бесконечность $(\infty-\infty)$, единица в степени бесконечность 1^{∞}, ноль в степени ноль 0^0, бесконечность в степени ноль ∞^0.

Раскрывать неопределенности позволяет:

- упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);
- использование замечательных пределов;
- применение правила Лопиталя;
- использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным(использование таблицы эквивалентных бесконечно малых).

Сгруппируем неопределенности в **таблицу неопределенностей**. Каждому виду неопределенности поставим в соответствие метод ее раскрытия (метод нахождения предела).

Таблица 1 - Методы нахождения предела

Виды неопределённостей	Методы нахождения предела
$\left(\frac{0}{0}\right)$	Необходимо преобразовать и упростить выражение. Если есть выражение вида $\frac{\sin(kx)}{kx}$ или $\frac{kx}{\sin(kx)}$, то применяется первый замечательный предел.
$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Необходимо преобразовать и упростить выражение. Если не помогает, то использовать правило Лопиталя.
$(0\cdot\infty)$,$(\infty-\infty)$	Необходимо преобразовать неопределённость к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, за тем применить правило Лопиталя
1^{∞},	Применяем второй замечательный предел

<u>Пример1:</u>

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2}$

Решение.

Подставляем значение:$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2}=\frac{1^2+2\cdot 1-3}{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}=\left(\frac{0}{0}\right)$

Пришли к неопределенности. Смотрим в таблицу неопределенностей для выбора метода решения и пробуем упростить выражение. Так как и числитель и знаменатель обращаются в ноль при x=1, то если разложить на множители эти выражения, можно будет сократить (x-1) и неопределенность исчезнет.

Разложим числитель на множители:

$$x^2+2x-3=0$$

$$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3$$

$$x_2=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=1\Rightarrow$$

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

Разложим знаменатель на множители:

$$3x^2-5x+2=0$$

$$D=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 2=1\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{5-\sqrt{1}}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$x_2=\frac{5+\sqrt{1}}{2\cdot 3}=1\Rightarrow$$

$$3x^2-5x+2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)$$

Наш предел примет вид:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x-1)}{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}=\frac{1+3}{3\left(1-\frac{2}{3}\right)}=4$$

После преобразования неопределенность раскрылась.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2}=4$

Рассмотрим пределы на бесконечности от степенных выражений. Если показатели степенного выражения положительны, то предел на бесконечности бесконечен. Причем основное значение имеет наибольшая степень, остальные можно отбрасывать.

<u>Пример2:.</u>

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^5-4}{3x^7+12}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^5-4}{3x^7+12}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle$$

Степень числителя равна семи, то есть *m=7*. Степень знаменателя также равна семи *n=7*.
Разделим и числитель и знаменатель на x^7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^5-4}{3x^7+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^7+2x^5-4}{x^7}}{\frac{3x^7+12}{x^7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^7}}{3+\frac{12}{x^7}}=\frac{1+\frac{2}{\infty^2}-\frac{4}{\infty^7}}{3+\frac{12}{\infty^7}}=\frac{1+0-0}{3+0}=\frac{1}{3}$$

Ответ: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^5-4}{3x^7+12}=\frac{1}{3}$

Первый замечательный предел имеет вид: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

На практике чаще встречаются **модификации первого замечательного предела** в виде:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{kx}=1$$

где, *k* – коэффициент.

Следствия первого замечательного предела:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{kx}{\sin kx}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin kx}{kx}}=\frac{1}{1}=1$

Пример 3:

Найти предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}$

Решение:

Подставляем значение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

Пришли к неопределенности ноль делить на ноль. Смотрим в таблицу неопределенностей для определения метода решения. Комбинация синуса и его аргумента подсказывает нам о применении первого замечательного предела, но для этого сначала нужно немного преобразовать выражение. Домножим на 3х и числитель и знаменатель дроби.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{3x\sin(3x)}{3x\cdot(2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\right)$$

В силу следствия из первого замечательного предела $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=1$, поэтому приходим к результату:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

Второй замечательный предел имеет вид: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

или в другой записи $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

В случае второго замечательного предела имеем дело с неопределенностью вида единица в степени бесконечность(1^∞) .

Пример 4:

Вычислить предел $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}$

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}=\left(1-\frac{2}{\infty^2+1}\right)^{\frac{\infty^2+1}{4}}=(1-0)^\infty=(1^\infty)$$

Пришли к неопределенности единица в степени бесконечность. Смотрим в таблицу неопределенностей для определения метода решения и останавливаемся на применении второго замечательного предела.

Сделаем замену переменных. Пусть$t=-\frac{x^2+1}{2}\Rightarrow\frac{x^2+1}{4}=-\frac{t}{2}$

Если $x\to\infty$, то $t\to-\infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}=\left\langle 1^\infty\right\rangle=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}\cdot t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

Пример 5:

Вычислить предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

Решение:

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\left(\frac{1-0}{1+0}\right)^\infty=\left\langle 1^\infty\right\rangle$$

Пришли к неопределенности единица в степени бесконечность, которая указывает на применение второго замечательного предела. Выделим целую часть в основании показательно степенной функции:

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$$

Тогда предел запишется в виде:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\left\langle 1^\infty\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$$

Сделаем замену переменных. Пусть

$$t=-\frac{x+1}{2}\Rightarrow 2t=-x-1\Rightarrow x=-2t-1$$

Если $x\to\infty$, то $t\to\infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}$$
$$\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{-2}\cdot\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{-1}=e^{-2}\cdot(1+0)^{-1}=e^{-2}$$

В преобразованиях были использованы свойства степени и свойства пределов

Задание:Вычислить предел функций:

Вариант 1.

a) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-8x+15}$.

b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+5}{3x-6}$.

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin17x}{\sin12x}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$.

Вариант 2

a) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x^2-16}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+6}{2x-4}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 13x}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$.

Контрольные вопросы:

1) Что называется пределом функции?

2) Какая связь существует между бесконечно малой и бесконечно большой функцией?

3) Назовите виды неопределенностей.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Название практической работы: ***Вычисление производных элементарных и сложных функций.***

Цель работы:научиться находить производные функций по формулам дифференцирования.

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

анализировать сложные функции и строить их графики

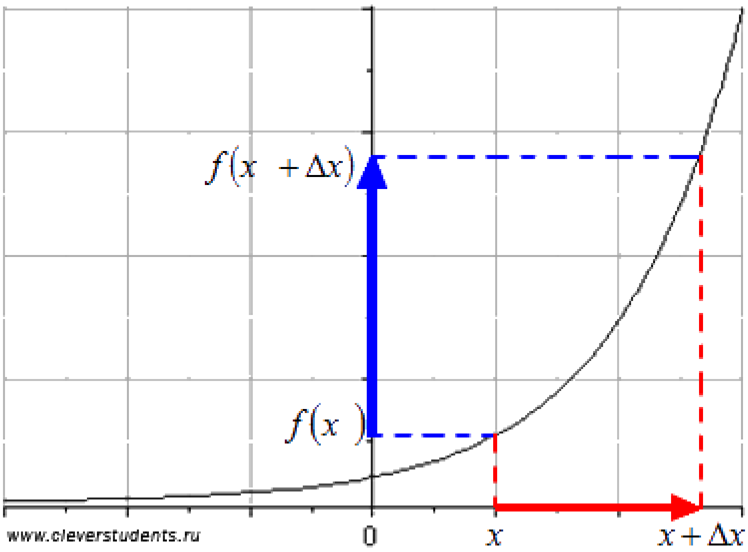
Теоретический материал

Путь *x* – аргумент функции *f(x)* и Δx - малое число, отличное от нуля.

Δx (читается «дельта икс») называют **приращением аргумента функции**. На рисунке по оси абсцисс показано изменение аргумента от значения *x* до значения $x+\Delta x$ (отсюда видна суть названия «приращение» аргумента).

При переходе от значения аргумента x_0 к $x_0+\Delta x$ значения функции изменяются соответственно от $f(x_0)$ до $f(x_0+\Delta x)$ при условии монотонности функции на отрезке

$[x_0; x_0 + \triangle x]$. Разность $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \triangle f(x)$ называют **приращением функции *f(x)***, соответствующем данному приращению аргумента. На рисунке приращение функции показано по оси ординат**.**



Определение производной функции в точке.

Пусть функция *f(x)* определена на промежутке *(a; b)*, x_0 и $x_0+\Delta x$ - точки этого промежутка. **Производной функции *f(x)* в точке** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргументапри $\Delta x \to 0$. Обозначается $f^{/}(x_0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$

Правила дифференцирования. Производные элементарных функций

1. $(\mathbf{c})^{/} = 0$	11. $(\mathbf{a}^x)^{/} = \mathbf{a}^x \ln \mathbf{a}$
2. $(x)^{/} = 1$	12. $(\sin \mathbf{x})^{/} = \cos \mathbf{x}$
3. $(u+v)^{/} = u^{/} + v^{/}$	13. $(\cos \mathbf{x})^{/} = -\sin \mathbf{x}$
4. $(\mathbf{uv})^{/} = \mathbf{u}^{/}\mathbf{v} + \mathbf{v}^{/}\mathbf{u}$	14. $(\mathbf{tgx})^{/} = \frac{1}{\cos^2 \mathbf{x}}$

5. $\left(\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)^{/} = \dfrac{\mathbf{u}^{/}\mathbf{v} + \mathbf{v}^{/}\mathbf{u}}{\mathbf{v}^{2}}$	15. $(\mathbf{ctgx})^{/} = \dfrac{-1}{\sin^{2}\mathbf{x}}$
6. $(\mathbf{cu})^{/} = \mathbf{uc}^{/}$	16. $(\arcsin\mathbf{x})^{/} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^{2}}}$
7. $(x^{n})^{/} = nx^{n-1}$	17. $(\arccos\mathbf{x})^{/} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^{2}}}$
8. $(\ln\mathbf{x})^{/} = \dfrac{1}{\mathbf{x}}$	18. $(\mathbf{arctgx})^{/} = \dfrac{1}{1+\mathbf{x}^{2}}$
9. $(\log\mathbf{x})^{/} = \dfrac{1}{\mathbf{x}}\log\mathbf{e}$	19. $(\mathbf{arctgx})^{/} = \dfrac{-1}{1+\mathbf{x}^{2}}$
10. $(\mathbf{e}^{\mathbf{x}})^{/} = \mathbf{e}^{\mathbf{x}}$	

Найти производные следующих функций:

Пример 1

$y=x^2-4x+3$.

Решение:

$y^{/} = (x^2-4x+3)^{/} = (x^2)^{/} - (4x)^{/} + 3^{/}$.

По формулам 1,2, 3,6 и 7 таблицы 2.1, получим $y^{/} = 2x-4$.

Пример 2

$$\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{\mathbf{x}}} - \frac{1}{\mathbf{x}^{2}} + \frac{1}{3\mathbf{x}^{3}} \quad .$$

Решение:

Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\frac{1}{2}} + 5\mathbf{x}^{\frac{-1}{3}} - \mathbf{x}^{-2} + \frac{1}{3}\mathbf{x}^{-3} \quad .$$

Применяя формулы (6 и 7), получим:

$$\mathbf{y}^{/} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\frac{1}{2}-1} + 5\left(-\frac{1}{3}\right)\mathbf{x}^{-\frac{1}{3}-1} - (-2)\mathbf{x}^{-2-1} + \frac{(-3)}{3}\mathbf{x}^{-3-1} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}\mathbf{x}^{-\frac{4}{3}} + 2\mathbf{x}^{-3} - \mathbf{x}^{-4}$$

$$\mathbf{y}^{/} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{\mathbf{x}^{4}}} + \frac{2}{\mathbf{x}^{3}} - \frac{1}{\mathbf{x}^{4}} \quad .$$

Пример 3

$\oint^{/}(\mathbf{x}) = \dfrac{\sqrt{\mathbf{x}}}{1+\sqrt{\mathbf{x}}}$. Вычислить $\oint^{/}(1)$.

Решение:

По формулам (5 и 7) получим:

$$f'(\mathbf{x})=\frac{\left(\sqrt{\mathbf{x}}\right)'\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)-\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)'\cdot\sqrt{\mathbf{x}}}{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}}\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)-\frac{\sqrt{\mathbf{x}}}{2\sqrt{\mathbf{x}}}}{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^2};$$

$$f'(\mathbf{x})=\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^2};$$

$$f'(\mathbf{x})=\frac{1}{2\sqrt{1}\left(1+\sqrt{1}\right)^2}=\frac{1}{2\cdot 2^2}=\frac{1}{8}\ .$$

Пример 4

$$\mathbf{y}=\frac{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^2}{\mathbf{x}}$$

Решение:

Раскрываем скобки и производим деление:

$$\mathbf{y}=\frac{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^2}{\mathbf{x}}=\frac{1+2\sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{x}}{\mathbf{x}}=\frac{1}{\mathbf{x}}+\frac{2}{\sqrt{\mathbf{x}}}+1\ .$$

Используем дробные и отрицательные показатели, приводя данное выражение к виду (7) таблицы 2.1:

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}^{-1}+2\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}}+1\ .$$

Находим производную y':

$$\mathbf{y}'=-\mathbf{x}^{-2}+2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{x}^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{\mathbf{x}^2}-\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^3}}\ .$$

Пример 5

Найти производную 2-го порядка от функции $\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\sin\mathbf{x}$.

Решение:

Используя формулы 4,2 и 12 таблицы 2.1, получим:

$$\mathbf{y}'=(\mathbf{x})'\sin\mathbf{x}+\mathbf{x}(\sin\mathbf{x})'=\sin\mathbf{x}+\mathbf{x}\cos\mathbf{x}\ .$$

Дифференцируя производную y', имеем:

$$\mathbf{y}''=(\sin\mathbf{x})'+(\mathbf{x})'\cos\mathbf{x}+\mathbf{x}(\cos\mathbf{x})'=\cos\mathbf{x}+\cos\mathbf{x}-\mathbf{x}\sin\mathbf{x}=$$
$$=2\cos\mathbf{x}-\mathbf{x}\sin\mathbf{x}.$$

Пример 6

Движение летчика при катапультировании из реактивного самолета

можно приблизительно описать формулой $\mathbf{S} = 3{,}7\mathbf{t}^3 + \ln \mathbf{t} - 19\mathbf{t}$ (м). Определить скорость и ускорение летчика через 2 с после катапультирования.

Решение:

По формулам 3, 6,7 и 8 таблицы 2.1:

$v = \dfrac{ds}{dt}, v = (3{,}7^3 + \ln t - 19t)'$,

Тогда v=3,7•3t^2 $+\dfrac{1}{\mathbf{t}} - 19 = 25{,}9$ м/с; $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}$; $\mathbf{a} = 11{,}1\mathbf{t}^2 + \dfrac{1}{\mathbf{t}} - 19;$

$$\mathbf{a} = 22{,}2\mathbf{t} - \frac{1}{\mathbf{t}^2}\left(\frac{\mathbf{м}}{\mathbf{c}^2}\right); \mathbf{a}_{\mathbf{t}=2} = 22{,}2 \cdot 2 - \frac{1}{4} = 44{,}15\,\mathbf{м}/\mathbf{c}^2 \quad .$$

4. Производная сложной функции

Если $\mathbf{y} = \oint(\mathbf{u})$, где $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$, т.е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y называется сложной функцией от x.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной: $\mathbf{y}' = \oint'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x})$.

Некоторые формулы таблицы производных теперь будут иметь вид :

$$(\mathbf{u}^{\mathbf{n}})' = \mathbf{nu}^{\mathbf{n}-1} \cdot \mathbf{u}'$$

$$(\sin \mathbf{u})' = \cos \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$$

$$(\cos \mathbf{u})' = -\sin \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$$

и т.д.

5. Найти производные следующих функций:

Пример 1.

$\mathbf{y} = (1 + 5\mathbf{x})^3$.

Решение:

Полагая 1+5x = u и y = u^3, применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\mathbf{y} = 3\mathbf{u}^2(1 + 5\mathbf{x})' = 3(1 + 5\mathbf{x})^2 \cdot 5 = 15(1 + 5\mathbf{x})^2.$$

Пример 2

$\mathbf{y} = \sin 3\mathbf{x}$.

Решение:

Полагая 3x= u, найдем, используя соответствующие формулы:

$$y' = \left(\sin x^3\right)' = \left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u' = \cos 3x^3 \cdot 3$$

$$y' = 3\cos 3x.$$

Пример 3

$\mathbf{y} = \sin \mathbf{x}^3$.

Решение:

Полагая x^3= u, найдем:

$$\mathbf{y}' = \left(\sin \mathbf{x}^3\right)' = \left(\sin \mathbf{u}\right)' = \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}' = 3\mathbf{x}^2 \cos \mathbf{x}^3.$$

Пример 4

В какой момент времени скорость тела, движущегося по закону $\mathbf{S} = 3\mathbf{t}^2 - 15\mathbf{t} + 2$, равна 0? Найти ускорение тела.

Решение:

Скорость тела v - это первая производная от перемещения $\vec{\mathbf{S}}$ по времени: $\vec{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}}}{\mathbf{dt}}$; закону

$$\mathbf{v} = \left(3\mathbf{t}^2 - 15\mathbf{t} + 2\right)' = 16\mathbf{t} - 15.$$

Если v=0, то 0=16t-15 $\Rightarrow \mathbf{t} = \dfrac{15}{6} = 2{,}5(\mathbf{c})$

Ускорение $\vec{\mathbf{a}}$ – это первая производная от скорости $\vec{\mathbf{v}}$ по времени: $\vec{\mathbf{a}} = \dfrac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{dt}}$;

$$\mathbf{a} = \left(6\mathbf{t} - 15\right)' = 6\left(\mathbf{м}/\mathbf{c}^2\right)$$

Пример 5

Точка совершает колебательные движения по оси абсцисс по закону $\mathbf{x} = \cos \boldsymbol{\omega}\mathbf{t}$. Найти момент времени, когда скорость равна нулю. Чему в это время равно x?

Решение:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = -\boldsymbol{\omega}\sin \boldsymbol{\omega}\mathbf{t} \;;\quad 0 = \boldsymbol{\omega}\sin \boldsymbol{\omega}\mathbf{t}\,;$$

$$\kappa\pi = \omega t \Rightarrow t\,\frac{\kappa\pi}{\omega}\ ; \quad x = \cos\frac{\omega\kappa\pi}{\omega} = \pm 1 \ .$$

Задание:Выполните заданияпо вариантам

Вариант 1

1. Найдите производную функций $y(x) = (2x+1)^3$.

а) $y'(x) = 3(2x+1)$ б). $y'(x) = 3(2x+1)^2$

в) $y'(x) = 6(2x+1)^2$ г) $y'(x) = 6(2x+1)$

2. Найдите производную функции $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos 5x$.

а). $f'(x) = \frac{x}{4} - 5\sin 5x$ б) $f'(x) = x - 5\sin 5x$

в). $f'(x) = x + 5\sin 5x$ г) $f'(x) = x - \sin 5x$

3. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = 4x^2 - 6x + 3$ параллельна прямой $y = 2x + 3$.

а). – 2 б) 1 в). 2 г). 3

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = e^{x-2} - 4x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

а) $e^2 - 4$ б) – 8 в) – 3 г) – 4

Вариант 2

1. Найдите производную функции $y(x) = (4x+9)^{-3}$.

а) $y'(x) = -12(4x+9)^{-2}$ б) $y'(x) = 3(4x+9)^{-2}$

в) $y'(x) = -12(4x+9)^{-4}$ г $y'(x) = 3(4x+9)^{-4}$

2. Найдите производную функции $f(x)=\frac{6}{5}x^6-\frac{1}{4}x^4+\cos 3x$.

а) $f'(x)=\frac{1}{5}x^5-x^3-3\cos 3x$

б) $f'(x)=x^5-x^3-3\sin 3x$

в) $f'(x)=\frac{36}{5}x^5-x^4-\sin 3x$

г) $f'(x)=\frac{36}{5}x^5-x^3-3\sin 3x$

3. К графику функции $f(x)=x^2+x+1$ в точке с абсциссой $x=1$ проведена касательная. Найдите абсциссу точки пересечения касательной с осью *OX*.

а) 0 б) $-\frac{1}{2}$ в) $-\frac{1}{3}$ г) $\frac{1}{2}$

4. Укажите угол наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)=\sqrt{3}-e^{x-6}$ в точке с абсциссой $x_0=6$.

а) $60°$ б) $45°$ в) $135°$ г) $0°$

Контрольные вопросы:

1) Запишите определение производной.

2) Чем отличается производная сложной функции от производной элементарной функции?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

Название практической работы: ***Анализ сложной функции и построение её графика***

Цель работы: Научиться находить с помощью первой производной точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции; с помощью второй производной точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функции; с помощью пределов вычислять асимптоты графика функции; строить график по полному исследованию функции

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

анализировать сложные функции и строить их графики

Теоретический материал:

Полное исследование функции и построение графика.

Стоит задача: провести полное исследование функции и построить ее график $f(x) = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$.

Алгоритм исследования функции состоит из следующих шагов.

1. **Нахождение области определения функции.**
   Это очень важный шаг исследования функции, так как все дальнейшие действия будут проводиться на области определения.
   В нашем примере нужно найти нули знаменателя и исключить их из области действительных чисел.

   $$4x^2 - 1 = 0$$
   $$x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$$
   $$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

   (В других примерах могут быть корни, логарифмы и т.п.Напомним, что в этих случаях область определения ищется следующим образом:
   для корня четной степени, например, $\sqrt[4]{g(x)}$ - область определения находится из неравенства $g(x) \geq 0$;
   для логарифма $\log_a g(x)$ - область определения находится из неравенства $g(x) > 0$).

2. **Исследование функции на четность или нечетность.**
   Функция является **четной**, если $y(-x) = y(x)$. Четность функции указывает на симметрию графика относительно оси ординат.
   Функция является **нечетной**, если $y(-x) = -y(x)$. Нечетность функции указывает на симметрию графика относительно начала координат.
   Если же ни одно из равенств не выполняется, то перед нами функция общего вида.

В нашем примере выполняется равенство $y(-x)=y(x)$, следовательно, наша функция четная. Будем учитывать это при построении графика - он будет симметричен относительно оси *oy*.

3. **Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точек экстремума.**

Промежутки возрастания и убывания являются решениями неравенств $f'(x)\geq 0$ и $f'(x)\leq 0$ соответственно.

Точки, в которых производная обращается в ноль, называют **стационарными**.

Критическими точками функции называют внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ (включать ли критические точки в промежутки возрастания и убывания).

1. Полагают, что промежутки возрастания и убывания являются решениями неравенств $f'(x)>0$ и $f'(x)>0$. В этом случае критические точки не включаются в промежутки.
2. Полагают, что точки, в которых функция определена, а конечной производной не имеет, нужно включать в промежутки возрастания и убывания (например, функция $y=\sqrt[3]{x}$ в точке *x=0* определена, а производная в этой точке бесконечна $y'=\dfrac{1}{3\cdot x^{\frac{2}{3}}}$, $y'(0)=\dfrac{1}{0}=\infty$, *x=0* следует включить в промежуток возрастания функции).

Мы будем включать критические точки в промежутки возрастания и убывания, если они принадлежат области определения функции.

Таким образом, **чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции**

- во-первых, находим производную;
- во-вторых, находим критические точки;
- в-третьих, разбиваем область определения критическими точками на интервалы;
- в-четвертых, определяем знак производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку возрастания, знак «минус» - промежутку убывания.

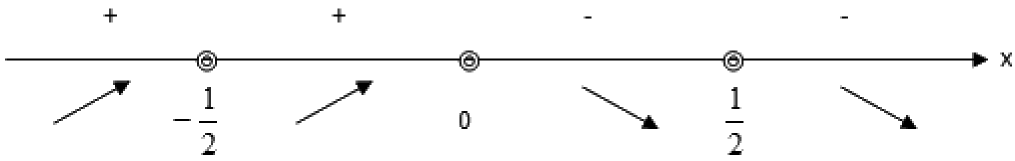
Находим производную на области определения

$$f'(x)=\frac{(x^2)'(4x^2-1)-x^2(4x^2-1)'}{(4x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(4x^2-1)^2}$$

Находим критические точки, для этого:

3. Находим стационарные точки (они же нули числителя): в нашем примере $x=0$;
4. Находим нули знаменателя: $x=\pm\dfrac{1}{2}$.

Наносим эти точки на числовую ось и определяем знак производной внутри каждого полученного промежутка. Как вариант, можно взять любую точку из промежутка и вычислить значение производной в этой точке. Если значение положительное, то ставим плюсик над этим промежутком и переходим к следующему, если отрицательное, то ставим минус и т.д. К примеру, $f'(-1)=\dfrac{-2\cdot(-1)}{\left(4(-1)^2-1\right)^2}=\dfrac{2}{9}>0$, следовательно, над первым слева интервалом ставим плюс.



1. Делаем вывод:

- функция возрастает на промежутке $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ и на промежутке $\left(-\dfrac{1}{2};0\right]$;
- функция убывает на промежутке $\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$ и на промежутке $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Схематично плюсами / минусами отмечены промежутки где производная положительна / отрицательна. Возрастающие / убывающие стрелочки показывают направление возрастания / убывания.

Точками экстремума функции являются точки, в которых функция определена и проходя через которые производная меняет знак.

В нашем примере точкой экстремума является точка *x=0* . Значение функции в этой точке равно $f(0)=\dfrac{0^2}{4\cdot 0^2-1}=0$. Так как производная меняет знак с плюса на минус при прохождении через точку *x=0* , то *(0; 0)* является точкой локального максимума. (Если бы производная меняла знак с минуса на плюс, то мы имели бы точку локального минимума).

4. Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба.

Промежутки вогнутости и выпуклости функции находятся при решениями неравенств $f''(x)\geq 0$ и $f''(x)\leq 0$ соответственно.

Иногда вогнутость называют выпуклостью вниз, а выпуклость – выпуклостью вверх.

Здесь также справедливы замечания, подобные замечаниям из пункта про промежутки возрастания и убывания.

Таким образом, **чтобы определить промежутки вогнутости и выпуклости функции** :

- во-первых, находим вторую производную;
- во-вторых, находим нули числителя и знаменателя второй производной;
- в-третьих, разбиваем область определения полученными точками на интервалы;
- в-четвертых, определяем знак второй производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку вогнутости, знак «минус» - промежутку выпуклости.

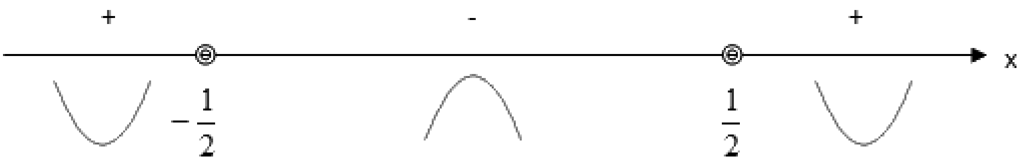
Находим вторую производную на области определения.

$$f''(x)=\left(\frac{-2x}{\left(4x^2-1\right)^2}\right)' =$$

$$=\frac{(-2x)'\left(4x^2-1\right)^2-(-2x)\left(\left(4x^2-1\right)^2\right)'}{\left(4x^2-1\right)^4}=\frac{24x^2+2}{\left(4x^2-1\right)^3}$$

Далее ищем нули числителя и знаменателя.

В нашем примере нулей числителя нет, нули знаменателя $x=\pm\frac{1}{2}$.
Наносим эти точки на числовую ось и определяем знак второй производной внутри каждого полученного промежутка.



1. Делаем вывод:

- функция выпуклая на промежутке $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;
- функция вогнутая на промежутке $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ и на промежутке $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Точка $(x_0; f(x_0))$ называется *точкой перегиба*, если в данной точке существует касательная к графику функции и вторая производная функции меняет знак при прохождении через x_0.

Другими словами, точками перегиба могут являться точки, проходя через которые вторая производная меняет знак, в самих точках либо равна нулю, либо не существует, но эти точки входят в область определения функции.

В нашем примере точек перегиба нет, так как вторая производная меняет знак проходя через точки $x=\pm\frac{1}{2}$, а они не входят в область определения функции.

5. Нахождение горизонтальных, вертикальных и наклонных асимптот.

Горизонтальные или наклонные асимптоты следует искать лишь тогда, когда функция определена на бесконечности. На границах области определения функция имеет *вертикальные асимптоты*, если односторонние пределы функции в этих граничных точках бесконечны.

В нашем примере граничными точками области определения являются $x = \pm\frac{1}{2}$.
Исследуем поведение функции при приближении к этим точкам слева и справа, для чего найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1/4}{(-2)(-0)} = +\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{-1}{2}+0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1/4}{(-2)(+0)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to+\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1/4}{(+2)(-0)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1/4}{(+2)(+0)} = +\infty$$

Так как односторонние пределы бесконечны, то прямые $x = \pm\frac{1}{2}$ являются вертикальными асимптотами графика.

Наклонные асимптоты ищутся в виде прямых $y = kx + b$, где $k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.
Если *k=0* и *b* не равно бесконечности, то наклонная асимптота станет *горизонтальной*.
Что такое вообще эти асимптоты?
Это такие линии, к которым приближается график функции на бесконечности. Таким образом, они очень помогают при построении графика функции.
Если горизонтальных или наклонных асимптот нет, но функция определена на плюс бесконечности и (или) минус бесконечности, то следует вычислить предел функции на плюс бесконечности и (или) минус бесконечности, чтобы иметь представление о поведении графика функции.
Для нашего примера

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{4x^2-1}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4x^2-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$y = \frac{1}{4}$ - горизонтальная асимптота.
На этом с исследование функции завершается, переходим к построению графика.

6. **Вычисляем значения функции в промежуточных точках.**
Для более точного построения графика рекомендуем найти несколько значений функции в промежуточных точках (то есть в любых точках из области определения функции).
Для нашего примера найдем значения функции в точках *x=-2* , *x=-1* , *x=-3/4* , *x=-1/4* . В силу четности функции, эти значения будут совпадать со значениями в

точках *x=2* , *x=1* , *x=3/4* , *x=1/4.*

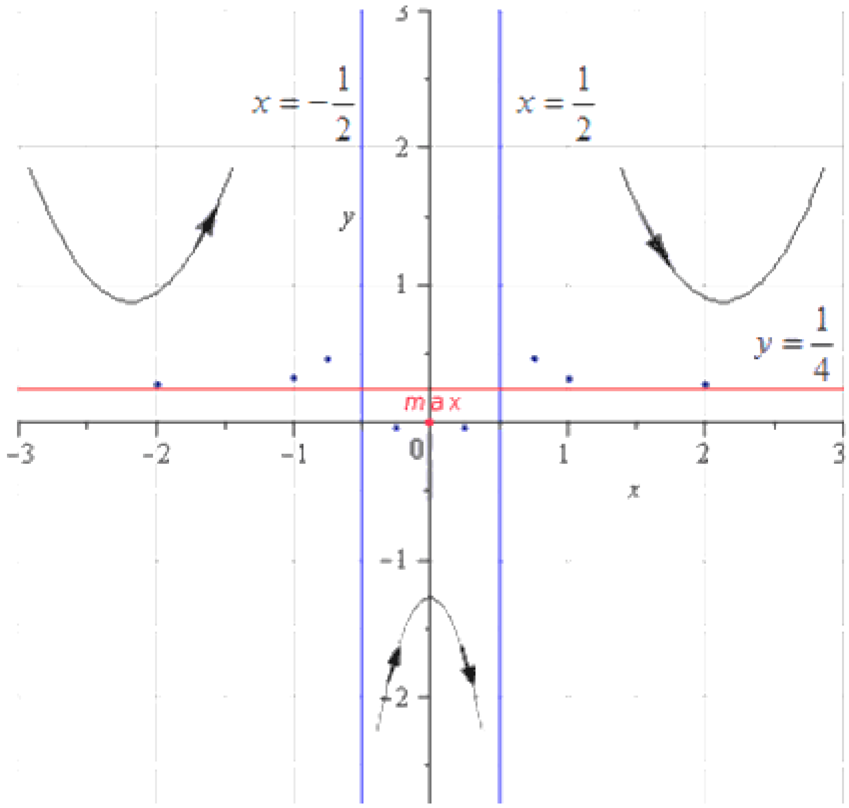
$$f(-2)=f(2)=\frac{2^2}{4\cdot 2^2-1}=\frac{4}{15}\approx 0{,}27$$

$$f(-1)=f(1)=\frac{1^2}{4\cdot 1^2-1}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$$

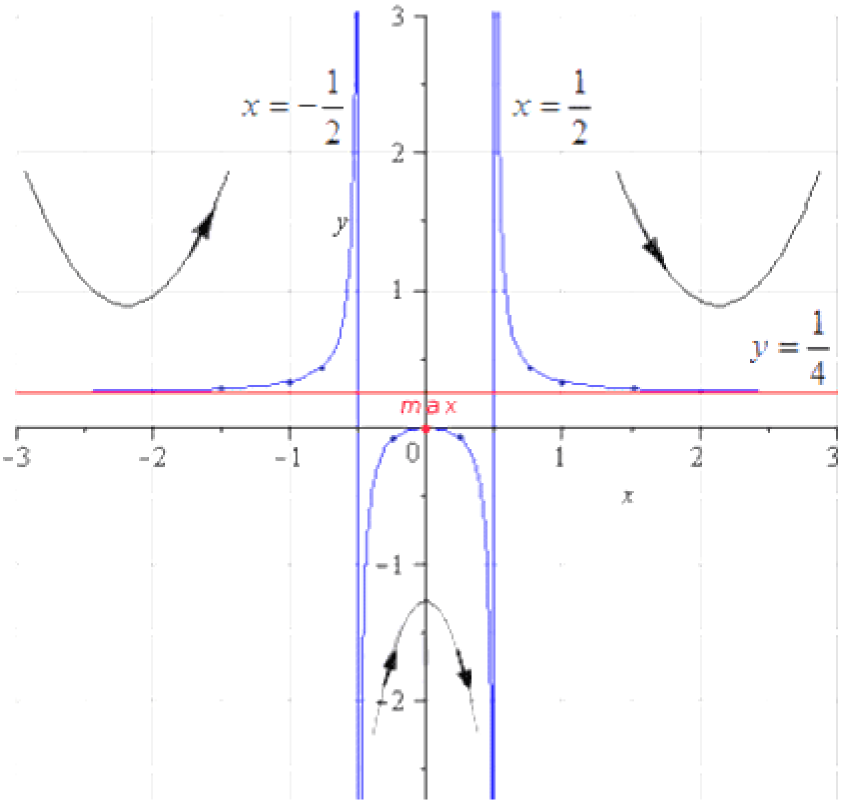
$$f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{4\left(\frac{3}{4}\right)^2-1}=\frac{9}{20}=0{,}45$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\left(\frac{1}{4}\right)^2-1}=-\frac{1}{12}\approx -0{,}08$$

7. **Построение графика.**
   Сначала строим асимптоты, наносим точки локальных максимумов и минимумов функции, точки перегиба и промежуточные точки. Для удобства построения графика можно нанести и схематическое обозначение промежутков возрастания, убывания, выпуклости и вогнутости, не зря же мы проводили исследование функции =).



Осталось провести линии графика через отмеченные точки, приближая к асимптотам и следуя стрелочкам.



Задание:Выполните задания по вариантам

Вариант 1

1. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$$

2. Исследовать функцию и построить ее график.

$$f(x)=x^2-2x+8.$$

$$f(x)=-\frac{2x^2}{3}+x+\frac{2}{3}.$$

$$f(x)=-x^2+5x+4.$$

$$f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{4}.$$

Вариант 2

1. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6$$

2. Исследовать функцию и построить ее график.

$f(x) = -x^3 + 3x - 2$.

$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.

$f(x) = x^3 + 3x + 2$.

$f(x) = 3x^2 - x^3$.

Контрольные вопросы:

1) Назовите алгоритм анализа функции.
2) Назовите виды асимптот.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Название практической работы: ***Вычисление неопределённых интегралов с использование таблицы основных интегралов.***

Цель работы:научиться вычислять определённый интегралы с помощью таблицы основных интегралов

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

Теоретический материал:

Определение первообразной.

Первообразной функции *f(x)* на промежутке *(a; b)* называется такая функция *F(x)*, что выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ для любого *x* из заданного промежутка.

Если принять во внимание тот факт, что производная от константы *C* равна нулю, то справедливо равенство $(F(x) + C)' = f(x)$. Таким образом, функция *f(x)* имеет множество первообразных *F(x)+C*, для произвольной константы *C*, причем эти первообразные отличаются друг от друга на произвольную постоянную величину.

Определение неопределенного интеграла.

Все множество первообразных функции *f(x)* называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Выражение $f(x)dx$ называют *подынтегральным выражением*, а *f(x) – подынтегральной функцией*. Подынтегральное выражение представляет собой дифференциал функции *f(x)*.

Действие нахождения неизвестной функции по заданному ее дифференциалу называется *неопределенным* интегрированием, потому что результатом интегрирования является не одна функция *F(x)*, а множество ее первообразных *F(x)+C*.

На основании свойств производной можно сформулировать и доказать ***свойства неопределенного интеграла*** (свойства первообразной)

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$
   Производная результата интегрирования равна подынтегральной функции.
2. $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$
   Неопределенный интеграл дифференциала функции равен сумме самой функции и произвольной константы.
3. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, где *k* – произвольная константа.
   Коэффициент можно выносить за знак неопределенного интеграла.
4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
   Неопределенный интеграл суммы/разности функций равен сумме/разности неопределенных интегралов функций.

Задача интегрирования является обратной задаче дифференцирования, причем между этими задачами очень тесная связь:

- первое свойство позволяет проводить проверку интегрирования. Чтобы проверить правильность выполненного интегрирования достаточно вычислить производную полученного результата. Если полученная в результате дифференцирования функция окажется равной подынтегральной функции, то это будет означать, что интегрирование проведено верно;
- второе свойство неопределенного интеграла позволяет по известному дифференциалу функции найти ее первообразную. На этом свойстве основано непосредственное вычисление неопределенных интегралов.

Несомненно, основным методом нахождения первообразной функции является непосредственное интегрирование с использованием таблицы первообразных и свойств неопределенного интеграла. Все другие методы используются лишь для приведения исходного интеграла к табличному виду.

Таблица первообразных (неопределенных интегралов).

$\int x^p \cdot dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$	
$\int 0 \cdot dx = C$	
$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \neq 1$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
$\int e^x \cdot dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\rvert + C$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert\frac{1-\cos x}{\sin x}\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert\frac{1+\sin x}{\cos x}\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	

Формулы из левого столбца таблицы называют основными первообразными. Формулы из правого столбца основными не являются, но очень часто используются при нахождении неопределенных интегралов. Их можно проверить дифференцированием.

Пример 1:

Найдите множество первообразных функции $f(x) = 2^x + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{5x+4}$.

Решение.

Запишем функцию в виде $f(x) = 2^x + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{5x} = 2^x + \frac{3}{2} \cdot (5x+4)^{\frac{1}{3}}$.

Так как интеграл суммы функций равен сумме интегралов, то

$$\int f(x)dx = \int \left(2^x + \frac{3}{2} \cdot (5x+4)^{\frac{1}{3}} \right) dx = \int 2^x dx + \int \frac{3}{2} \cdot (5x+4)^{\frac{1}{3}} dx$$

Числовой коэффициент можно вынести за знак интеграла:

$$\int f(x)dx = \int 2^x dx + \int \frac{3}{2}\cdot(5x+4)^{\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \int 2^x dx + \frac{3}{2}\cdot\int(5x+4)^{\frac{1}{3}}dx$$

Первый из интегралов приведен к табличному виду, поэтому из таблицы первообразных для показательной функции имеем $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C_1$.

Для нахождения второго интеграла $\int(5x+4)^{\frac{1}{3}}dx$ воспользуемся таблицей первообразных для степенной функции $\int x^p\cdot dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ и правилом $\int f(k\cdot x+b)dx = \frac{1}{k}\cdot F(k\cdot x+b)+C$. То есть

$$\int(5x+4)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}\cdot(5x+4)^{\frac{1}{3}+1} + C_2 = \frac{3}{20}\cdot(5x+4)^{\frac{4}{3}} + C_2.$$

Следовательно,

$$\int f(x)dx = \int 2^x dx + \frac{3}{2}\cdot\int(5x+4)^{\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} + C_1 + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{20}\cdot(5x+4)^{\frac{4}{3}} + C_2\right) =$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{9}{40}\cdot(5x+4)^{\frac{4}{3}} + C$$

где $C = C_1 + \frac{3}{2}C_2$

Задание:Найдите неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования

Вариант 1

1. $\int\left(5\cos x - 3x^2 + \frac{1}{x}\right)dx$.
2. $\int\frac{3x^8 - x^5 + x^4}{x^5}dx$.
3. $\int\left(6^x\cdot 3^{2x} - 4\right)dx$.
4. $\int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

5. $\int \frac{dx}{1+16x^2}$.

Вариант 2

1. $\int \left(6\sin x + 4x^3 - \frac{1}{x}\right)dx$.
2. $\int \frac{x^9 - 3x^7 + 2x^6}{x^7}dx$.
3. $\int \left(7^x \cdot 2^{2x} + 5\right)dx$.
4. $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Название практической работы: ***Вычисление неопределённых интегралов заменойпеременной, по частям***

Цель работы:научится вычислять интегралы методом замены переменной, по частям
знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

Теоретический материал:

Метод замены переменной

Суть метода заключается в том, что мы вводим новую переменную, выражаем подынтегральную функцию через эту переменную, в результате приходим к табличному (или более простому) виду интеграла.
Очень часто метод подстановки выручает при интегрировании тригонометрических функций и функций с радикалами.

Пример1.

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-9}}dx$.

Решение.

Введем новую переменную $z=\sqrt{2x-9}$. Выразим x через z:

$$z^2=2x-9 \Rightarrow x=\frac{z^2+9}{2} \Rightarrow$$

$$dx=d\left(\frac{z^2+9}{2}\right)=\left(\frac{z^2+9}{2}\right)' dz=\frac{1}{2}\cdot 2zdz=zdz$$

Выполняем подстановку полученных выражений в исходный интеграл:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}=\int\frac{zdz}{\frac{z^2+9}{2}\cdot z}=2\int\frac{dz}{z^2+9}$$

Из таблицы первообразных имеем $2\int\frac{dz}{z^2+9}=\frac{2}{3}arctg\frac{z}{3}+C$.

Осталось вернуться к исходной переменной x:

$$\frac{2}{3}arctg\frac{z}{3}+C=\frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{2x-9}}{3}+C$$

Ответ:

$$\int\frac{1}{x\sqrt{2x-9}}dx=\frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{2x-9}}{3}+C$$

Пример 2

$$\int\frac{x^2}{(x+1)^3}dx$$

Решение:

Положим x+1=t, тогда x=t-1; $x^2=(t-1)^2$; $(\mathrm{x}+1)^3=t^3$

Продифференцировав x+1=t, получим dx=dt

$$\int\frac{x^2}{(x+1)^3}dx=\left|\begin{matrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ x^2=(t-1)^2 \\ dx=dt\end{matrix}\right|\int\frac{(t-1)^2}{t^3}dt=\int\frac{t^2-2t+1}{t^3}dt=\int\frac{dt}{t}-2\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{t^3}=\int\frac{dt}{t}-$$

$$2\int t^{-2}\,dt+\int t^{-3}\,dt=\ln|t|-2\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{t^{-2}}{-2}+C=\ln|t|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+C=\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}-$$

$$\frac{1}{2(x+2)^2}+\mathrm{C}$$

Обязательно возвращаемся к прежней переменной.

Очень часто метод замены переменной используется при интегрировании тригонометрических функций. К примеру, использование универсальной тригонометрической подстановки позволяет преобразовать подынтегральное выражение к дробно рациональному виду.

Метод подстановки позволяет объяснить правило интегрирования $\int f(k\cdot x+b)dx=\frac{1}{k}\cdot F(k\cdot x+b)+C$.

Вводим новую переменную $z = k \cdot x + b$, тогда

$$x = \frac{z}{k} - \frac{b}{k} \quad \Rightarrow dx = d\left(\frac{z}{k} - \frac{b}{k}\right) = \left(\frac{z}{k} - \frac{b}{k}\right)' dz = \frac{dz}{k}$$

Подставляем полученные выражения в исходный интеграл:

$$\int f(k \cdot x + b)dx = \int f(z) \cdot \frac{dz}{k} = \frac{1}{k} \cdot \int f(z)dz =$$

$$= \frac{1}{k} \cdot (F(z) + C_1) = \frac{F(z)}{k} + \frac{C_1}{k}$$

Если принять $\frac{C_1}{k} = C$ и вернуться к исходной переменной x, то получим

$$\frac{F(z)}{k} + \frac{C_1}{k} = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b) + C$$

Пример3

$$\int \sin^4 x \cos x dx$$

Решение:

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

Интегрирование по частям

Интегрирование по частям основано на представлении подынтегрального выражения в виде произведения $f(x)dx = u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot d(v(x))$ и последующем применении формулы $\int u(x) \cdot d(v(x)) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot d(u(x))$. Этот метод является очень мощным инструментом интегрирования. В зависимости от подынтегральной функции, метод интегрирования по частям иногда приходится применять несколько раз подряд до получения результата. Для примера найдем множество первообразных функции арктангенс.

Пример 4.

Вычислить неопределенный интеграл $\int arctg(2x)dx$.

Решение.

Пусть $u(x) = arctg(2x), \quad d(v(x)) = dx$, тогда

$$d(u(x)) = u'(x)dx = (arctg(2x))' dx = \frac{2dx}{1 + 4x^2}$$

$$v(x) = \int d(v(x)) = \int dx = x$$

Следует отметить, что при нахождении функции *v(x)* не прибавляют произвольную постоянную *C*.

Теперь применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int arctg(2x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)d(u(x)) =$$

$$= x \cdot arctg(2x) - \int \frac{2xdx}{1 + 4x^2}$$

Последний интеграл вычислим по методу подведения под знак дифференциала.

Так как $d\left(1+4x^2\right)=\left(1+4x^2\right)'dx=8xdx$, то $2xdx=\frac{1}{4}d\left(1+4x^2\right)$.

Поэтому

$$\int\frac{2xdx}{1+4x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(1+4x^2\right)}{1+4x^2}=\left\{1+4x^2=z\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(z)}{z}=\frac{1}{4}\ln|z|+C_1=\left\{z=1+4x^2\right\}=\frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right|+C_1$$

Следовательно,

$$\int arctg(2x)dx=x\cdot arctg(2x)-\int\frac{2xdx}{1+4x^2}=$$

$$=x\cdot arctg(2x)-\left(\frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right|+C_1\right)=$$

$$=x\cdot arctg(2x)-\frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right|+C$$

где $C=-C_1$.

Ответ:

$$\int arctg(2x)dx=x\cdot arctg(2x)-\frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right|+C$$.

Пример 5.

$$\int(2x+1)e^{3x}dx=\begin{vmatrix}U=2x+1 & dU=2dx\\ dV=e^{3x} & V=\frac{1}{3}e^{3x}\end{vmatrix}=(2x+1)\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}2dx=\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+c$$

Пример 6.

$$\int\ln xdx=\begin{vmatrix}dx=dV & V=x\\ U=\ln x & dU=\frac{1}{x}dx\end{vmatrix}=\ln x\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+c$$

Пример 7.

$$\int x^2e^xdx=\begin{vmatrix}U=x^2 & dU=2xdx\\ dV=e^xdx & V=e^x\end{vmatrix}=x^2e^x-\int e^x2xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx=\begin{vmatrix}x=U & dx=dU\\ dV=e^xdV & V=e^x\end{vmatrix}=$$

$$x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=x^2e^x-2xe^x-2x+c$$

Пример 8

$$\int arctgxdx=\begin{vmatrix}dx=dV & x=V\\ U=arctgx & dU=\frac{1}{1+x^2}dx\end{vmatrix}=xarctgx-\int\frac{x}{1+x^2}dx=\begin{vmatrix}1+x^2=t\\ dt=2xdx\end{vmatrix}=xarctgx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=xarctgx-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+c$$

Задание: Выполните задания по вариантам

Вариант 1

1. Найдите неопределенные интегралы методом подстановки

   а) $\int(8x-4)^3dx$.

b) $\int \frac{12x^3+5}{3x^4+5x-3}dx$.

c) $\int x^5 \cdot e^{x^6} dx$.

2. Найдите неопределенный интеграл методом интегрирования по частям: $\int (x+5)\cos x dx$.

3.Найти неопределенные интегралы методом замены переменной:

a) $\int \sin(3x+1)\,dx$

b) $\int \frac{dx}{5-2x}$

Вариант 2

1. Найти неопределенные интегралы методом подстановки

a) $\int (7x+5)^4 dx$.

b) $\int \frac{18x^2-3}{6x^3-3x+8}dx$.

c) $\int x^7 \cdot e^{x^8} dx$.

2. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям: $\int (x-2)\sin x dx$.

3. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной:

a. $\int \cos\frac{x}{2}\,dx$

b. $\int 4^{5x}\,dx$

Контрольные вопросы:

1) Что такое неопределенный интеграл?

2) Назовите основные методы интегрирования

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Название практической работы: ***Решение прикладных задач с использованием интегрального исчисления***

Цель работы:Научиться вычислять площади плоских фигур с помощью определённого интеграла.

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

использовать приёмы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях

Теоретический материал:

Определенный интеграл Ньютона-Лейбница.

Сейчас покажем, как дается понятие определенного интеграла Ньютона-Лейбница.

Пусть функция *y=f(x)* имеет первообразную *F(x)* на отрезке *[a; b]*, причем значение первообразной в точке *x=a* равно нулю: *F(a)=0*. *Определенным интегралом Ньютона-Лейбница* называется значение этой первообразной в точке *b*, то есть, $\int_a^b f(x)dx = F(b)$ при *F(a)=0*.

Это определение тесно связано с формулой Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. В формуле Ньютона-Лейбница *F(x)* – любая первообразная из их множества, а в понятии определенного интегралаНьютона-Лейбница фигурирует именно та первообразная, которая обращается в ноль при *x=a*.

Формулу Ньютона-Лейбница называют *основной формулой интегрального исчисления*.

Пример1:

Вычислить значение определенного интеграла $\int_1^3 x^2 dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.
Решение.

Для начала отметим, что подынтегральная функция $y = x^2$ непрерывна на отрезке *[1;3]*, следовательно, интегрируема на нем.

Из таблицы неопределенных интегралов видно, что для функции $y = x^2$ множество первообразных для всех действительных значений аргумента (следовательно, и для $x \in [1; 3]$) записывается как $F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Возьмем первообразную при *C = 0*: $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Теперь осталось воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла: $\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$.

Пример 2:

Вычислить определенные интегралы $\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2} dx$ и $\int_{-1}^{1} \frac{4x^3+2}{x^2} dx$.
Решение.

На отрезке $\left[-4; -\frac{1}{2}\right]$ подынтегральная функция непрерывна, следовательно, интегрируема.

Найдем множество первообразных функции $y = \frac{4x^3+2}{x^2}$

: $\int \frac{4x^3+2}{x^2}dx = 4\int xdx + 2\int x^{-2}dx = 2x^2 - \frac{2}{x} + C$.

Возьмем первообразную $F(x) = 2x^2 - \frac{2}{x}$ и по формуле Ньютона-Лейбница вычислим требуемый определенный интеграл:

$$\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2}dx = \left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)\Bigg|_{-4}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} - \left(2(-4)^2 - \frac{2}{-4}\right) = \frac{1}{2} + 4 - 32 - \frac{1}{2} = -28$$

Переходим ко второму определенному интегралу.

На отрезке *[-1;1]* подынтегральная функция не ограничена, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3+2}{x^2} = +\infty$, то есть, не выполняется необходимое условие интегрируемости функции на отрезке. Более того, $F(x) = 2x^2 - \frac{2}{x}$ не является первообразной функции $y = \frac{4x^3+2}{x^2}$ на отрезке *[-1;1]*, поскольку точка *0*, принадлежащая отрезку, не входит в область определения функции. Следовательно, не существует определенный интеграл Римана и Ньютона-Лейбница для функции $y = \frac{4x^3+2}{x^2}$ на отрезке *[-1;1]*.

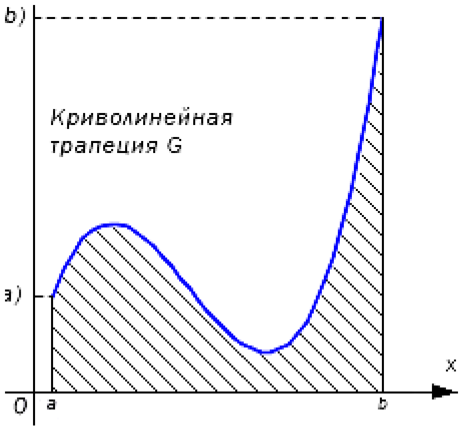
Вычисление площади основывается на следующих **основных свойствах площади**:

- **Положительность.** Площадь есть неотрицательное число.
- **Аддитивность.** Площадь замкнутой области, составленных из нескольких фигур, не имеющих общих внутренних точек, равна сумме площадей этих фигур.
- **Инвариантность.** Площади равных фигур одинаковы.
- **Нормированность.** Площадь квадрата, построенного на единичном отрезке, равна единице.

Вычисление площади фигуры является одной из наиболее не простых проблем теории площадей.

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, причем подойдем к ней в геометрическом смысле. Это позволит нам выяснить прямую связь между определенным интегралом и площадью криволинейной трапеции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и не меняет знак на нем (то есть, неотрицательная или неположительная). Фигуру G, ограниченную линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, называют *криволинейной трапецией*. Обозначим ее площадь $S(G)$.



В вычислении площади криволинейной трапеции состоит *геометрический смысл определенного интеграла*. Вычислив определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, мы найдем площадь фигуры, ограниченной линиями y = f(x), y = 0, x = a и x = b.

Замечание.

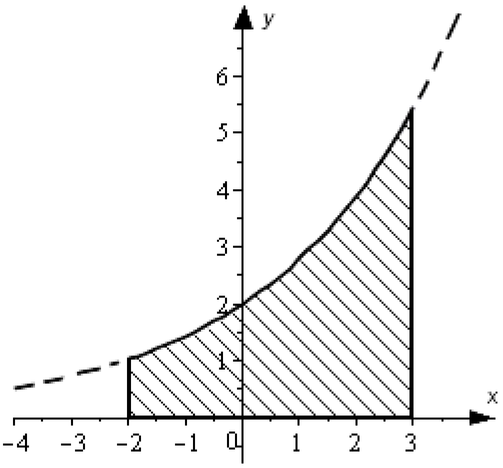
Если функция y = f(x) неположительная на отрезке [a; b], то площадь криволинейной трапеции может быть найдена как формула

<u>Пример3</u>.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 \cdot e^{\frac{x}{3}}, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 3$.

Решение.

Построим фигуру на плоскости: прямая *y = 0* совпадает с осью абсцисс, прямые *x = -2* и *x = 3* параллельны оси ординат, а кривая $y = 2 \cdot e^{\frac{x}{3}}$ может быть построена с помощью <u>геометрических преобразований графика функции</u> $y = e^x$



Таким образом, нам требуется найти площадь криволинейной трапеции. Геометрический смысл определенного интеграла нам указывает на то, что искомая площадь выражается определенным интегралом. Следовательно, $S(G) = \int_{-2}^{3} 2 \cdot e^{\frac{x}{3}} dx$. Этот определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S(G)=\int_{-2}^{3}2\cdot e^{\frac{x}{3}}dx=\left(6\cdot e^{\frac{x}{3}}\right)\Big|_{-2}^{3}=6\cdot e^{\frac{3}{3}}-6\cdot e^{\frac{-2}{3}}=6\cdot\left(e-e^{-\frac{2}{3}}\right)$$

Замечание.

При нахождении площадей криволинейных трапеций совсем не обязательно сначала строить эту фигуру. Если Вы знаете, что функция *y = f(x)* неотрицательная на отрезке *[a; b]* (как в нашем примере) или неположительная, то можно сразу применять формулы $S(G)=\int_{a}^{b}f(x)dx$ или $S(G)=-\int_{a}^{b}f(x)dx$

Пример4.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-8\right),\quad y=0,\quad x=-2,\quad x=4$.

Решение.

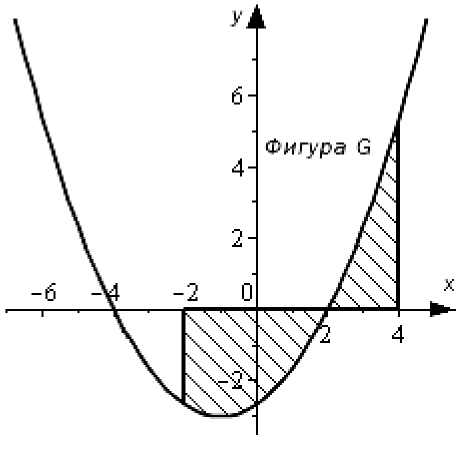
Построим эту фигуру. Прямая *y = 0* совпадает с осью *Ox*, прямые *x = -2* и *x = 4* параллельны оси *Oy*, а графиком функции $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-8\right)=\frac{1}{3}(x+1)^2-3$ является парабола с вершиной в точке *(-1; -3)* ветви которой направлены вверх. Найдем точки пересечения этой параболы с осью абсцисс:

$$\frac{1}{3}\left(x^2+2x-8\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad x^2+2x-8=0$$

$$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-8)=36$$

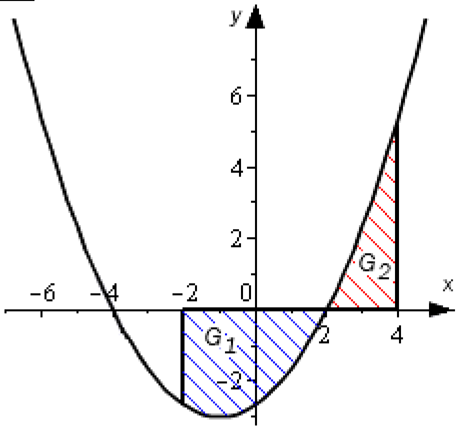
$$x_1=\frac{-2+\sqrt{36}}{2}=2,\qquad x_2=\frac{-2-\sqrt{36}}{2}=-4$$

Следовательно, эта парабола пересекает ось абсцисс в точках *(-4; 0)* и *(2; 0)*.
Таким образом, наша фигура *G* имеет следующий вид.



Эта фигура не является криволинейной трапецией, так как функция $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-8\right)$ меняет знак на отрезке *[-2; 4]*.

Как же быть в этом случае? Очень просто. Фигуру *G* можно представить в виде объединения двух криволинейных трапеций $G=G_1\cup G_2$ и по <u>свойству аддитивности площади</u> $S(G)=S(G_1)+S(G_2)$.



На отрезке *[2; 4]* график параболы находится в неотрицательной области, поэтому $S(G_2)=\int\limits_2^4 \frac{1}{3}\left(x^2+2x-8\right)dx$. На отрезке *[-2; 2]* функция $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-8\right)$ неположительная, следовательно, в силу замечания к геометрическому смыслу определенного интеграла,имеем $S(G_1)=-\int\limits_{-2}^{2}\frac{1}{3}\left(x^2+2x-8\right)dx$. Осталось вычислить определенные интегралы по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S(G)=S(G_1)+S(G_2)=-\int\limits_{-2}^{2}\frac{1}{3}\left(x^2+2x-8\right)dx+\int\limits_{2}^{4}\frac{1}{3}\left(x^2+2x-8\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}+x^2-8x\right)\Bigg|_{-2}^{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}+x^2-8x\right)\Bigg|_{2}^{4}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{2^3}{3}+2^2-8\cdot 2-\left(\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2-8\cdot(-2)\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{4^3}{3}+4^2-8\cdot 4-\left(\frac{2^3}{3}+2^2-8\cdot 2\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}-12+\frac{8}{3}-20\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{64}{3}-16-\frac{8}{3}+12\right)=\frac{124}{9}$$

Обратите внимание на то, что нельзя находить площадь этой фигуры

$$S(G)=\int_{-2}^{4}\frac{1}{3}\left(x^2+2x-8\right)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}+x^2-8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{4^3}{3}+4^2-8\cdot4-\left(\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2-8\cdot(-2)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{64}{3}-16+\frac{8}{3}-20\right)=-4$$

как .

В нашем примере полученное таким образом значение представляет собой разность $S(G_2)-S(G_1)$.

Пример 5

Определить силу давления воды на стенку аквариума с основанием 1,8 м и высотой 0,6 м.

Дано: *Решение:*

I=1,8м $P=\frac{F}{S}\Rightarrow F=p\cdot sF=\int pds.$

H=0,6м Величина р давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины ее погружения x, т.е. от

F-? расстояния площадки до поверхности жидкости

P=10^3 кг/м^3 $p=\rho\cdot g\cdot x.$

G=9,8м/с^2 Площадь этой полоски $ds=I\cdot dx.$

$$F=\int_0^{0,6}\rho gx\cdot I\cdot dx=\rho gI\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,6}=\frac{\rho gI}{2}(0,36-0)=0,18\cdot10^3\cdot9,8\cdot1,8=3,2(kH).$$

Задание:Выполните задания по вариантам

Вариант 1.

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^2\left(4x^2+x-3\right)dx$.
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int_2^3(2x-1)^3dx$.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+4,\quad y=0,\quad x=-2,\quad x=2$.
4. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=\sqrt{x},\quad y=0,\quad x=1,\quad x=4$.
5. Скорость движения точки изменяется по закону $v=3t^2+2t+1$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 10 сот начала движения.

Вариант 2.

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^3 (2x^2 - x + 4)dx$.
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int_0^1 (3x+1)^4 dx$.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 1$.
4. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$.
5. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 9t^2 - 8t$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за четвертую секунду.

Контрольные вопросы:

1) Запишите формулу Ньютона-Лейбница

2) В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10

Название практической работы: ***Решение дифференциальных уравнений первого порядка.***

Цель работы: Научится решать дифференциальных уравнений 1-го порядка

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

Решать прикладные задачи с использованием дифференциального и интегрального исчисления

Теоретический материал:

Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях

Дифференциальное уравнение - это равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции. Общий вид дифференциального уравнения: F(x, y, y′, y″ …)=0, здесь F- некоторая известная функция, зависящая от нескольких переменных.

Применение теории дифференциальных уравнений в биологии и медицине обусловлено тем, что в соотношениях, являющихся выражением тех или иных знаков, в описаниях конкретных свойств тех или иных систем или механизмов входят, как правило, производные интересующих нас функций, а не сами функции. Поэтому существенная часть изучения интересующего нас явления состоит в анализе и решении соответствующих дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения называются *обыкновенными*, если неизвестная функция зависит только от одного аргумента.

Порядок дифференциального уравнения – это порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении.

Например: уравнение $y''+5y'-3y=0$ - это дифференциальное уравнение второго порядка.

Интеграл (или решение) уравнение – это функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению.

Например, функция y=2x является интегралом уравнения $x^2y''-2xy'+2y=0$, так как, найдя производные этого уравнения и подставляя их в данное уравнение, мы получим тождество -4x+4x=0.

Общее решение дифференциального уравнения содержит столько независимых постоянных, каков порядок уравнения.

Частное решение-это функция, получаемая при различных числовых значениях произвольных постоянных.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Рассмотрим задачу, приводящую к дифференциальному уравнению: установить закон изменения скорости U свободно падающего тела массой m без учёта силы сопротивления воздуха.

Согласно второму закону Ньютона,

$$m\frac{dU}{dt}=mg\ ,$$

где mg-сила тяжести.

Полученное уравнение является дифференциальным, так как в него входит производная $\frac{dU}{dt}$ искомой функции U. Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию $U=f(x)$, которая торжественно удовлетворяет этому уравнению. Легко проверить , что уравнению удовлетворяет функция вида U=gt+C, где C-любое число. Указав начальные условия, можно найти одну функцию, удовлетворяющую уравнению. Так, если при t=0 и $U=U_0$, то получим функцию $U=U_0+gt$

Существует много задач из различных областей знаний, решение которых сводится к составлению и решению дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 1

Проверить подстановкой, что дифференциальное уравнение $y' - 2y = e^{3x}$ имеет общее решение в виде $y = e^{3x} + Ce^{2x}$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию y=3 при x=0.

Решение:

$$y = e^{3x} + Ce^{2x} y' = 3e^{3x} + 2Ce^{2x}$$

Подставим дифференциальное уравнение:

$3e^{3x} + 2Ce^{2x} - 2(e^{3x} + Ce^{2x}) = e^{3x}$

$3e^{3x} + 2Ce^{2x} - 2e^{3x} - 2Ce^{2x} = e^{3x}$

$e^{3x} = e^{3x}$ - это тождество.

Частное решение:

$y = e^{3x} + Ce^{2x}$; $3 = e^{0} + Ce^{0}$ =>C=3

$y = e^{3x} + 3e^{2x}$ - частное решение.

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка $P(x, y)dx + Q(x, y) = 0$ называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если функции P и Q разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)f^2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$$

В таком уравнении после деления членов на $f_1(y) \cdot \varphi_1(x)$ перемещенные разделяются:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0$$

И каждый член уравнения зависит от одной переменной.

Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0$$

Пример 1

Найти общие интегралы уравнения:

$$(x + 1)^3 dy - (y - 2)^2 dx = 0$$

Решение:

Разделим переменные в данном уравнении, деля обе его части на $(x+1)^3(y-2)^2$

$$\frac{dy}{(y-2)^2}-\frac{dx}{(x+1)^3}=0$$

Почленно интегрируя, получим искомое общее решение:

$$-\frac{1}{y-1}+\frac{1}{2(x+1)^2}=C$$

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{y}=(x-1)dx$, при x=2, y=5.

Решение:

$\frac{dy}{y}=xdx-dx$; $\int\frac{dy}{y}=\int xdx-\int dx;$

$\ln|y|=0{,}5x^2-x+\ln C.$

Умножим $0{,}5x^2-x$ на $\ln e$, $(\ln e=1)$;

$\ln|y|=\ln e^{0{,}5x^2-x}+\ln C;$

$|y|=C\cdot e^{0{,}5x^2-x}$ - это общее решение дифференциального уравнения.

Найдем частное решение. Для этого вычислим*C*при x=2 и y=5.

$5=Ce^{2-2}$ $=> C=5$. Частное решение $y=5e^{0{,}5x^2-x}$.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется *однородным*, если $f(x,y)$ можно представить как функцию только одного отношения переменных $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т.е. уравнение вида $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, следовательно, решается посредством замены функции y (или x) новой функцией *u*по формуле $y=ux$ (или$x=uy$).

Пример 1

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения
$xdy-ydx=xdx.$

Решение:

Из уравнение следует, что $xdy=(x+y)dx;$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}; \qquad \frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{x}.\,(\mathbf{1})$$

Так как полученное уравнение является функцией только отношения $\frac{y}{x}$, то оно однородное.

Вводим новую функцию *u*. Пологая $y=ux$, продифференцируем по *x:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u\frac{dx}{dx}; \qquad \frac{dy}{dx} = u + \frac{xdu}{dx}. \qquad (\mathbf{2})$$

Прировняем (1) и (2): $1 + \frac{y}{x} = u + \frac{xdu}{dx}$.

Подставим y=ux. Получим $1 + u = u + \frac{xdu}{dx}$.

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$1 = x\frac{du}{dx} \;\; => dx = xdu \;\; => du = \frac{dx}{x}$;

$\int du = \int \frac{dx}{x}; \quad u = \ln|x| + C, \qquad$ где$u = \frac{y}{x}$.

Общее решение уравнения имеет вид: $y = x(\ln|x| + C)$.

Пример 2

Найти частное решение однородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию y=-9, при x=1.

Решение:

Приведем уравнение к виду$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{y}{x}$.

Полученное уравнение является функцией только $\frac{y}{x}$, следовательно, оно однородное.

Для решения положим y=ux и продифференцируем по x:

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{xdu}{dx}$$

Заменим $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{y}{x} = u$ в исходном уравнении:

$u + x\frac{du}{dx} = 2 - u$.

Разделяем переменные: $2dx - 2udx = xdu$;

$2(1-u)dx = xdu; \qquad \frac{2dx}{x} = \frac{du}{1-u}$.

Проинтегрируем: $\qquad 2\int\frac{dx}{x} = \int\frac{du}{1-u}$;

$21n|x| + 1n|C| = -1n|1-u|$;

Общее решение уравнения:

$u = \frac{y}{x}$; $y = \frac{x(x^2-C)}{x^2}$ или $x^2 - xy = C$.

Частное решение: $\quad 1 + 9 = C; C = 10$. $\qquad$ Ответ: $x^2 - xy = 10$.

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $a_0\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=0$называются *линейными однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Общий интеграл находится с помощью характеристического уравнения:

$$a_0k^2+a_1k+a_2=0$$

которое получается из этого уравнения, если, сохраняя в нем все коэффициенты a_i, заменить функцию *y* единицей $(y=1)$, а все ее производные заменить соответствующими степенями *k*. При этом:

I. Если все корни характеристического уравнения *действительные* и *различные*, то общий интеграл имеет вид:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$$

II. Если характеристическое уравнение имеет корни *действительные* и *равные* $k_1=k_2$, то

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_2x}$$

III. Если корни *мнимые* $k=\pm bi$: $y=C_1\cos bx+C_2\sin bx$.

IV. Если корни *комплексные* $k=a\pm bi$:

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx).$$

Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений:

Пример 1

$2\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+2y=0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$2k^2-5k+2=0.$$

Общее решение: $k_1=2$, $k_2=\frac{1}{2}$, $y=C_1e^{2x}+C_2e^{\frac{x}{2}}$.

Пример 2

$2\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+2y=0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$2k^2-5k+2=0.$

Общее решение: $k_1=2$, $k_2=\frac{1}{2}$, $y=C_1e^{2x}+C_2e^{\frac{x}{2}}$.

Пример 3

$\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+16y=0.$

Решение: $k^2-8k+16=0$, $k_1=k_2=4$, $y=e^{4x}(C_1+C_2x)$.

Пример 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Решение: $k^2 + 1 = 0, \;\; k = \pm i, \;\; y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

Пример 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

Решение: $k^2 + 8k + 25 = 0, \quad k = -4 \pm 3i,$

$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$

Системы линейных однородных уравнений первого порядка.

простейших систем дифференциальных уравнений имеют вид $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1 \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$, где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 - некоторые действительные числа. Сначала покажем метод интегрирования системы уравнений, далее подробно опишем решение примера.

Решением такой системы является пара функций $x(t)$ и $y(t)$, обращающая в тождества оба уравнения системы.
Опишем метод интегрирования систем дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1 \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$.
Исключим неизвестную функцию $x(t)$ из первого уравнения системы. Для этого выразим x из второго уравнения системы $\dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{a_2}\left(\dfrac{dy}{dt} - b_2y - c_2\right)$,

продифференцируем по t второе уравнение системы и разрешим его относительно $\dfrac{dx}{dt}$:
$$\frac{d^2y}{dt^2} = a_2\frac{dx}{dt} + b_2\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{a_2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - b_2\frac{dy}{dt}\right).$$

Подставляем полученные результаты в первое уравнение системы, тем самым неизвестная функция *x(t)* будет исключена:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a_2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - b_2\frac{dy}{dt}\right) = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{dy}{dt} - b_2 y - c_2\right) + b_1 y + c_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (a_1 + b_2)\cdot\frac{dy}{dt} + (a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1)\cdot y = a_2\cdot c_1 - a_1\cdot c_2$$

Пример 6.

Найдите решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 1 \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3 \end{cases}$.

Решение.

Разрешим второе уравнение системы относительно *x*: $x = \frac{dy}{dt} - 2y + 3$.

Продифференцируем второе уравнение системы и разрешим относительно $\frac{dx}{dt}$: $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt}$.

Подставляем полученные результаты в первое уравнение системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = x - 1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} - 2y + 3 - 1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 2$$

Так мы пришли к ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 2$. Определив его общее решение, мы получим функцию *y(t)*.

Найдем сначала y_0 - общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Для этого вычислим корни характеристического уравнения $k^2-3k+2=0$:

$$D=3^2-4\cdot 2=1$$

$$k_1=\frac{3-1}{2}=1$$

$$k_2=\frac{3+1}{2}=2$$

Так как корни действительные и различные, то общее решение однородного дифференциального уравнения запишется как $y_0=C_1\cdot e^t+C_2\cdot e^{2t}$.

Переходим к нахождению $\tilde{y}$ - частного решения ЛНДУ $\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=2$.

Так как его правая часть представляет собой многочлен нулевой степени, то частное решение будем искать в виде $\tilde{y}=A$, где *A* – неопределенный коэффициент.

Определим его из равенства $\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}-3\frac{d\tilde{y}}{dt}+2\tilde{y}=2$:

$$\frac{d^2(A)}{dt^2}-3\frac{d(A)}{dt}+2A=2 \quad \Rightarrow$$

$$2A=2 \quad \Rightarrow \quad A=1$$

Таким образом, $\tilde{y}=1$ и $y(t)=y_0+\tilde{y}=C_1\cdot e^t+C_2\cdot e^{2t}+1$. Итак, одна неизвестная функция найдена.

Подставим эту функцию во второе уравнение системы дифференциальных уравнений и разрешим полученное равенство относительно *x(t)*:

$$\frac{d\left(C_1\cdot e^t+C_2\cdot e^{2t}+1\right)}{dt}=x+2\cdot\left(C_1\cdot e^t+C_2\cdot e^{2t}+1\right)-3$$

$$C_1\cdot e^t+2C_2\cdot e^{2t}=x+2C_1\cdot e^t+2C_2\cdot e^{2t}-1$$

$$x=-C_1\cdot e^t+1$$

Так мы получили вторую неизвестную функцию $x(t)=-C_1\cdot e^t+1$.

Ответ:

$$\begin{cases} x(t)=-C_1\cdot e^t+1 \\ y(t)=C_1\cdot e^t+C_2\cdot e^{2t}+1 \end{cases}.$$

Задание: Выполните задания по вариантам:

Вариант 1

1. Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений
   a. $y=c_1e^{-5x}+c_2e^x, \quad y''+4y'-5y=0$.
   b. $y=c_1e^x+c_2xe^x, \quad y''+2y'+y=0$.

c. $y=\frac{8}{x}, \quad y'=-\frac{1}{8}y^2$.

d. $y=e^{4x}+2, \quad y'=4y$.

2. Решить следующие дифференциальные уравнения первого порядка
   a) $y'=\frac{1}{\cos^2 x}+x^4$.
   b) $y'=-6y$.
   c) $y'=\frac{x-1}{y^2}$.
   d) $y'=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$.
   e) $y'-3y+5=0$.

Вариант 2

1. Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений
   a) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}, \quad y''+4y'+4y=0$.
   b) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{x}, \quad y''-y'-6y=0$.
   c) $y=e^{3x}-5, \quad y'=3y+15$.
   d) $y=\frac{5}{x}, \quad y'=-y^2$.
2. Решить следующие дифференциальные уравнения первого порядка
   a) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-x^7$.
   b) $y'=8y$.
   c) $y'=\frac{2x}{y^2}$.
   d) $y'=\frac{y}{1+x^2}$.
   e) $y'+8y-3=0$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите определение дифференциального уравнения
2. Назовите виды дифференциальных уравнений

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11

Название практической работы: ***Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка***

Цель работы:Научится решать дифференциальных уравнений 2-го порядка с разделяющими переменными

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

Решать прикладные задачи с использованием дифференциального и интегрального исчисления

Теоретический материал:

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид $y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = 0$, а неоднородное $y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = f(x)$, где функции *f(x), p(x)* и *q(x)* - непрерывны на интервале интегрирования *X*. В частном случае, когда функции *p(x) = p* и *q(x) = q* есть постоянные.

Общий интеграл находится с помощью характеристического уравнения:

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$$

которое получается из этого уравнения, если, сохраняя в нем все коэффициенты a_i, заменить функцию *y* единицей $(y = 1)$, а все ее производные заменить соответствующими степенями *k*. При этом:

V. Если все корни характеристического уравнения *действительные* и *различные*, то общий интеграл имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

VI. Если характеристическое уравнение имеет корни *действительные* и *равные* $k_1 = k_2$, то

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_2x}$$

VII. Если корни *мнимые* $k = \pm bi$: $y = C_1\cos bx + C_2\sin bx$.

VIII. Если корни *комплексные* $k = a \pm bi$:

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx).$$

Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений:

Пример 1

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$2k^2 - 5k + 2 = 0.$$

Общее решение: $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $y = C_1e^{2x} + C_2e^{\frac{x}{2}}$.

Пример 2

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$2k^2 - 5\text{k} + 2 = 0.$

Общее решение: $\text{k}_1 = 2,\ \ \text{k}_2 = \frac{1}{2},\ \ \text{y} = \text{C}_1\text{e}^{2\text{x}} + \text{C}_2\text{e}^{\frac{\text{x}}{2}}.$

Пример 3

$$\frac{\text{d}^2\text{y}}{\text{dx}^2} - 8\frac{\text{dy}}{\text{dx}} + \ 16\text{y} = 0.$$

Решение: $\text{k}^2 - 8\text{k} + 16 = 0,\quad \text{k}_1 = \text{k}_2 = 4,\quad \text{y} = \text{e}^{4\text{x}}(\text{C}_1 + \text{C}_2\text{x}).$

Пример 4

$$\frac{d^2\text{y}}{\text{dx}^2} + \text{y} = 0.$$

Решение:$k^2 + 1 = 0,\ \ \text{k} = \pm\text{i},\ \ \text{y} = \text{C}_1\cos\text{x} + \text{C}_2\sin\text{x}.$

Пример 5

$$\frac{\text{d}^2\text{y}}{\text{dx}^2} + 8\frac{\text{dy}}{\text{dx}} + 25\text{y} = 0.$$

Решение: $\text{k}^2 + 8\text{k} + 25 = 0,\quad \text{k} = -4 \pm 3\text{i},$

$$\text{y} = \text{e}^{-4\text{x}}(\text{C}_1\cos 3\text{x} + \text{C}_2\sin 3\text{x}).$$

Задание: Решите следующие дифференциальные уравнения второго порядка:

Вариант 1:

1. $y'' - 7y' + 10y = 0$.
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
3. $y'' + y' - 2y = 0$
4. $y'' - 4y' = 0$
5. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Вариант 2:

1. $y'' + 8y' + 16y = 0$.
2. $y'' - y' - 12y = 0$.
3. $y'' - 2y' + 10y = 0$
4. $y'' - 4y = 0$
5. $y'' + 2y' - 8y = x^2$

Контрольные вопросы:

1) Запишите определение дифференциального уравнения

2) Назовите виды дифференциальных уравнений

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №12

Название практической работы: ***Решение профессиональных задач с использованием дифференциальных уравнений***

Цель работы: научиться применять дифференциальные уравнения для решения профессиональных задач

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

использовать приёмы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях

Теоретический материал:

Дифференциальные уравнения являются основой огромного количества расчетных задач из самых различных областей науки и техники.

Примеры применения дифференциального уравнения

Пример 1.

Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a градусов до b градусов. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

Решение:

◀ Согласно условию, имеем

$$\frac{dT_м}{dt} = k(T_п - T_м), \tag{1}$$

где $T_п$ и $T_м$ — температуры печи и металла соответственно. Далее, $T_п = a + \frac{1}{60}(b-a)t$ в силу равномерного повышения температуры печи, t — время, измеряемое в минутах. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{dT_м}{dt} = k\left(a + \frac{t}{60}(b-a) - T_м\right). \tag{2}$$

Введем замену $a + \frac{t}{60}(b-a) - T_м = z$. Тогда уравнение (2) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{kz - \frac{b-a}{60}} = -dt,$$

интегрируя которое, находим

$$\frac{1}{k}\ln\left(kz - \frac{b-a}{60}\right) = -t + \frac{1}{k}\ln C, \quad k \neq 0,$$

или

$$T_м = a + \left(t - \frac{1}{k}\right)\frac{b-a}{60} + Ce^{-kt}.$$

Так как $T_м(t)|_{t=0} = a$, то $C = \frac{b-a}{60k}$. Следовательно, окончательно имеем

$$T_м = a + \frac{b-a}{60}\left(t - \frac{1}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\right).$$

Температура металла через час, очевидно, будет равна

$$T_м(60) = b - \frac{b-a}{60k}\left(1 - e^{-60k}\right). ▶$$

Пример 2.

В прямоугольный бак размером 60 см х 75 см и высотой 80 см поступает 1,8 л воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью 2,5 см^2. За какое время наполнится бак? Сравнить результат с временем наполнения такого бака без отверстия в дне.

Решение:

Пусть жидкость вытекает из некоторого сосуда через отверстие в нем со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g = 10\,\text{м/с}^2$, h — высота уровня жидкости над отверстием.

В прямоугольный бак размером $60\,\text{см} \times 75\,\text{см}$ и высотой $80\,\text{см}$ поступает $1{,}8\,\text{л}$ воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью $S = 2{,}5\,\text{см}^2$. За какое время наполнится бак?

◀ Пусть $h(t)$ — высота уровня воды в баке. Тогда $\Delta V_1 = (h(t+\Delta t) - h(t))\,60\cdot 75$ — приращение ее объема за время от t до $t + \Delta t$. Это увеличение (или уменьшение) объема происходит за счет поступления ΔV_2 воды и ее утечки в количестве ΔV_3 через отверстие. Таким образом, имеем уравнение $\Delta V_1 = \Delta V_2 - \Delta V_3$. Поскольку $\Delta V_2 = 1800\Delta t$, $\Delta V_3 = 2{,}5\cdot 0{,}6\sqrt{2gh(t_1)}\Delta t$, $t_1 \in (t, t+\Delta t)$, то последнее уравнение можно представить в виде

$$4500(h(t+\Delta t) - h(t)) = 1800\Delta t - 2{,}5\cdot 0{,}6\sqrt{2gh(t_1)}\Delta t, \quad g = 10^3\,\text{см/с}^2. \tag{1}$$

Разделив в (1) обе части на Δt и совершив предельный переход при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$30\,\frac{dh}{dt} = \left(12 - 0{,}01\sqrt{2gh}\right),$$

проинтегрировав которое, найдем:

$$t + C = -\frac{6000}{\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h} + \frac{1200}{\sqrt{2g}}\ln(12 - 0{,}01\sqrt{2gh})\right). \qquad (2)$$

Пусть $h(0) = 0$, тогда из (2) следует, что $C = -3600\ln 12$. Подставив в (2) $h = 80$, найдем время t_1, за которое наполнится бак:

$$t_1 = 1200\left(3\ln\frac{3}{2} - 1\right) \approx 260 \text{ с.} ▶$$

Задание:

Вариант 1

1. Тело массой m падает под действием силы тяжести $mg,$ где $g -$ ускорение свободного падения и силы сопротивления $F_{тр} = -kv,$ пропорциональной скорости $v,$ где $k -$ коэффициент сопротивления. Найти зависимость скорости движения тела от времени $t.$
2. Скорость тела, выходящего из состояния покоя, равна $5t^2$ м/спо истечении t секунд. Определить путь, который пройдет тело за 3 с.

Вариант 2

1. Материальная точка движется так, что скорость ее движения пропорциональна пройденному пути. В начальный момент точка находилась от начала отсчета на расстоянии 1 м, а через 2с - на расстоянии e м. Найти закон движения материальной точки.
2. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20^{0}С. Известно, что в течение 20 минут тело охлаждается от 100 до 60^{0}С. Определить закон изменения температуры θ тела в зависимости от времени t.

Контрольные вопросы:

1) каким методом решаются дифференциальные уравнения?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №13

Название практической работы: ***Линейные операции над векторами, скалярное произведение векторов***

Цель работы:Научиться выполнять линейные операции над векторами и находить скалярное произведение векторов.

знания:

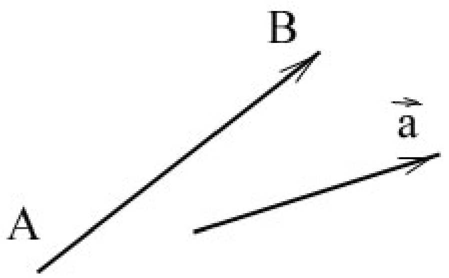
основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

Вычислять значения геометрических величин

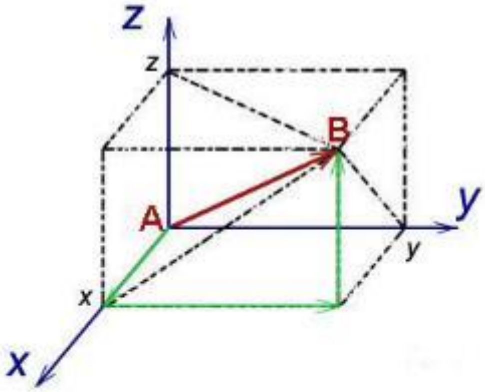
Теоретический материал:

Векторы занимают особое место среди объектов, рассматриваемых в высшей математике, поскольку каждый вектор имеет не только числовое значение - длину, но и физическое и геометрическое - направленность. Вектор, представленный направленным отрезком, идущим от точки *A* к точке *B*, обозначается так: $\overrightarrow{AB}$.



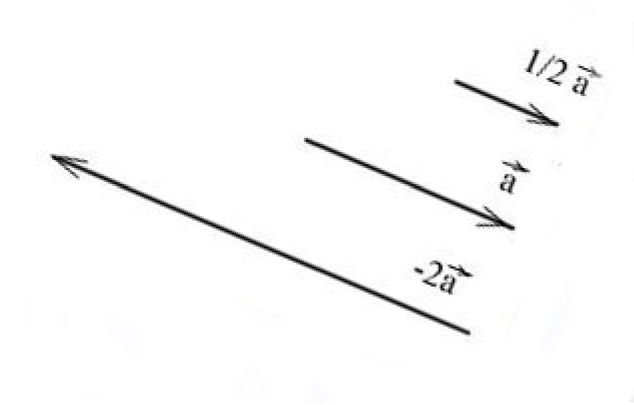
Геометрический вектор представлен в двумерном и трёхмерном пространстве в виде *направленного отрезка*, т.е. отрезка, у которого различают начало и конец.

Если *A* - начало вектора, а *B* - его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или одной строчной буквой $\vec{a}$. На рисунке конец вектора указывается стрелкой



Длиной (или **модулем**) геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина порождающего его отрезка $|AB|$

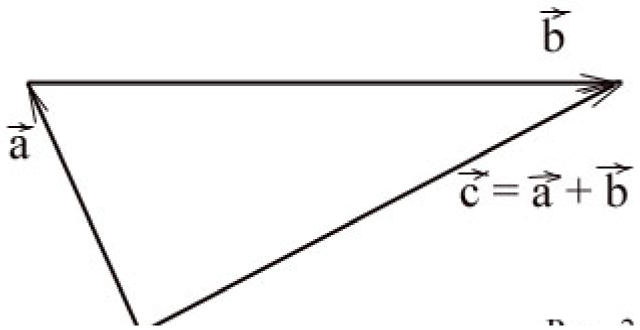
Линейные операции над геометрическими векторами



Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, получающийся из вектора $\vec{a}$ растяжением (при $|\lambda| > 1$) или сжатием (при $|\lambda| < 1$) в $|\lambda|$ раз, причём направление вектора $\vec{a}$ сохраняется, если $\lambda > 0$, и меняется на противоположное, если $\lambda < 0$.

Из определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ = $\lambda\vec{a}$ всегда расположены на одной или на параллельных прямых. Такие векторы называются *коллинеарными*. (Можно говорить также, что эти векторы параллельны, однако в векторной алгебре принято говорить "коллинеарны".) Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны отношением $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

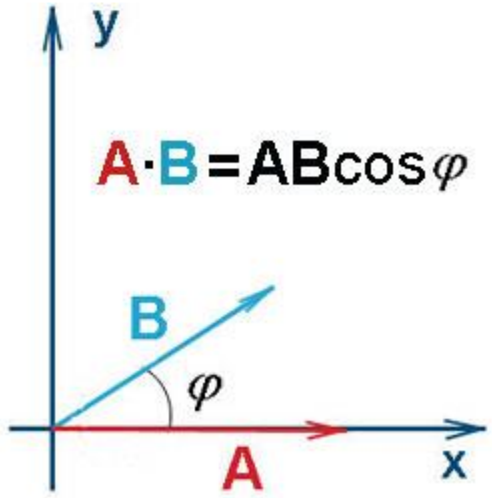


Сложение и вычитание векторов

При сложении векторов нужно знать, что *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$.

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов позволяет находить угол между двумя векторами. Поэтому оно часто встречается в последующих разделах математики, особенно, аналитической геометрии. Стоит ли говорить о том, что нахождение скалярного произведения векторов - фундаментальный навык для любого будущего инженера,



Определение 1. Скалярным произведением двух векторов называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Согласно определению, формула выглядит так $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \bullet |\vec{b}| \cos\varphi$.

проектирующего всё что угодно

<u>**Пример 1**</u>. Даны $\vec{a}, \ \vec{b}$. Найти $\vec{a} \bullet \vec{b}$, если

$|\vec{a}| = 3; \ |\vec{b} = 8|; \ \varphi(\vec{a}, \ \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 3 \bullet 8 \bullet \cos\frac{\pi}{6} = 3 \bullet 8 \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$

Алгебраические свойства скалярного произведения векторов

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (переместительное свойство)

$(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$ (сочетательное относительно числового множителя свойство)

$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (распределительное относительно суммы векторов свойство)

$\vec{a}\vec{a} > 0$, если $\vec{a}$ - ненулевой вектор, и $\vec{a}\vec{a} = 0$, если $\vec{a}$ - нулевой вектор.

$\vec{a} \bullet \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

<u>**Пример 2**</u>:Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2, \ |\bar{b}| = 5, \ \angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b})$. В данном случае:

$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

Ответ: $\bar{a}\bar{b} = 5\sqrt{3}$

Угол между векторами и значение скалярного произведения

В Примере 2 скалярное произведение получилось положительным.От чего зависит знак скалярного произведения. Смотрим на нашу формулу: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b})$. Длины ненулевых векторов всегда положительны: $|\bar{a}|>0,\ |\bar{b}|>0$, поэтому знак может зависеть только от значения косинуса.Угол между векторами может изменяться в пределах $0\le\angle(\bar{a};\bar{b})\le\pi$, и при этом возможны следующие случаи:

1) Если **угол** между векторами **острый**: $0<\angle(\bar{a};\bar{b})<\dfrac{\pi}{2}$ (от 0 до 90 градусов), то $\cos\angle(\bar{a};\bar{b})>0$, и **скалярное произведение будет положительным**: $\bar{a}\bar{b}>0$. Особый случай: если векторы *сонаправлены*, то угол между ними считается нулевым $\angle(\bar{a};\bar{b})=0$, и скалярное произведение также будет положительным. Поскольку $\cos 0=1$, то формула упрощается: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$.

2) Если **угол** между векторами **тупой**: $\dfrac{\pi}{2}<\angle(\bar{a};\bar{b})<\pi$ (от 90 до 180 градусов), то $\cos\angle(\bar{a};\bar{b})<0$, и, соответственно, **скалярное произведение отрицательно**: $\bar{a}\bar{b}<0$. Особый случай: если векторы *направлены противоположно*, то угол между ними считается *развёрнутым*: $\angle(\bar{a};\bar{b})=\pi$ (180 градусов). Скалярное произведение тоже отрицательно, так как $\cos\pi=-1$

Справедливы и обратные утверждения:

1) Если $\bar{a}\bar{b}>0$, то угол между данными векторами острый. Как вариант, векторы сонаправлены.

2) Если $\bar{a}\bar{b}<0$, то угол между данными векторами тупой. Как вариант, векторы направлены противоположно.

Но особый интерес представляет третий случай:

3) Если **угол** между векторами **прямой**: $\angle(\bar{a};\bar{b})=\dfrac{\pi}{2}$ (90 градусов), то $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ и **скалярное произведение равно нулю**: $\bar{a}\bar{b}=0$. Обратное тоже верно: если $\bar{a}\bar{b}=0$, то $\angle(\bar{a};\bar{b})=\dfrac{\pi}{2}$. Компактно утверждение формулируется так: **Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны**. Короткая математическая запись: $\bar{a}\bar{b}=0\Leftrightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$

Задание:Выполните задания по вариантам
Вариант 1

1. Даны векторы $\vec{a}(9;-2;1)$ и $\vec{b}(4;3;0)$ (для № a-d).
   a) Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$.
   b) Найти $(\vec{a}\wedge\vec{b})$.
   c) Найти $\vec{a}^2$.
   d) Найти $|\vec{b}|$.
2. Найти координаты векторов $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{f}=-3\vec{a}$.
3. Построить точки, заданные полярными координатами: *A* (2; π/2), *B* (3; π/4), *C* (3; 3π/4).

4. Даны точки в полярной системе координат *A* (2; π/4), *B* (4; π/2). Найти их прямоугольные координаты.

Вариант 2

1. Даны векторы $\vec{a}(-3;2;1)$ и $\vec{b}(3;0;4)$ (для № a-d).
   a) Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$.
   b) Найти $(\vec{a}\wedge\vec{b})$.
   c) Найти $\vec{a}^2$.
   d) Найти $|\vec{b}|$.
2. Найти координаты векторов $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{f}=-3\vec{a}$.
3. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки *A* (0; 0), *C* (-3; 4), *D* (-2; 2) *E* (10; -3). Определить расстояние между точками *C* и *D*, *A* и *D*, *D* и *E*.
4. Построить точки, заданные полярными координатами: *A* (4; 0), *B* (2; 3π/2), *C* (3; π).

Контрольные вопросы:

1. Запишите определение вектора
2. Запишите правило сложения и вычитания векторов

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №14

Название практической работы: ***Нахождение расстояния между двумя точками. Решение треугольников.***

Цель работы:Научиться находить расстояние между двумя точками

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

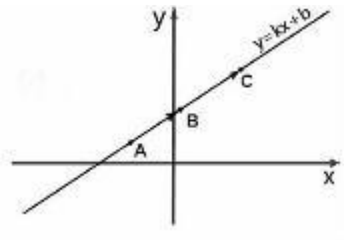
умения:

Вычислять значения геометрических величин

Теоретический материал:

Пусть на координатной плоскости построена прямая, проходящая через две заданные точки. Отметим на прямой произвольную точку С, её координаты (*x;y*). Обозначим два вектора:

$\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$



Известно, что у векторов, лежащих на параллельных прямых (либо на одной прямой), соответствующие координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} \quad \textbf{или} \quad \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} \qquad (1)$$

Отношения координат "x" и координат "y" таких векторов равны.
Теперь остаётся только вспомнить, что для определения координат вектора необходимо из соответствующих координат конца вектора вычесть координаты его начала:

у нас $A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2) \quad C(x; y)$

Значит координаты векторов имеют вид:

$$x_{\overrightarrow{AC}} = x - x_1 \qquad y_{\overrightarrow{AC}} = y - y_1$$

$$x_{\overrightarrow{AB}} = x_2 - x_1 \qquad y_{\overrightarrow{AB}} = y_2 - y_1$$

Подставляем в (1). Получаем формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель. На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ называется **угловым коэффициентом прямой**.

<u>Пример 1:</u> Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).
Решение. Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой *Ах + Ву + С = 0* привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad т.е. \quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется

уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С≠0, то, разделив на –С, получим:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$$ или $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$, где

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент а является координатой точки пересечения

прямой с осью *Ох,* а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью *Оу.*

<u>Пример 2</u>*:* Задано общее уравнение прямой *х – у + 1 = 0.* Найти уравнение этой прямой в отрезках.

С = 1, $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, а = -1, b = 1.

<u>Пример 3</u>*:* Дано общее уравнение прямой *12х – 5у – 65 = 0*. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

Уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

Уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, то острый угол между этими прямыми
будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$. Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Формулы координат середины отрезка

Задача деления отрезка на две равные части – это частный случай деления отрезка в данном отношении.

В этом случае отношение выражается пропорцией $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{1} = 1$. И общие формулы

$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda}$ чудесным образом преображаются в нечто знакомое и простое: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Удобным моментом является тот факт, что координаты концов отрезка можно безболезненно переставить: $x_M = \frac{x_B + x_A}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_A}{2}$

Для пространственного случая справедлива очевидная аналогия. Если даны концы отрезка $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B z_B)$, то координаты его середины M выражаются формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Пример 4

Параллелограмм $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(-4; 0), B(4; 4), C(7; 2), D(-1; -2)$. Найти точку пересечения его диагоналей.

Решение:

Желающие могут выполнить чертёж. Граффити особенно рекомендую тем, кто капитально забыл школьный курс геометрии.

По известному свойству, диагонали параллелограмма своей точкой пересечения $O(x_O; y_O)$ делятся пополам, поэтому задачу можно решить двумя способами.

Рассмотрим противоположные вершины $A(-4;0),\ C(7;2)$. По формулам деления отрезка пополам найдём середину диагонали AC: $x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-4+7}{2}=\frac{3}{2},\quad y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{0+2}{2}=1$

В результате: $O\left(\frac{3}{2};1\right)$

Задания:Выполните задания по вариантам

Вариант 1.

1. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки А (0; 0), В (3; -4), С (-3; 4). Определить расстояние между точками А и В, В и С, А и С.
2. Найти расстояние между точками А(-1, 3) и В(6,2).
3. Доказать, что треугольник с вершинами А(3; -1; 2), В(0; -2; 2), С(-3; 2; 1) равнобедренный.
4. Даны вершины А(2; -1; 4). В(3; 2; -6), С(-5; 0; 2) треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины А.
5. Даны вершины треугольника А(1; 1; -1), В(2; -1; 3), С(-4; 7; 5). Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине В

Вариант 2.

1. Найти расстояние между точками А(-1, 3, 3) и В(6, 2, -2).
2. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки А (0; 0), С (-3; 4), D (-2; 2) E (10; -3). Определить расстояние между точками C и D, A и D, D и E.
3. Доказать, что треугольник с вершинами А1(3; -1; 6), А2(-1; 7; -2), А3(1; -3; 2) прямоугольный.
4. Даны вершины М1(3; 2; -5), М2(1; -4; 3), М3(-3; 0; 1) треугольника. Найти середины его сторон.
5. Даны вершины треугольника А(1; -1; -3), В(2; 1; -2), С(-5; 2; -6). Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине А.

Контрольные вопросы:

1) Запишите уравнение прямой по двум точкам

2) Запишите определение медианы треугольника

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

Название практической работы: ***Решение прикладных задач с использованием комбинаторики***.

Цель работы:научиться решать задачи на подсчет числа комбинаций.

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Теоретическийматериал

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

*Правило суммы.*Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект В может быть выбран n способами, то выбрать либо А, либо В можно m + n способами.

*Правило произведения.*Если объект А можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то пара объектов (А, В) в указанном порядке может быть выбрана m·n способами.

*Перестановками*называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n=n!, \qquad \text{где } n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

Заметим, что удобно рассматривать 0!, полагая, по определению, 0! = 1.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

*Сочетаниями*называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 1.

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение.

Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6.$$

Пример 2.

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение.

Искомое число сигналов

$$A^2_6 = 6 * 5 = 30.$$

Пример3.

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение.

Искомое число способов

$$C^2_{10} = 10! / (2!\ 8!) = 45.$$

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A^m_n = P_m C^m_n.$$

Пример 4.

На родительском собрании присутствует 20 человек. Сколько существует различных вариантов состава родительского комитета, если в него должны войти 5 человек?

Решение:

В этом примере нас не интересует порядок фамилий в списке комитета. Если в результате в его составе окажутся одни и те же люди, то по смыслу для нас это один и тот же вариант. Поэтому мы можем воспользоваться формулой для подсчета числасочетанийиз 20 элементов по 5.

Иначе будут обстоять дела, если каждый член комитета изначально отвечает за определенное направление работы. Тогда при одном и том же списочном составе комитета, внутри него возможно 5! вариантовперестановок, которые имеют значение. Количество разных (и по составу, и по сфере ответственности) вариантов определяется в этом случае числом размещенийиз 20 элементов по 5.

З а м е ч а н и е.

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1элементов одного вида, n_2элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, ...) = n!/ (n_1!\ n_2!\ ...),\text{где } n_1+ n_2+ ... = n.$$

Размещениями с повторениями из *n* элементов по *m* называются *упорядоченные m*-элементные выборки, в которых элементы могут *повторяться*. *Число размещений с повторениями*вычисляется по формуле: $\tilde{A}_n^m = n^m$

***Пример 5*.**

Возьмем буквы***Б, А, Р***. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буквы могут повторяться?

Решение.

1. Получатся следующие наборы:***БА, БР, АР, АБ, РБ, РА***.

По формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

получаем: $A_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$ наборов.

2. Получатся наборы:***ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.***

По формуле $\tilde{A}_n^m = n^m$ получаем: $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$. наборов.

Число сочетаний с повторениями(*n*элементов, взятых по*m*, где элементы в наборе могут повторяться) вычисляется по формуле: $\tilde{C}_n^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$

***Пример 6*.**

В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

Решение.

Обозначая булки белого и черного хлеба буквами Б и Ч, составим несколько выборок: ББББББ, ББЧЧББ, ЧЧЧЧЧБ, ... Состав меняется от выборки к выборке, порядок элементов несущественен, значит это - сочетания с повторениями из 2 по 6.

По формуле $\tilde{C}_n^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$ получаем $\tilde{C}_2^6 = C_{2+6-1}^6 = C_7^6 = C_7^1 = 7$ способов.

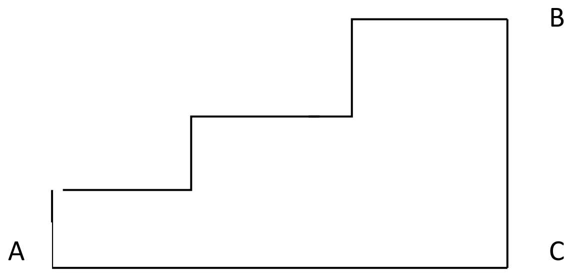
Сделаем проверку и выпишем все варианты покупки: ББББББ, БББББЧ, ББББЧЧ, БББЧЧЧ, ББЧЧЧЧ, БЧЧЧЧЧ, ЧЧЧЧЧЧ. Их действительно 7.

Пример 7.

Строительство лестницы.

Решение.

Строится лестница, ведущая из точки А в точку В(см. рис.).



Расстояние АС равно 4,5 м, а расстояние СВ — 1,5 м. Высота каждой ступеньки равна 30 см, а ее ширина должна быть целым кратным 50 см Сколькими способами
можно построить лестницу?

Из условия задачи видно, что лестница должна иметь 5 ступенек и состоять из 9 «блоков» длиной 50 см. Поэтому ступеньки можно строить в 10 местах. Таким образом, надо из 10 мест выбрать 5, и это можно сделать C^2_{10}= 252 способами.

Задания:Выполните задания по вариантам

Вариант 1

1. Сколько двухзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,8,9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?
2. Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно?
3. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?
4. Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать?

Вариант 2

1. Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?
2. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов?
3. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.
4. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

Контрольные вопросы:

1) Назовите виды комбинаций
2) Назовите основные правила комбинаторики

Схема определения вида комбинации

ПРАКТИЧЕСКАЯРАБОТА № 16

Название практической работы:*Решение профессиональных задач на вычисление вероятно-стей с использованием элементов математической статистики*

Цель работы:Научиться решать задачи с использованием элементов математической статистики.

знания:

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

умения:

Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Теоретический материал:

1. Случайные величины

Случайная величина — это величина, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно — заранее неизвестно).

Дискретная случайная величина — это случайная величина, когда принимает отдельное изолированное, счетное множество значений.

Непрерывная случайная величина — это случайная величина, принимающая любые значения из некоторого интервала. Понятие непрерывной случайной величины возникает при измерениях.

Случайные величины обозначаются конечными заглавными буквами латинского алфавита *X, У, Z* , а их значения — соответствующими строчными буквами *x, y, z*.

2.Закон распределения случайной величины

Это всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

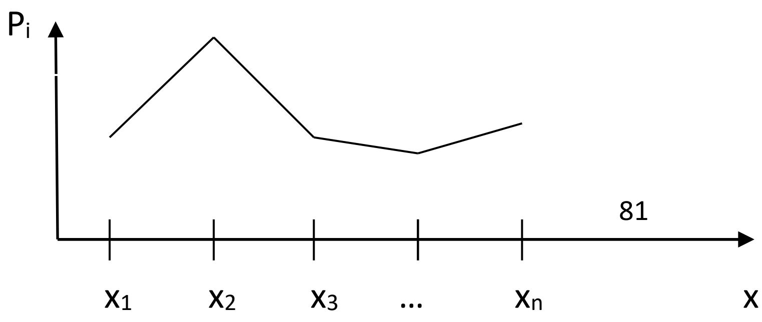
Для *дискретной* случайной величины закон распределения может быть задан в виде *таблицы,* аналитически (в виде *формулы) и графически.*

Таблица — это простейшая форма задания закона распределения. В ней перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины X и соответствующие вероятности. Эта таблица называется *рядом распределения.*

x_1	x_2	…	x_n
p_1	p_2	…	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} pi = 1$$

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат — соответствующие их вероятности. Соединение образует ломаную линию. Это многоугольник или полигон распределения вероятностей.



Полигон распределения вероятностей

Пример 1

Задают ли законы распределения дискретной случайнойвеличины следующие таблицы?

А)

x_i	1	2	3	4
P_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Б)

x_i	1	2	3	4
P_i	0,1	0,2	0,3	0,5

Решение

А) Да, так как выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} pi = 1$: 0,1+0,4+0,3+0,2=1

Б) Нет: 0,1+0,2+0,3+0,5 $\neq$ 1.

Пример 2

В денежной лотереи выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 рублю. Найти закон распределения случайной величины *X* — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

*Решение: в*озможные значения X:

x_i	50	1	0
p_i	0,01	0,1	0,89

$P_1 = \frac{1}{100}$;

$P_2 = \frac{10}{100}$; $P_3 = 1 - (P_2 + P_1)$

Контроль: 0,01 + 0,1 + 0,89 = 1

Пример 3

Вероятность того, что студент сдаст семестровый экзамен по биофизике равна 0,7, а по биохимии — 0,9. Составьте закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент. Построить многоугольник распределения вероятностей.

Решение

Возможные значения *X* — число сданных экзаменов: 0,1,2.

Считаем вероятности:

$P(X=0) = P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}) = (1 – 0,7)\cdot(1 – 0,9) = 0,3\cdot 0,1 = 0,03$

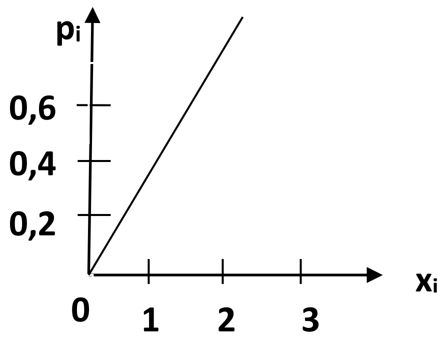
$P(X=1) = P(A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2) = P(A_1)\cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2) = 0,7\cdot 0,1 + 0,3\cdot 0,9 = 0,34$

$P(X=0) = P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) = (1 – 0,7)\cdot(1 – 0,9) = 0,7\cdot 0,9 = 0,63.$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

Контроль: 0,03 + 0,34 + 0,63 = 1.



Многоугольник распределения вероятностей

3.Функция распределения случайных величин

Функция *F(x),* выражающая для каждого *x* вероятность того, что случайная величина *X*примет значение меньше некоторого фиксированного *x, называется функцией распределения* случайной величины *X: P(x) = P(X< x).* Ее также называют *интегральной функцией распределения* дискретных и непрерывных случайных величин.

<u>Пример 4</u>

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Дан ряд распределения случайных величины:

Найти и изобразить график ее функции распределения.

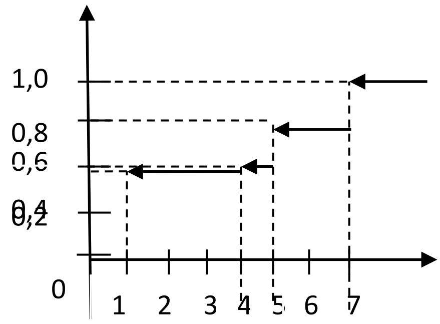
Решение

Будем задавать различные значения x_iи находить для F(x):

1. Если $x \le 1$, F(x) = 0
2. Пусть $1< x \le 4$, (например, x = 2), F(x) = P(x = 1) = 0,4.
3. Пусть $4< x \le 5$, (например, x = 4,25),

F(x) = P(X < x) = P(x=1) + P(x=4) = 0,5 + 0,4 = 0,5

4. Пусть $5< x \le 7$, F(x) =(P(x=1)) + P(x=4) + P(x=5) = 0,5 + 0,3 = 0,8.
5. Пусть x>7



Функция распределения дискретной случайности величин

$F(x) = (P(x=1) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=7) = 0,8 + 0,2 =1$

Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

4. Числовые характеристики дискретной случайной величины

1. *Математическим ожиданием* M(X); дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее значений не соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} xipi$$

Пример 5

Известны значения распределения случайных величин X и Y — число очков выбиваемых первым и вторым стрелками.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Необходимо выявить, какой из двух стрелков стреляет лучше. Построить многоугольники распределения.

Решение:

Очевидно, что из двух стрелков лучше стреляет тот, кто в среднем выбивает большее количество очков.

$M(X) = 0\cdot0,15 + 1\cdot0,10 + 2\cdot0,04 + \ldots + 9\cdot0,12 + 10\cdot0,2 = 5,36$

$M(Y) = 0\cdot0,01 + 1\cdot0,03\cdot0,05 + \ldots +9\cdot0,04 + 10\cdot0,02 = 5,36$

То есть среднее число выбиваемых очков у двух стрелков одинаково.

Пример 6

Случайная величина X задана законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

Решение: $M(X) = 1\cdot0,3 + 2\cdot0,5 + 5\cdot0,2 = 2,3$

2. *Дисперсия* дискретнойслучайности величины. Слово «дисперсия» означает «рассеяние»:

$$D(X) = M(X – M(X))^2.$$

*Дисперсией D(x)*случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания.

Среднее квадратическое отклонение σ (стандартное отклонение или стандарт) случайной величины *X* — это арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Пример 7.

В задаче 1 о стрелках вычислить дисперсию числа выбитых очков для каждого стрелка.

Решение:

Очевидно, что лучше стрелял тот стрелок, у которого при равенстве средних значений числа выбитых очков меньше отклонение этого числа относительно среднего значения (дисперсия).

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \ldots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}2 = 13{,}6$$

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \ldots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17$$

Ответ: Дисперсия меньше у второго стрелка.

Пример 8

В задаче 2 вычислить дисперсию.

Решение:

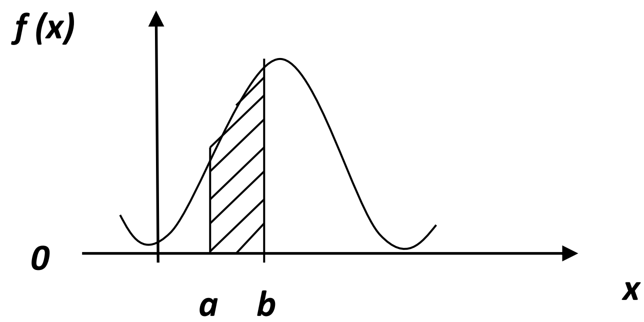
$$D(x) = (1 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + (2 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}5 + (5 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}2 = 2{,}01$$

5. Плотность вероятности непрерывных случайных величин

Плотностью вероятности, или плотностью распределения f(x) непрерывной случайной величины X, называется производная ее функции распределения:

$$f(x) = F'(x)$$

Ее *также называют дифференциальной* функцией распределения.



Свойство плотности вероятности:

1. Неотрицательная функция f(x) > 0 .

2. Площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

3. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал [a, b]равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от a до b.

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)d$$

Геометрическая интерпретация:

Полученная вероятность равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения и опирающейся наотрезок [a, b].

Непрерывная случайная величина описывается следующими числовыми характеристиками:

1. Математическое ожидание: M(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

2. Дисперсия D(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x)dx$

Или D(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (\mathrm{M(x)})^2$

6.Нормальный закон распределения

Этот закон наиболее часто встречается на практике. Он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения. Нормальное распределение является одним из самых важных распределений в статистике. Обычно всё сравнивают с нормальным законом распределения.

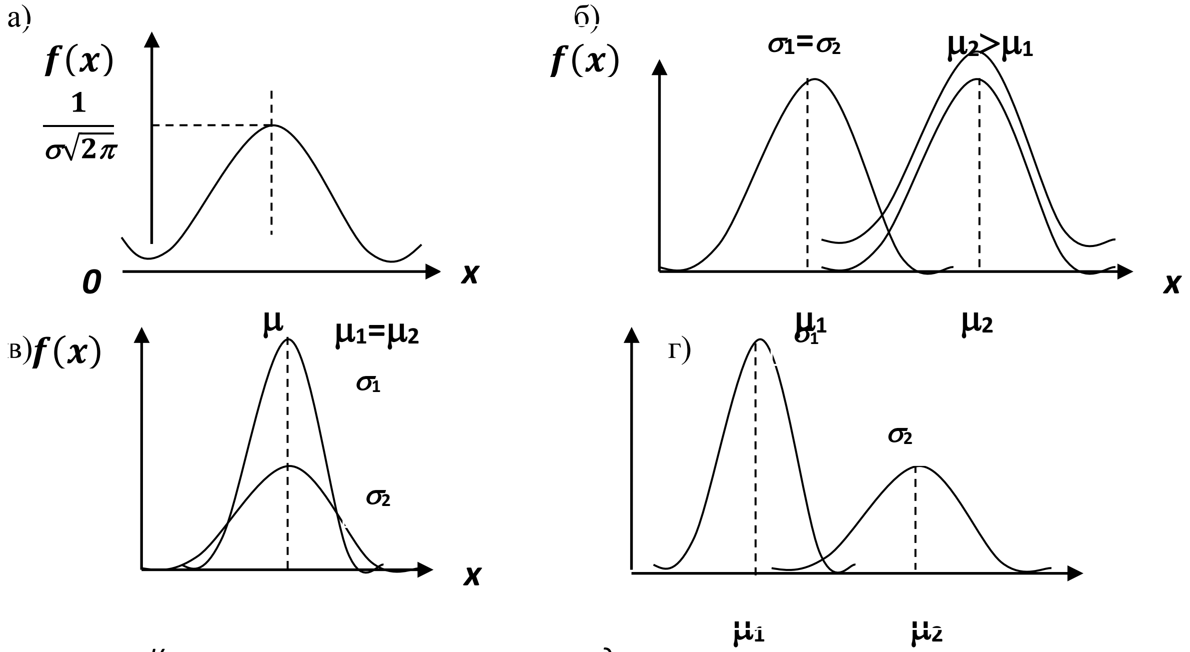
Непрерывная случайная величина *X*имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами μ и σ^2, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$$

Свойства плотности распределения вероятностей:

- Она колокообразная («колокол Гаусса»), иначе унимодальная.
- Плотность определяется двумя параметрами: математическим ожиданием (μ) и средним квадратическим отклонением (σ).
- Симметричная относительно среднего.
- Среднее и медиана нормального распределения равны.
- Кривая сдвигается вправо, если среднее увеличивается при постоянном квадратическом отклонении (рис. б), и сдвигается влево, если среднее уменьшается.
- Кривая расширяется, если среднее квадратическоеотклонение а увеличивается (если среднее постоянно).

➢ Кривая становится более остроконечной с меньшей шириной основания колокола, если a уменьшается при среднем постоянном (площадь под графиком всегда равна 1)(рис. в).



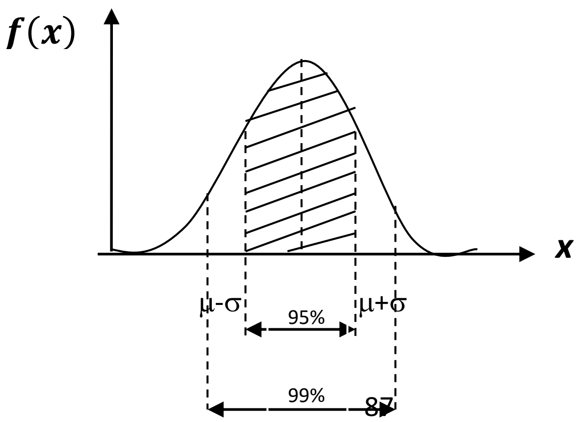
Кривая нормального закона распределения и ее изменения при изменении параметров

Дополнительные свойства:

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина *x* со средним μ и средним квадратическим отклонением σ (стандартное отклонение) находится между (μ - σ) и (μ + σ), равна 0,68, т.е. 68% случайной величины *x* отличается от среднего не более чем на одно стандартное отклонение ± σ.

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина *x* находится между (μ - 2σ) и (μ + 2σ), равна 0,95, т.е. примерно 95% случайной величины *x* отличается от среднего на два стандартных отклонения ±2σ.

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина *x* находится между (μ - 3σ) и *(μ*+ 3σ), равна 0,99, т.е. 99% (практически достоверно). Это свойство носит название правило трех сигм.



Правило трех сигм

Задание:Выполните действия по ходу работы

1. Дискретная случайная величина *X*имеет закон распределения.

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1
p_i	0,1	0,2	0,4	P_4	0,1

Чему равна вероятность $P_4(X = 0,8)$? Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2. Дискретная случайная величина *X*имеет закон распределения.

x_i	3	4	5	6	7
p_i	P_1	0,15	P_3	0,25	0,35

Найти вероятность $P_1(x = 3)$ и $P_3(x = 5)$, если известно, что P_3в 4 раза больше P_1. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Контрольные вопросы:

3. Какая величина называется случайной?
4. Закон распределения случайных величин
5. Что называется плотностью вероятности

Критерии оценивания практических работ

- оценка «отлично» выставляется обучающемуся за работу, выполненную безошибочно, в полном объеме с учетом рациональности выбранных решений;
- оценка «хорошо» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в полном объеме с недочетами;
- оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (не менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы);
- оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы).

Список литературы

Основная литература:

1. Пехлецкий И.Д. Математика [Текст] : учеб.пособие для студ. Учреждений сред. проф. образования /И.Д. Пехлецкий. - 12-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2017 . - 320с.

Дополнительная литература

1. Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. Учреждений сред.проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 2-е изд., стер. – М: Издательский центр «Академия», 2018. – 368 с.

Интернет-ресурсы:

1. www.ru.Wikipedia.org
2. www.ru.matformula.ru
3. www.reshebnik.ru
4. www.exponenta.ru

Приложение А

Некоторые сведения из элементарной математики

Алгебра

Законы действий над числами

Переместительный закон сложения: $a + b = b + a$.
Сочетательный закон сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Переместительный закон умножения: $ab = ba$.
Сочетательный закон умножения: $(ab)c = a(bc)$.
Распределительный закон умножения относительно сложения: $(a + b)c = ac + bc$.
Распределительный закон умножения относительно вычитания: $(a - b)c = ac - bc$.

Дробные выражения

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},\ b \neq 0,\ c \neq 0.$
Действия с дробями (предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля):

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b},$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Степени и корни

Степень с целым показателем

$$a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ раз},\ n \in N,\ n \neq 1),$$

$$a^1 = a,\ a^0 = 1 \quad (a \neq 0), \quad a^{-n} = 1/a^n \quad (a \neq 0).$$

Свойства:

$$a^m a^n = a^{m+n},\ \ a^m / a^n = a^{m-n},\ \ (a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n,\ \ (a/b)^n = a^n / b^n.$$

Корень n-й степени

$\sqrt[n]{a}$ - арифметический корень n-й степени из числа $a,\ \ a \geq 0,\ \ \sqrt[n]{a} \geq 0,\ \ n \in N,\ \ n > 1.$
Свойства:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} \quad (b > 0), \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

В частности, $\sqrt{a}$ - арифметический квадратный корень: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \quad \sqrt{a^2} = |a|$

Степень с дробным (рациональным) показателем

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \quad m \in Z,\ \ n \in N,\ \ n \geq 2,\ \ a > 0.$$

Свойства степени с действительным показателем

$$(a > 0,\quad b > 0,\quad x \in R,\quad y \in R)$$

$$a^x a^y = a^{x+y},\quad (a^x)^y = a^{xy},\quad (ab)^x = a^x b^x,$$

$$(a/b)^n = a^x/b^x,\quad a^x = b^{x\log_b a},$$

$$a^x = e^{x\ln a} = \exp(x\ln a),\quad a^x = 10^{x\lg a}.$$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия - числовая последовательность $(a_n),$ определяемая условиями: 1) $a_1 = a;$ 2) $a_{n+1} = a_n + d,\quad n = 1, 2, \ldots$ (d - разность арифметической прогрессии).

Свойства арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1},\quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

Формула n-го члена: $a_n = a_1 + d(n-1).$

Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},\quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия - числовая последовательность $(b_n),$ определяемая условиями: 1) $b_1 = b\quad (b \neq 0);$ 2) $b_{n+1} = b_n q\quad (q \neq 0),$ $n = 1, 2, \ldots$ (q - знаменатель геометрической прогрессии).

Свойства геометрической прогрессии:

$$b_{n+1}/b_n = b_{n+2}/b_{n+1},\quad b_{n+1}^2 = b_n b_{n+2}.$$

Формула n-го члена: $b_n = b_1 q^{n-1}.$

Формулы суммы n первых членов $(q \neq 1)$:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1},\quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$b + bq + bq^2 + \ldots = b/(1-q),\quad |q| < 1.$$

Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2),$$
$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4),$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4),$$
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$
$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}),$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$
$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc,$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd,$$
$$(a+b-c-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd,$$
$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2+bx+c,$$
где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Свойства числовых неравенств

1) Если $a < b$, то при любом c: $a + c < b + c$.
2) Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac<bc$.
3) Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac>bc$.
4) Если $a < b$, a и b одного знака, то $1/a > 1/b$.
5) Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c< b + d$, $a - d < b - c$.
6) Если $a < b$, $c < d$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то $ac < bd$.
7) Если $a < b$, $a > 0$, $b > 0$, то $a^2<b^2,\quad a^n<b^n\quad (n\in N)$.
8) Если $|a|<|b|$, то $a^2<b^2$.

Логарифмы

$\log_a b\quad (a>0,\quad a\neq 1,\quad b>0)$ - логарифм числа b по основанию a.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b}=b.$

$\lg b$ - десятичный логарифм (логарифм по основанию 10): $10^{\lg b}=b.$

$\ln b$ - натуральный логарифм (логарифм по основанию e): $e^{\ln b}=b.$

Переход от одного основания к другому:
$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

В частности, $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}=\dfrac{\lg b}{\lg a}=\dfrac{\ln b}{\ln a},\ \ln b=\dfrac{\lg b}{\lg e}=\dfrac{\lg b}{M}$ ($M=\lg e=\dfrac{1}{\ln 10}\approx 0{,}4343$ - модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным).

Свойства логарифмов (u, $v>0$):
$$\log_a a=1,\quad \log_a 1=0,\quad \log_a(uv)=\log_a u+\log_a v,$$

$$\log_c \frac{1}{v} = -\log_c v, \quad \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v,$$
$$\log_a u^\alpha = \alpha \log_a u, \quad \log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\log_a u, \quad n \in N, \quad n \neq 1.$$

Тригонометрические формулы

Тригонометрические функции

$$\sin\alpha, \quad \cos\alpha,$$
$$tg\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha, \quad \alpha \neq \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z,$$
$$ctg\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z,$$
$$\sec\alpha = 1/\cos\alpha, \quad \alpha \neq \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z,$$
$$\operatorname{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Знаки тригонометрических функций

Четверть	Величина угла	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
I	$0 < \alpha < \pi/2$	+	+	+	+
II	$\pi/2 < \alpha < \pi$	+	–	–	–
III	$\pi < \alpha < 3\pi/2$	–	–	+	+
IV	$3\pi/2 < \alpha < 2\pi$	–	+	–	–

Формулы приведения

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$tg\beta$	$ctg\beta$
$\pi/2+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$3\pi/2+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi/2-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$3\pi/2-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1, \quad \alpha \neq \pi n/2, \quad n \in Z,$$
$$1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha, \quad \alpha \neq \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z,$$
$$1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2\alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Выражение тригонометрических функций через одну из них того же аргумента

(выбор знака перед корнем зависит от того, в какой четверти находится угол α)

Через $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \quad ctg\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Через $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},$$
$$tg\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Через $tg\alpha$:

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha},$$
$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Через $ctg\alpha$:

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha},$$
$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}.$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}, \; tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$$

(в последних двух формулах $\alpha \neq \pi/2 + \pi n, \quad \beta \neq \pi/2 + \pi n$ и соответственно $\alpha+\beta \neq \pi/2 + \pi n, \quad \alpha-\beta \neq \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z$);

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta - 1}{ctg\beta + ctg\alpha}, \; ctg(\alpha-\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta + 1}{ctg\beta - ctg\alpha}$$

(в последних двух формулах $\alpha \neq \pi n, \quad \beta \neq \pi n$ и соответственно $\alpha+\beta \neq \pi n, \quad \alpha-\beta \neq \pi n, \quad n \in Z$).

Преобразование суммы тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$
$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$
$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in Z,$$

$$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in Z,$$

$$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi_0),$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Тригонометрические функции двойного и тройного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}, \quad tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}.$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

(выбор знака зависит от того, в какой четверти находится угол $\alpha/2$)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Выражение тригонометрической функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)}, \quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)},$$

$$tg\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1-tg^2(\alpha/2)}, \quad ctg\alpha = \frac{1-tg^2(\alpha/2)}{2tg(\alpha/2)}.$$

Числовые функции

Основные понятия

Область определения (множество задания) функции *f*: $X \to R$: *X* = *D* (*f*).

Множество значений функции *f*: $E(f) = \{f(x) | x \in X\} = f(X)$

График функции: $\Gamma_f = \{(x, y) \in R^2 | x \in X, y = f(x)\}$

Четная функция: $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = f(x)$

Нечетная функция: $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = -f(x)$

Периодическая функция (периода ω): $\forall x \in X \Rightarrow x+\omega \in X,\ x-\omega \in X$

и $f(x+\omega) = f(x)$.

Монотонные функции

Функция *f* строго возрастает (возрастает) на множестве *X*:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Функция *f* возрастает (не убывает) на множестве *X*:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

Функция *f* строго убывает (убывает) на множестве *X*:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Функция *f* убывает (не возрастает) на множестве *X*:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

тепенная функция $y = x^{\alpha},\ \alpha \in R$

1. $\alpha = 2n,\ n \in N$:

$$y = x^{2n},\ D(f) = R,\ E(f) = [0,\ +\infty\ [.$$

Функция четная, строго убывает на $]-\infty;\ 0]$ и строго возрастает на $[0;\ +\infty\ [$ (рис. 2.1).

2. $\alpha = 2n-1,\ n \in N$:

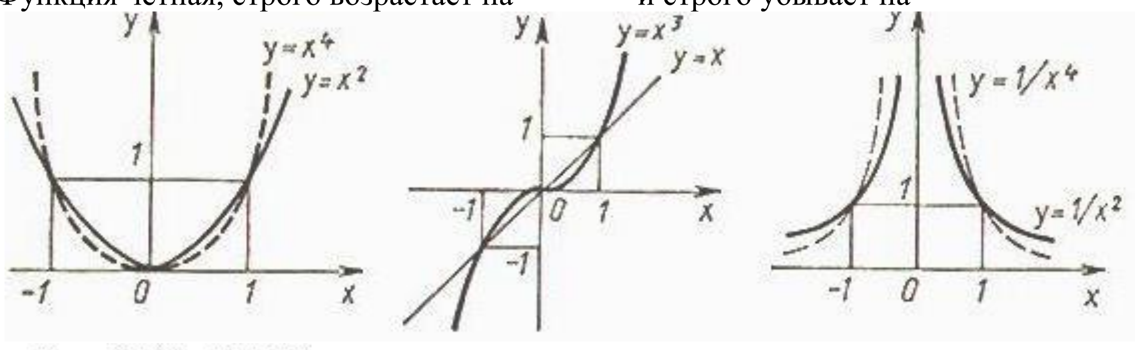
$$y = x^{2n-1},\ D(f) = R,\ E(f) = R.$$

Функция нечетная, строго возрастает (рис. 2.2).

3. $\alpha = -2n,\ n \in N$:

$$y = \frac{1}{x^{2n}},\ D(f) = R \setminus \{0\},\ E(f) =]\ 0;\ +\infty\ [.$$

Функция четная, строго возрастает на $]-\infty; 0[$ и строго убывает на $]0;+\infty[$



4. $\alpha = -2n+1,\ n \in N$:

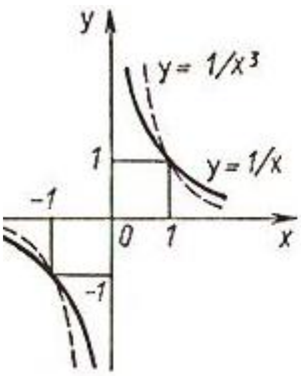
$$y = \frac{1}{x^{2n-1}},\ D(f) = R \setminus \{0\},\ E(f) = R \setminus \{0\}.$$

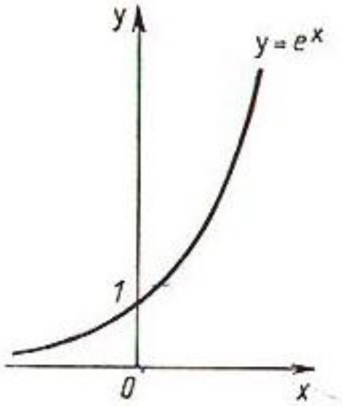
Функция нечетная, строго убывает на $]-\infty; 0[$ и $]0;+\infty[$ (рис. 2.4).

5. $\alpha \notin Z$:

$$y = x^{\alpha},\ D(f) =]\ 0;\ +\infty\ [,\ E(f) =]\ 0;\ +\infty\ [.$$

При некоторых α *D(f)* и *E(f)* могут быть шире.





Экспонента

$$y = e^x = \exp(x),\ \ D(f) = R,\ \ E(f) = \left]\, 0;\ +\infty \right[.$$

Функция строго возрастает.

Показательная функция (рис. 2.6)

$$y = a^x = e^{x\ln a},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1;$$
$$D(f) = R,\ \ E(f) = \left]\, 0;\ +\infty \right[.$$

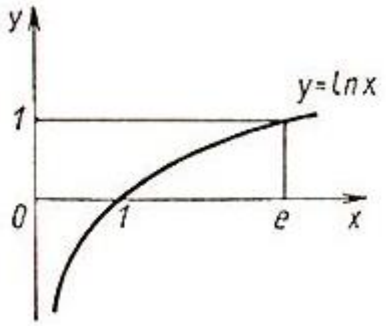
При *0 < a < 1* функция строго убывает, при *a > 1* строго возрастает.

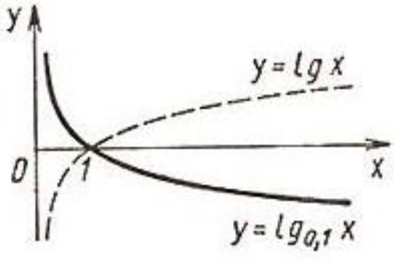
Логарифмическая функция

Логарифм натуральный

$$y = \ln x,\ \ D(f) = \left]\, 0;\ +\infty \right[,\ \ \ E(f) = R.$$

Функция строго возрастает.





Логарифм с основанием *a*

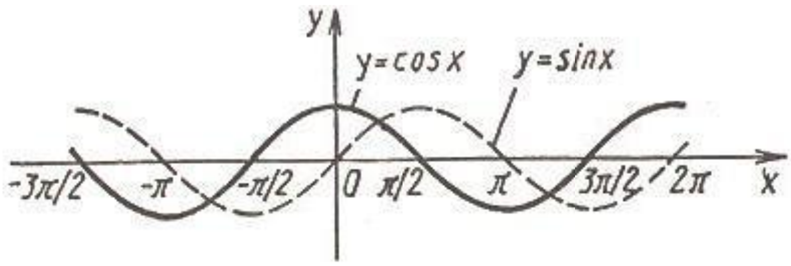
$$y = \log_a x,\ \ \ a > 0,\ \ \ a \neq 1,$$
$$D(f) = \left]\, 0;\ +\infty \right[,\ \ \ E(f) = R.$$

При *0 < a < 1* ф. строго убывает, при *a > 1* строго возрастает.

Тригонометрические функции

1. $y = \sin x$ (рис. 2.9):

$$D(f) = R,\ \ E(f) = \left]\, -1;\ 1 \,\right[.$$



Р и с. 2.9

Функция нечетная. Период $\omega = 2\pi.$ На каждом из промежутков $\left[-\pi/2+2\pi k;\ \pi/2+2\pi k\ \right],\ k \in Z,$ ф. строго возрастает, на $\left[\pi/2+2\pi k;\ 3\pi/2+2\pi k\ \right],\ k \in Z,$ строго убывает.

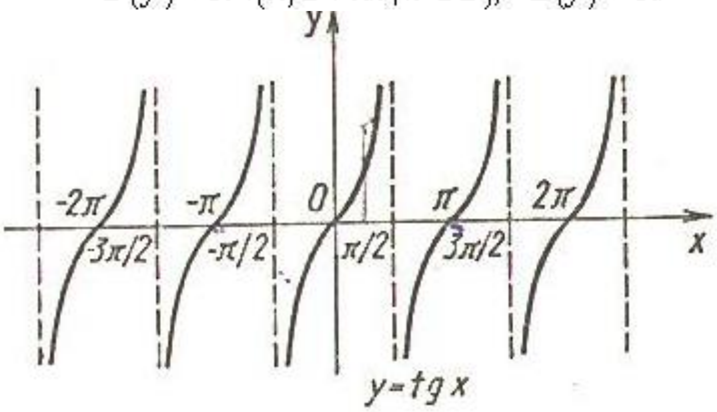
2. $y = \cos x$ (рис. 2.9):

$$D(f) = R,\ E(f) = \left]-1;\ 1\right[.$$

Функция четная. Период $\omega = 2\pi.$ На каждом из промежутков $\left[2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right],\ k \in Z,$ ф. строго убывает, на $\left[\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k\right],\ k \in Z,$ строго возрастает.

3. $y = tgx$ (рис. 2.10):

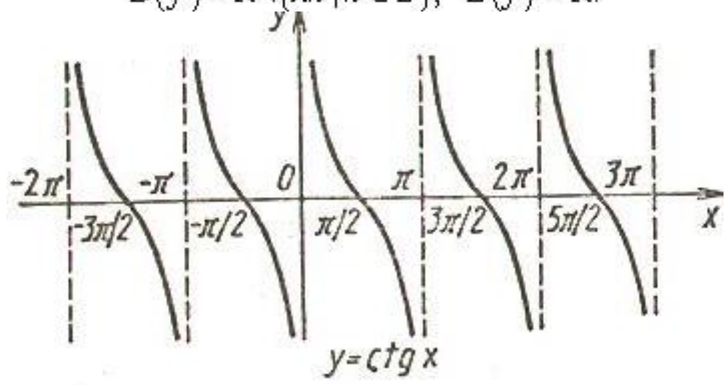
$$D(f) = R \setminus \{\pi/2 + \pi k \mid k \in Z\},\quad E(f) = R.$$



Функция нечетная. Период $\omega = \pi.$ Функция строго возрастает на каждом из промежутков $\left]-\pi/2+\pi k;\ \pi/2+\pi k\right[,\ k \in Z.$

4. $y = ctgx$ (рис. 2.11):

$$D(f) = R \setminus \{\pi k \mid k \in Z\},\quad E(f) = R.$$



Функция нечетная. Период $\omega = \pi$. Функция строго убывает на каждом из промежутков $[\pi k;\ \pi + \pi k],\ k \in Z$.

Обратные тригонометрические функции

1. $y = \arcsin x$ (рис. 2.12):

$$D(f) = [-1;\ 1],\quad E(f) = [-\pi/2;\ \pi/2].$$

Функция нечетная, строго возрастает.

$$\arcsin 0 = 0,\quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},\quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},\ \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. $y = \arccos x$ (рис. 2.13):

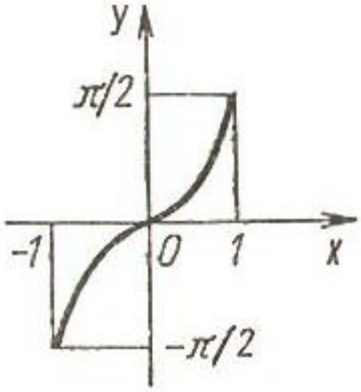
$$D(f) = [-1;\ 1],\quad E(f) = [0,\ \pi]$$

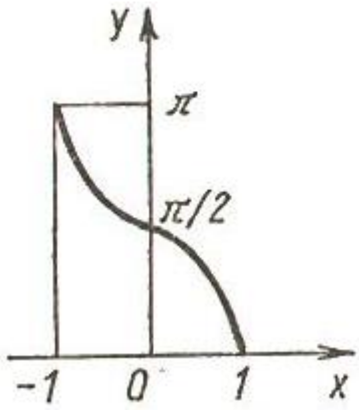
Функция строго убывает

$$\arccos(-1) = \pi,\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6},\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},\quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2},\quad \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},\quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},\quad \arccos 1 = 0.$$





Пределы

Свойства пределов

1. Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\left(\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0\right).$$

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ и $a_n\le b_n\quad \forall n,$ то $a\le b.$

3. Если $a_n\le c_n\le b_n\quad \forall n,$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a.$

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|.$

Некоторые пределы

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e,\quad \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{shx}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{chx-1}{x^2}=\frac{1}{2},:::\ \lim_{x\to0}\frac{thx}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \lim_{x\to+0}x^\alpha\ln x=0\quad(\alpha>0),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\alpha}=0\quad(\alpha>0),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0,\quad \lim_{x\to+0}x^x=1.$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q|<1), \quad \lim_{n\to\infty} nq^n = 0 \quad (|q|<1),$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(n^\alpha/a^n\right) = 0 \quad (|a|>1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^n/n!\right)^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(\ln n/n) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln^q n/n^\alpha\right) = 0 \quad (\alpha>0), \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a>0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1/\sqrt[n]{n!}\right) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(n/\sqrt[n]{n!}\right) = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_n}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \quad (b_0 \neq 0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 3\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \quad (\textit{формула} \quad \textit{Валлиса}),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1,$$

Производные и дифференциалы

Определение производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Односторонние производные

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция, дифференцируемая в точке *x_0*

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + o(\Delta x)$$ при $\Delta x \to 0$

$$A = f'(x_0).$$

Дифференциал

$$dy = f'(x)dx, \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференцирование арифметических комбинаций

(u, v, w - дифференцируемые функции, $\alpha, \ \beta$ - постоянные

$$(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v', \quad d(\alpha u + \beta v) = \alpha du + \beta dv,$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad d(uv) = udv + vdu,$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw',$$

$$d(uvw) = vwdu + uwdv + vudw,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0), \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}(v \neq 0), \quad d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{dv}{v^2}.$$

Производные основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$\ln x$	$1/x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$
x^2	$2x$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$	$\sin x$	$\cos x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x	$\mathrm{tg}\, x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{th}\, x$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$	$\mathrm{cth}\, x$	$-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x\rvert>1$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$1(x)$	$\delta(x)$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$		

Производная степенно-показательной функции

$$\left(u^v\right)' = \left(e^{v\ln u}\right)' = v u^{v-1} u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Производные высших порядков некоторых функций

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
c	0
x^{α}	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\,(0!=1)$
e^{x}	e^{x}
a^{x}	$a^{x}\ln^{n} a$
$\sin x$	$\sin(x+\pi n/2)$
$\cos x$	$\cos(x+\pi n/2)$
$\operatorname{sh} x$	$\begin{cases} shx & при \quad n=2k, \\ chx & при \quad n=2k-1 \end{cases}$
$\operatorname{ch} x$	$\begin{cases} chx & при \quad n=2k, \\ shx & при \quad n=2k-1 \end{cases}$
$y=\operatorname{arctg} x$	$y^{(n)}=(n-1)!\cos^{n} y \sin n(y+\pi/2)$

Локальный экстремум дифференцируемой функции

Необходимое условие локального экстремума

Если x_0 - точка локального экстремума функции f, то $f'(x_0)=0.$

Достаточные условия локального экстремума

I Правило. Пусть $f'(x_0)=0.$

Если f' при переходе через точку x_0 меняет знак с "+" на "-", то x_0 - точка локального максимума.

Если f' при переходе через точку x_0 меняет знак с "-" на "+", то x_0 - точка локального минимума.

Если f' при переходе через точку x_0 не меняет знака, то точка x_0 не является точкой локального экстремума.

II Правило. Пусть f дважды дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)\neq 0.$

Если $f''(x_0)<0,$ то x_0 - точка локального максимума.

Если $f''(x_0)>0,$ то x_0 - точка локального минимума.

III Правило. Пусть f n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$

Если n - четное и $f^{(n)}(x_0)<0,$ то x_0 - точка локального максимума.

Если n - четное и $f^{(n)}(x_0)>0,$ то x_0 - точка локального минимума.

Если n - нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Точки перегиба

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную. Если при переходе через точку x_0 функция f меняет направление выпуклости, то x_0 называют точкой перегиба функции f, а точку (x_0; $f(x_0)$) - точкой перегиба графика функции f. График функции переходит с одной стороны касательной, проведенной в точке (x_0; $f(x_0)$), на другую сторону. Точки перегиба f - точки экстремума для f'.

Необходимые условия наличия перегиба

$f''(x_0)=0$ либо $f''(x_0)$ не существует.

Достаточные условия наличия перегиба

1. Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 - точка перегиба.
2. Если $f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0,$ то при n четном x_0 - точка перегиба, при n нечетном x_0 не является точкой перегиб

Неопределенный интеграл

Первообразная

Первообразной функции f на промежутке I называется функция F, такая, что $F'(x)=f(x)\quad \forall x\in I.$

Неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где F - первообразная функции f (на промежутке); C - произвольная постоянная.

Основные свойства

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x),\quad d\int f(x)dx=f(x)dx.$
2. $\int F'(x)dx=F(x)+C,\quad \int dF(x)=F(x)+C.$
3. Если $\int f(x)dx=F(x)+C,$ то

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,\quad a\neq 0.$$

4. $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx,\quad \alpha^2+\beta^2\neq 0.$

Замена переменных в неопределенном интеграле

1. $\int f(u(x))u'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C=F(u(x))+C.$
2. Если $x=\varphi(t),\ \varphi'(t)\neq 0,\ F$ - первообразная для $(g\circ\varphi)\varphi',$ то

$$\int g(x)dx=\int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C=F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C.$$

Формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv-\int v du,$$

(u, v - дифференцируемые функции).

Простейшие интегралы

$$\int 0\cdot dx=C,\quad \int 1\cdot dx=\int dx=x+C,$$

$$\int x dx=\frac{x^2}{2}+C,\quad \int x^2 dx=\frac{x^3}{3}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,\quad \int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}+C,\quad \int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq-1,$$

$$\int\frac{dx}{x^{\beta}}=\frac{1}{-\beta+1}\frac{1}{x^{\beta-1}}+C,\quad \beta\neq1,\quad \int\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C,\quad a\neq0,$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\quad a\neq0,$$

$$\int\frac{xdx}{x^2+\alpha}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\alpha\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin\,x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\,\frac{x}{a}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C,\quad \int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C,$$

Элементы комбинаторики, формула Ньютона

Перестановки. Размещения. Сочетания.

Число перестановок из n элементов:

$$P_n=1\cdot2\cdot3\cdots n=n!.$$

Число размещений из n по $m(n\geq m)$:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}\quad (0!=1,\quad 1!=1,)$$

$$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1),\quad A_n^0=1,$$

$$A_n^{m+1}=(n-m)A_n^m,$$

$$A_n^n=P_n=n!,\quad A_n^{n-1}=A_n^n=n!.$$

Число сочетаний из *n* по $m(n \ge m)$:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}.$$

Свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m},\ \ 0 \le m \le n,\ \ C_n^0 = C_n^n = 1,$$
$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Рекурентная формула для числа сочетаний:

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1},\ \ 0 \le m \le n.$$

Формула бинома Ньютона

$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$
$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^ma^{n-m}b^m + \ldots + C_n^nb^n,\ \ n \in N.$$

Если *k*-й член ((*k+1*)-е слагаемое) разложения степени бинома обозначать через T_k, то

$$T_k = C_n^ka^{n-k}b^k.$$

Треугольник Паскаля

0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

(*n*-я строка состоит из чисел $C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots, C_n^n$).

Возведение многочлена в степень

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc,$$
$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc,$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c +$$
$$+ c^2a + c^2b) + 6abc,$$
$$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3a +$$
$$+ b^3c + c^3a + c^3b) + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) +$$
$$+ 12(a^2bc + b^2ac + c^2ab),$$