Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ

для студентов специальности

08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Челябинск, 2020

АКТ СОГЛАСОВАНИЯ

на методические рекомендации по организации практической работы по учебной дисциплине «Математика» для студентов специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (актуал. ФГОС), разработанные преподавателем Южно-Уральского государственного технического колледжа Макаренко О.И.

Представленные на согласование методические рекомендации по организации практической работы спланированы в соответствии с программой учебной дисциплины «Математика» для специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (актуал. ФГОС).

Методические рекомендации имеют четкую структуру: содержат тематический план, в котором представлены виды заданий по каждой теме, целевую установку и подробные указания по выполнению заданий.

Задания, представленные в методических рекомендациях разнообразны, направлены на систематизацию, закрепление и углубление теоретических знаний и практических умений обучающихся, а также на формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, совершенствованию и самоорганизации, развитие исследовательских умений.

Данное издание рекомендовано к применению в учебном процессе для специальности СПО 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (актуал. ФГОС).

Технический директор
ЗАО ВММ-2 Р.Г. Девальд

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по специальности **08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (ФГОС 2018)**.

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Методические рекомендации предназначены для организации выполнения практических работ по учебной дисциплине «Математика».

Программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 15 практических работ, направленных **на формирование** ***элементов следующих компетенций*****:**

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 3 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 09 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 11. Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере.

умений**:**

- выполнять необходимые измерения и связанные с ними расчеты;
- применять векторы для решения для решения реальных производственных задач;
- вычислять площади и объемы деталей строительных конструкций, объемы земляных работ;
- применять математические методы для решения профессиональных задач;

обобщение, систематизацию, углубление и закрепление ***знаний*****:**

- основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики;
- основные формулы для вычисления площадей фигур и объемов тел, используемых в строительстве.

В методических указаниях к выполнению практических работ содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая практическая работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий.

Ход выполнения практической работы

Практические работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. В тетрадях для практических работ выполнить самостоятельную работу или решить номера, которые указаны в работе.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Критерии оценивания практических работ

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

Перечень практических работ

№ работы	Наименование практических работ	Кол-во часов
1.	Вычисление скалярного произведения векторов.	2
2.	Составление уравнений прямой.	2
3.	Вычисление площадей поверхностей геометрических тел.	2
4.	Решение прикладных задач на расчет площадей поверхностей строительных конструкций.	2
5.	Вычисление объема геометрических тел.	2
6.	Решение прикладных задач на расчет объёмов деталей строительных конструкций, определение объема земляных работ.	2
7.	Раскрытие различных неопределённостей.	2
8.	Вычисление производных сложных функций и высших порядков.	2
9.	Исследование функции с помощью производной.	2
10.	Вычисление неопределённых интегралов с помощью замены переменной	2
11.	Вычисление неопределённых интегралов с помощью метода интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций	2
12.	Вычисление определённых интегралов	2
13.	Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур	2
14.	Решение вероятностных задач.	2
15.	Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм.	2
ВСЕГО		30

Практическая работа № 1

Вычисление скалярного произведения векторов.

Цель работы:

1. Научиться вычислять скалярное произведение векторов.
2. Научиться вычислять углы между векторами с помощью скалярного произведения.

Знания:

1. Понятие модуля вектора.
2. Понятие скалярного произведения.

Умения:

1. Вычисление скалярного произведения векторов.
2. Определение угла между векторами.

Содержание работы:

Координатами вектора $\bar{a}$ называют проекции этого вектора на координатные оси, записывают $\bar{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$.

Формула длины вектора через его координаты: $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Если рассмотреть вектор заданный двумя точками $A_1(x_1,y_1,z_1)$ и $A_2(x_2,y_2,z_2)$, то координаты вектора $\overline{A_1A_2}$ выражаются формулой $\overline{A_1A_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$ т.е. *координаты вектора равны разности соответствующих координат его конца и начала.*

Рассмотрим два вектора $\bar{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$

1. тогда сумма этих векторов $\bar{a}+\bar{b}=\{x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2\}$ т.е. координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат.
2. аналогично получим $\bar{a}-\bar{b}=\{x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2\}$ т.е. координаты разности векторов равны разности соответствующих координат.
3. найдем координаты вектора $\bar{c}=\alpha\bar{a}$: $\bar{c}=\{\propto x_1;\propto y_1;\propto z_1\}$

т.е. координаты произведения вектора $\bar{a}$ на число α равны произведениям соответствующих координат вектора $\bar{a}$ на α.

4. векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т.е. $\bar{a}=\bar{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\\z_1=z_2\end{cases}$
5. векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е. $\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

Пример 1*:* Даны точки А(2;-1;0) и В(-2 ;-3; 4). Найти длину вектора $\overline{AB}$.

Решение: Найдём координаты вектора $\overline{AB}=\{-2-2;-3-(-1);4-0\}=\{-4;-2;4\}$.

Вычислим длину вектора $|AB|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{16+4+16}=6$.

Пример 2*:* При каких значениях α *и* β вектора $\overline{a}=4\overline{i}+3\overline{j}+\alpha\overline{k}$ *и* $\overline{b}=\beta\overline{i}-6\overline{j}-2\overline{k}$ коллинеарны?

Решение: Так как $\overline{a}\|\overline{b}$, *то* $\dfrac{4}{\beta}=\dfrac{3}{-6}=\dfrac{\alpha}{-2}$ отсюда находим $\alpha=1,\ \beta=-8$.

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число*,* равное произведению их длин на косинус угла между ними: $(,)=||\cdot||\cdot cos\varphi$.

Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами $\overline{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\overline{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, тогда

- скалярное произведение этих векторов находится по формуле $(,)=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$

- косинус угла между ними – по формуле

$$cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}$$

- проекция одного из векторов на другой - по формуле:

$$\text{Пр}_{\square}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}$$

Пример 3*:* Найти $(3-5)\cdot(2+7)$, если $||=3, ||=1, \perp$

Решение*:*

$(3-5)\cdot(2+7)=6\square^2-10(,)+21(,)-35\square^2=6||^2--11(,)-35||^2=6\cdot3^2-11\cdot0-35\cdot1=19$

($(,)=0$, т.к.$, \perp$).

Задания для практической работы:

1. Даны векторы $\overline{a}=\alpha\cdot\overline{m}+\beta\cdot\overline{n}$ и $\overline{b}=\gamma\cdot\overline{m}+\delta\cdot\overline{n}$, где $|\overline{m}|=k$; $|\overline{n}|=l$; $(\overline{m},\overline{n})=\varphi$.

Найти а) $(\alpha\cdot\overline{a}+\mu\overline{b})\cdot(\nu\cdot\overline{a}+\tau\cdot\overline{b})$; б) $np_{a}(\nu\cdot\overline{a}+\tau\cdot\overline{b})$; в) $\cos(\overline{a},\tau\cdot\overline{b})$.

1. $\alpha=$ -5, $\beta=$ -4, $\gamma=$ 3, $\delta=$ 6, $k=$ 3, $l=$ 5, $\phi=5\pi/3$, $\lambda=$ -2, $\mu=$ 1/3, $\nu=$ 1, $\tau=$ 2.

2. $\alpha=$ -2, $\beta=$ 3, $\gamma=$ 4, $\delta=$ -1, $k=$ 1, $l=$ 3, $\phi=\pi$, $\lambda=$ 3, $\mu=$ 2, $\nu=$ -2, $\tau=$ 4.

3. $\alpha=$ 5, $\beta=$ -2, $\gamma=$ 3, $\delta=$ -1, $k=$ 4, $l=$ 5, $\phi=4\pi/3$, $\lambda=$ 2, $\mu=$ 3, $\nu=$ -1, $\tau=$ 5.

4. $\alpha=$ 5, $\beta=$ 2, $\gamma=$ -6, $\delta=$ -4, $k=$ 3, $l=$ 2, $\phi=5\pi/3$, $\lambda=$ -1, $\mu=$ 1/2, $\nu=$ 2, $\tau=$ 3.

5. $\alpha=$ 3, $\beta=$ -2, $\gamma=$ -4, $\delta=$ 5, $k=$ 2, $l=$ 3, $\phi=\pi/3$, $\lambda=$ 2, $\mu=$ -3, $\nu=$ 5, $\tau=$ 1.

6. $\alpha=$ 2, $\beta=$ -5, $\gamma=$ -3, $\delta=$ 4, $k=$ 2, $l=$ 4, $\phi=2\pi/3$, $\lambda=$ 3, $\mu=$ -4, $\nu=$, $\tau=$ 3.

7. $\alpha=$ 3, $\beta=$ 2, $\gamma=$ -4, $\delta=$ -2, $k=$ 2, $l=$ 5, $\phi=4\pi/3$, $\lambda=$ 1, $\mu=$ -3, $\nu=$ 0, $\tau=$ -1/2.

8. $\alpha=$ 5, $\beta=$ 2, $\gamma=$ 1, $\delta=$ -4, $k=$ 3, $l=$ 2, $\phi=\pi$, $\lambda=$ 1, $\mu=$ -2, $\nu=$ 3, $\tau=$ -4.

9. $\alpha=$ -3, $\beta=$ -2, $\gamma=$ 1, $\delta=$ 5, $k=$ 3, $l=$ 6, $\phi=4\pi/3$, $\lambda=$ -1, $\mu=$ 2, $\nu=$ 1, $\tau=$ 1.

10. $\alpha=$ 5, $\beta=$ -3, $\gamma=$ 4, $\delta=$ 2, $k=$ 4, $l=$ 1, $\phi=2\pi/3$, $\lambda=$ 2, $\mu=$ -1/2, $\nu=$ 3, $\tau=$ 0.

2. Проверить коллинеарность векторов $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$

1. $\overline{c_1}=2\overline{a}-3\overline{b}$ и $\overline{c_2}=3\overline{a}-2\overline{b}$, где $\overline{a}(2;-1;4)$, $\overline{b}(3;-7;6)$
2. $\overline{c_1}=7\overline{a}+4\overline{b}$ и $\overline{c_2}=7\overline{a}-3\overline{b}$, где $\overline{a}(8;-4;0)$, $\overline{b}(0;-1;4)$
3. $\overline{c_1}=6\overline{a}-5\overline{b}$ и $\overline{c_2}=4\overline{a}+2\overline{b}$, где $\overline{a}(2;-4;7)$, $\overline{b}(1;-6;6)$
4. $\overline{c_1}=5\overline{a}+6\overline{b}$ и $\overline{c_2}=2\overline{a}-\overline{b}$, где $\overline{a}(2;-1;2)$, $\overline{b}(3;-1;2)$
5. $\overline{c_1}=4\overline{a}-7\overline{b}$ и $\overline{c_2}=3\overline{a}+4\overline{b}$, где $\overline{a}(2;-4;4)$, $\overline{b}(1;-3;2)$
6. $\overline{c_1}=3\overline{a}+8\overline{b}$ и $\overline{c_2}=\overline{a}-5\overline{b}$, где $\overline{a}(2;-6;8)$, $\overline{b}(1;-4;6)$
7. $\overline{c_1}=2\overline{a}-9\overline{b}$ и $\overline{c_2}=9\overline{a}+2\overline{b}$, где $\overline{a}(2;-2;3)$, $\overline{b}(3;-2;2)$
8. $\overline{c_1}=\overline{a}-2\overline{b}$ и $\overline{c_2}=6\overline{a}-2\overline{b}$, где $\overline{a}(2;-2;0)$, $\overline{b}(2;-1;2)$
9. $\overline{c_1}=-5\overline{a}+3\overline{b}$ и $\overline{c_2}=3\overline{a}+\overline{b}$, где $\overline{a}(4;-1;6)$, $\overline{b}(3;4;2)$
10. $\overline{c_1}=4\overline{a}-7\overline{b}$ и $\overline{c_2}=8\overline{a}-4\overline{b}$, где $\overline{a}(1;-1;9)$, $\overline{b}(2;7;3)$

3. По координатам точек *A, B* и *C* для указанных векторов найти:

а) модуль вектора a;

б) Скалярное произведение векторов a и b;

1. A(4,6,3), B(-5,2,6), C(4,-4,-3), a=$4\overline{CB}-\overline{AC}$,b= $\overline{AB}$,c= $\overline{CB}$
2. A(4,3,-2), B(-3,-1,4), C(2,2,1), a= $-5\overline{AC}+\overline{CB}$,b= $\overline{AB}$,c= $\overline{AC}$
3. A(-2,-2,4), B(1,3,-2), C(1,4,2), a=$2\overline{AC}-3\overline{BA}$,b= $\overline{BC}$,c= $\overline{BC}$
4. A(2,4,3), B(3,1,-4), C(-1,2,2), a= $2\overline{BA}+4\overline{AC}$,b= $\overline{BA}$,c= $\overline{BA}$
5. A(2,4,5), B(1,-2,3), C(-1,-2,4), a= $3\overline{AB}-4\overline{AC}$,b= $\overline{BC}$,c= $\overline{BC}$
6. A(-1,-2,4), B(-1,3,5), C(1,4,2), a= $3\overline{AC}-7\overline{BC}$,b= $\overline{AB}$,c= $\overline{AB}$

7. A(1,3,2), B(-2,4,-1), C(1,3,-2), a= $2\overline{AB}+5\overline{CB}$,b= $\overline{AC}$,c= $\overline{AC}$
8. A(2,-4,3), B(-3,-2,4), C(0,0,-2), a=$3\overline{AC}$ - $4\overline{CB}$,b= $\overline{AB}$,c= $\overline{AB}$
9. A(3,4,-4), B(-2,1,2), C(2,-3,1), a=$5\overline{CB}+4\overline{AC}$,b= $\overline{BA}$,c= $\overline{BA}$
10. A(0,2,5), B(2,-3,4), C(3,2,-5), a= $-3\overline{AB}+\overline{CB}$,b= $\overline{AC}$,c= $\overline{AC}$

Практическая работа № 2

Составление уравнений прямой

Цель работы:

1. Познакомиться с формами заданиями прямой на плоскости.
2. На конкретных примерах научиться составлять различные уравнения прямой.

Знания:

1. Виды уравнений прямой на плоскости.

Умения:

1. Составление различных видов уравнений прямой.

Содержание работы:

1. ***Ax+By+C=0*** – общее уравнение прямой

а) *A=0,B≠0.* Уравнение определяет прямую, параллельную оси абсцисс и пересекающую ось ординат в точке с координатой $y=\frac{-C}{B}$.

б) *B=0,A≠0.* Уравнение определяет прямую, параллельную оси ординат и пересекающую ось абсцисс в точке с координатой $x=\frac{-C}{A}$.

в) *c*=0. Уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.

2. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1); (x_2, y_2).

3. $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$- параметрические уравнения прямой, где $(x_0;y_0)$-координаты любой точки, лежащей на прямой, (m,n)- координаты направляющего вектора (вектора параллельного прямой или лежащего на прямой).

4. $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$ - уравнение прямой, проходящей через точку *A* (x_0, y_0) и направляющий вектор $\bar{s}=(m,n)$.

5. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - уравнение прямой в отрезках, где *a*и*b*отрезки отсекаемые на осях координат.

6. $\boldsymbol{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ и вектор нормали $\bar{n}=(A;B)$ (вектор, перпендикулярный прямой).

7. $y-y_0=k(x-x_0)$ –уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0;y_0)$ в заданном направлении, т.е. с заданным угловым коэффициентом k.

Пример: Пусть даны координаты вершин треугольника:*A(4;3), B(16;-6), C(4;-12)*.

а) Найти длины сторон треугольника *ABC*.

Используем формулу, определяющую расстояние d между точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Тогда по формуле получим: $|AB|=\sqrt{(16-4)^2+(-6-3)^2}=\sqrt{225}=15$

$|BC|=\sqrt{(20-16)^2+(16+6)^2}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$

$|AC|=\sqrt{(20-4)^2+(16-3)^2}=\sqrt{425}=5\sqrt{17}$

б) Найти уравнения сторон треугольника, указать их угловые коэффициенты и координаты направляющих и нормальных векторов соответственно.

Используем формулу уравнения прямой, проходящей через две точки

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

Подставляя в формулу координаты соответствующих вершин треугольника ABC, определим искомые уравнения сторон.

(AB) :$\frac{x-4}{16-4}=\frac{y-3}{-6-3};\frac{x-4}{12}=\frac{y-3}{-9};\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{-3};$

или*-3(x-4)=4(y-3);-3x+12=4y-12;* ***<u>3x+4y-24=0 (AB)</u>***

Получили общее уравнение прямой AB. Разрешим это уравнение относительно переменной y , тогда коэффициент перед переменной x является угловым коэффициентом прямой AB:

$3x+4y-24=0\Rightarrow 4y=-3x+24\Rightarrow y=\frac{-3}{4}x+6\Rightarrow k_{AB}=\frac{-3}{4}$

Если прямая задана своим общим уравнением *Ax+ By +C = 0*, то вектор нормали $\bar{n}$ и направляющий вектор $\bar{s}$ имеют следующие координаты:

$\bar{n}=(A;B)u\,\bar{s}=(-B;A)$

Значит, для прямой AB: $\bar{n}_{AB}=(3;4)u\,\bar{s}_{AB}=(-4;3)$

Аналогично определим уравнения сторон *BC* и *AC* и координаты их нормальных и направляющих векторов соответственно.

(BC) :$\frac{x-16}{20-16}=\frac{y+6}{16+6};\frac{x-16}{4}=\frac{y+6}{22};\frac{x-16}{2}=\frac{y+6}{11};$

11(x-16)=2(y+6);11x-176=2y+12; ***<u>11x-2y-188=0 (BC)</u>***

$11x-2y-188=0\Rightarrow -2y=-11x+188\Rightarrow y=\frac{11}{2}x-94\Rightarrow k_{BC}=\frac{11}{2}$

Координаты их нормальных и направляющих векторов: $\bar{n}_{BC}=(11;-2)u\,\bar{s}_{BC}=(2;11)$

(AC) :$\frac{x-4}{20-4}=\frac{y-3}{16-3};\frac{x-4}{16}=\frac{y-3}{13};$

13(x-4)=16(y-3);13x-52=16y-48; ***<u>13x-16y-4=0 (AC)</u>***

$13x-16y-4=0\Rightarrow -16y=-13x+4\Rightarrow y=\frac{13}{16}x-\frac{1}{4}\Rightarrow k_{AC}=\frac{13}{16}$

Координаты их нормальных и направляющих векторов: $\bar{n}_{AC}=(13;-16)\,u\,\bar{s}_{AC}=(16;13)$

в) Определить величину угла $\angle$B треугольника ABC.

Если две прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: $l_1: y=k_1x+b_1$ и $l_2: y=k_2x+b_2$, то угол между ними можно найти по формуле: $tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$

В нашем примере: $k_1=k_{AB}=\frac{-3}{4}, k_2=k_{BC}=\frac{11}{2}$, значит:

$tg\,\varphi=\left|\frac{\frac{11}{2}-\left(\frac{-3}{4}\right)}{1+\frac{11}{2}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)}\right|=\left|\frac{\frac{25}{4}}{1-\frac{33}{8}}\right|=\left|\frac{\frac{25}{4}}{\frac{-25}{8}}\right|=2$. Таким образом, $tg\,\varphi=2\Rightarrow\varphi=arctg\,2\approx64^0$.

г) Найти уравнение высоты CD и ее длину.

Поскольку CD является высотой треугольника ABC, значит CD⊥AB . Используем условие перпендикулярности двух прямых:

прямые перпендикулярны, если их угловые коэффициенты обратно пропорциональны и взяты с противоположными знаками,

т.е. $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_{l_1}=\frac{-1}{k_{l_2}}$

В нашем случае: CD⊥AB $\Leftrightarrow k_{CD}=\frac{-1}{k_{AB}}=\frac{-1}{\frac{-3}{4}}=\frac{4}{3}$.

Далее, используем уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении:.$y-y_0=k(x-x_0)$.В нашем случае известна точка C(20;16) точка, через которую проходит высота CD, и угловой коэффициент этой прямой $k_{CD}=\frac{4}{3}$.

Тогда получим: $y-16=\frac{4}{3}(x-20); 3y-48=4x-80; 4x-3y-32=0$**(CD)**

Для определения длины высоты CD, используем формулу $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, но сначала найдем координаты точки D. Поскольку точка D является пересечением прямых CD и AB, то для определения её координат необходимо решить совместно уравнения этих прямых, т.е.

$$\begin{matrix}(AB)\\ CD\end{matrix}\begin{cases}3x+4y-24=0 & \times(-4)\\ 4x-3y-32=0 & \times 3\end{cases}+\Leftrightarrow\begin{cases}3x+4y-24=0\\ -25y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=0\end{cases}$$

Значит, точка D имеет следующие координаты: D(8;0).

$|CD|=\sqrt{(20-8)^2+(16-0)^2}=\sqrt{400}=20$

д) Найти уравнение медианы BK .

Так как *BK* является медианой, то точка K - середина отрезка AC. Определим координаты середины отрезка *AC* по формуле:

$$\begin{cases} x_K=\dfrac{x_A+x_C}{2} \\ y_K=\dfrac{y_A+y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K=\dfrac{20+4}{2} \\ y_K=\dfrac{16+3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K=12 \\ y_K=9{,}5 \end{cases} \Rightarrow K\left(12;9{,}5\right)$$

Далее, использую формулу $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, найдем уравнение медианы BK:

$\dfrac{x-16}{12-16}=\dfrac{y+6}{9{,}5+6};\dfrac{x-16}{-4}=\dfrac{y+6}{31}$*;31(x-16)=-8(y+6);* ***31x+8y-448=0(BK)***

е) Найти уравнение прямой, проходящей через точку D, параллельно стороне AC.

Пусть *l*искомая прямая. Тогда, по условию она параллельна прямой AC. Используем условие параллельности двух прямых:

две прямые параллельны, если они имеют равные угловые коэффициенты, т. е. $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_{l_1}=k_{l_2}$

В нашем случае: $k_1=k_{AB}=\dfrac{13}{16}$.

Также, по условию, известно, что прямая l , проходит через точку D. Тогда используя формулу $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$, определим уравнение искомой прямой:

$y-0=\dfrac{13}{16}\left(x-8\right);16y=13x-104;$**13**$x-16y-104=0$**(*l*)**

Задания для практической работы:

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

а) длины сторон треугольника;

б) уравнения сторон треугольника, указать их угловые коэффициенты и координаты направляющих и нормальных векторов соответственно;

в) угол C треугольника ABC;

г) уравнение высоты AL и ее длину;

д) уравнение медианы BK;

е) уравнение прямой, проходящей через точку L, параллельно стороне AB;

ж) сделать рисунок

1) *A(5;14), B(-5;9), C(7;0)*

2) *A(3;9), B(-7;4), C(5;-5)*

3) *A(10;8), B(0;3), C(12;-6)*

4) *A(14;6), B(4;1), C(16;-8)*

5) *A(0;10), B(-5;9), C(7;0)*

6) *A(4;13), B(-6;8), C(6;-1)*

7) *A(15;17), B(-1;4), C(11;-5)*

8) *A(22;23), B(-4;10), C(8;1)*

9) *A(13;11), B(3;6), C(15;-3)*

10) *A(8;12), B(-2;7), C(10;-2)*

Практическая работа № 3

Вычисление площадей поверхностей геометрических тел

Цель работы:

1. Научиться вычислять площади поверхности геометрических тел.

Знания:

1. Понятия многогранников и тел вращения.
2. Формулы для вычисления площадей поверхностей многогранников и тел вращения.

Умения:

1. Применение формул для вычисления площадей поверхностей различных геометрических тел.

Содержание работы:

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и **n** параллелограммов, называется **призмой** Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ называются **основаниями** призмы, а параллелограммы – **боковыми гранями** призмы

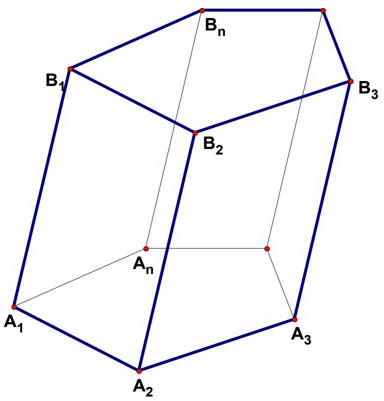


Рис.1

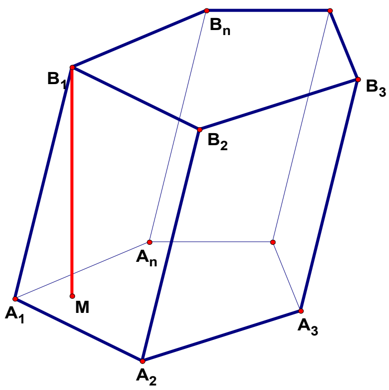


Рис.2

***Высотой** призмы называется перпендикуляр, опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого (Рис.2)*

*Если боковые ребра призмы перпендикулярны к плоскости основания, то — **призма прямая** (Рис.3)*

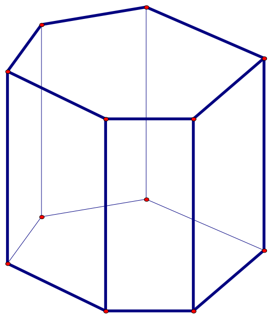


Рис.3

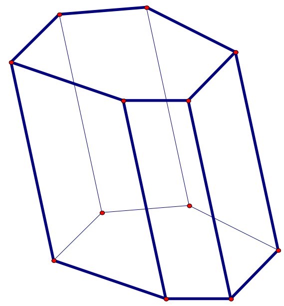


Рис.4

*Если нет, то **призма наклонная (Рис.4)**.*

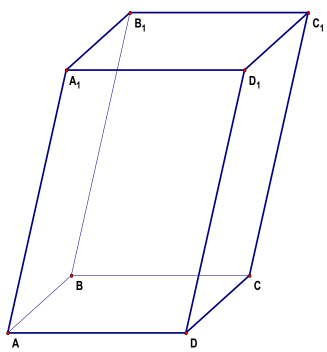
Если в прямой призме основание — правильный многоугольник **— призма правильная.**

Перпендикулярное сечение призмы — это такое сечение, которое образовано плоскостью перпендикулярной к её боковому ребру**.**

Площадью **полной поверхности** призмы называется сумма площадей всех её граней

Площадью **боковой поверхности** призмы называется сумма площадей её боковых граней $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$

Площадь **боковой поверхности** прямой призмы равна произведению **периметра основания** на **высоту** призмы $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$

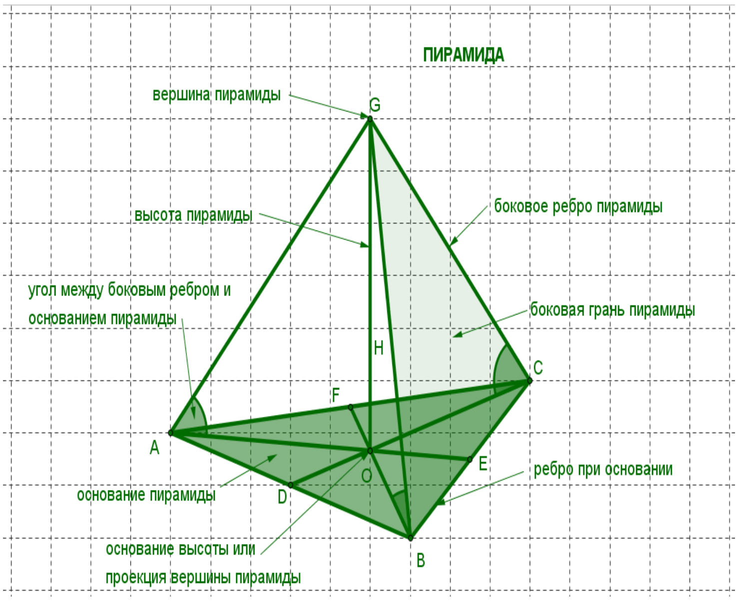


Параллелепипед — это призма, основание которой — параллелограмм. Параллелепипед имеет шесть граней и все они параллелограммы. Противоположные грани попарно равны и параллельны. Параллелепипед имеет четыре диагонали. Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам. Основанием параллелепипеда может быть любая грань.

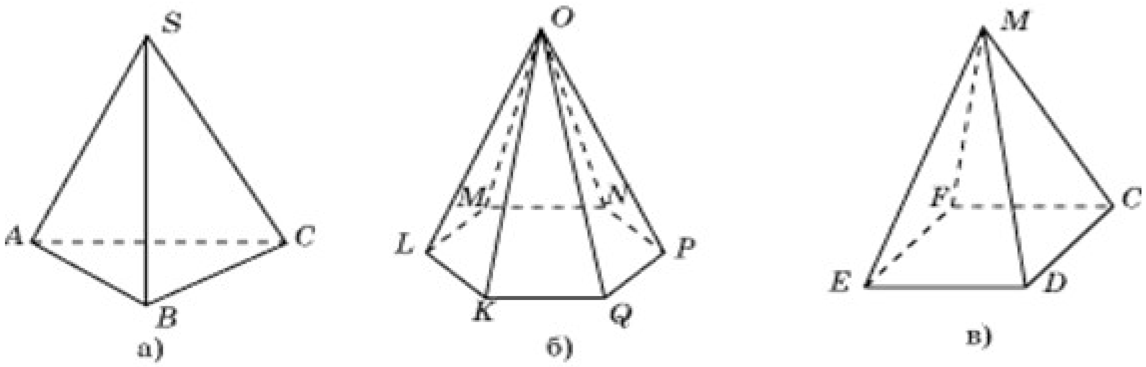
Параллелепипед, четыре боковые грани которого — прямоугольники, называется **прямым**. Прямой параллелепипед, у которого все шесть граней прямоугольники называется **прямоугольным.** Прямоугольный параллелепипед, все грани которого квадраты, называется **кубом**. Все ребра куба равны.

Прямоугольный параллелепипед, все грани которого - квадраты, называется **кубом.** Все ребра куба равны, а площадь поверхности куба равна сумме площадей шести его граней, т.е. площади квадрата со стороной Н умноженной на шесть. Площадь поверхности куба равна: $S=6H^2$

Пирамида — это многогранник, у которого одна грань — основание пирамиды — произвольный многоугольник, а остальные — боковые грани — треугольники с общей вершиной, называемой вершиной пирамиды.



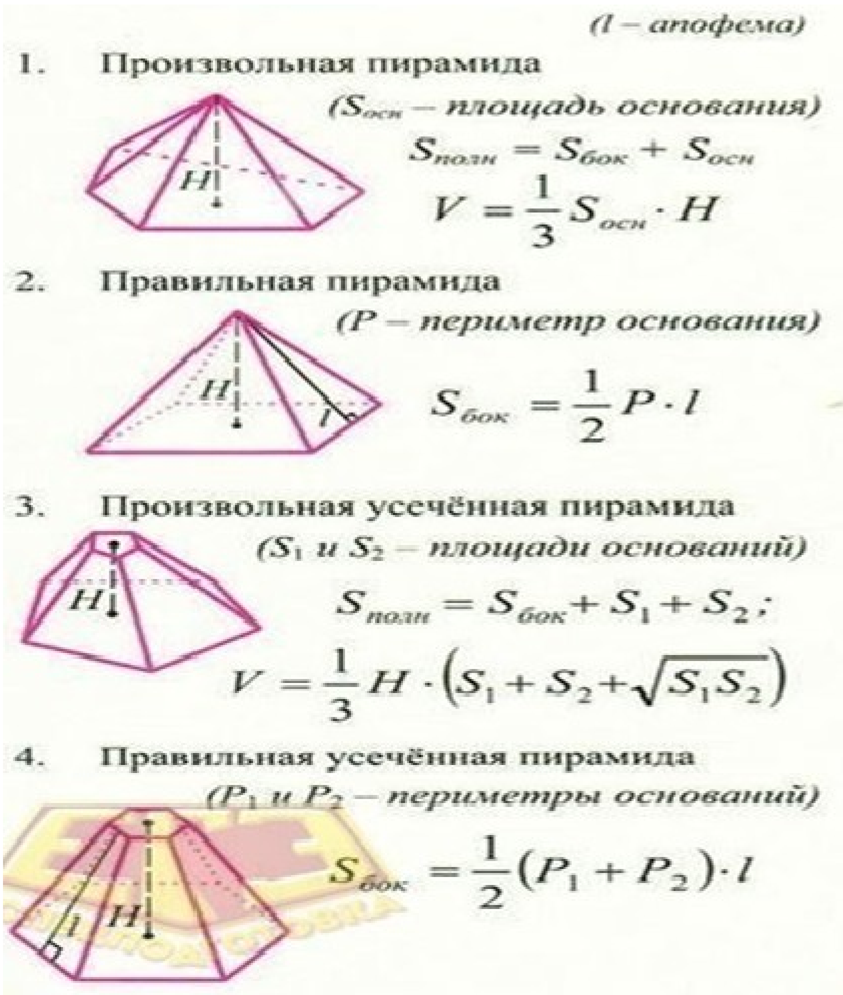
Перпендикуляр опущенный из вершины пирамиды на ее основание, называется **высотой пирамиды**. Пирамида называется треугольной, четырехугольной, и т.д., если основанием пирамиды является треугольник, четырехугольник и т.д. Треугольная пирамида есть четырехгранник — тетраэдр. Четырехугольная — пятигранник и т.д



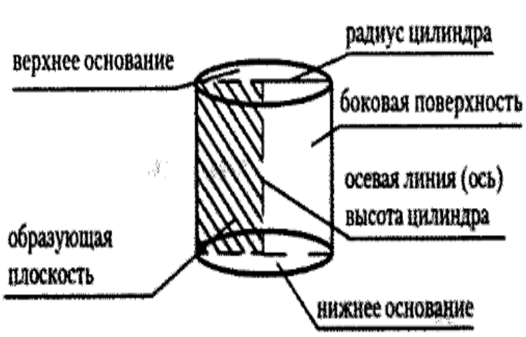
Если основание пирамиды — правильный многоугольник, а высота опускается в центр основания, то — **пирамида правильная**. В правильной пирамиде все боковые ребра равны, все боковые грани равные равнобедренные треугольники. Высота треугольника боковой грани правильной пирамиды называется — ***апофема правильной пирамиды***.

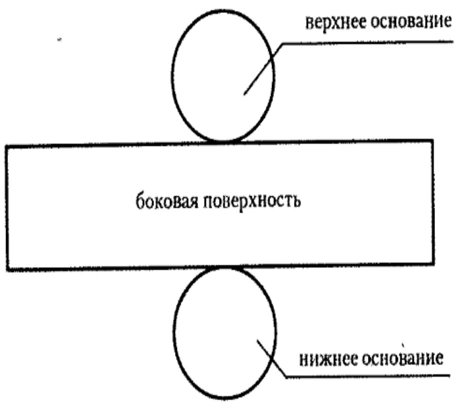
Сечение параллельное основанию пирамиды делит пирамиду на две части. Часть пирамиды между ее основанием и этим сечением — это **усеченная**

пирамида. Это сечение для усеченной пирамиды является одним из её оснований. Расстояние между основаниями усеченной пирамиды называется высотой усеченной пирамиды. Усеченная пирамида называется правильной, если пирамида, из которой она была получена, была правильной. Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — это равные равнобокие трапеции. Высота трапеции боковой грани правильной усеченной пирамиды называется — **апофема** правильной усеченной пирамиды



Цилиндр — это тело (объемная геометрическая фигура), полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон как оси.





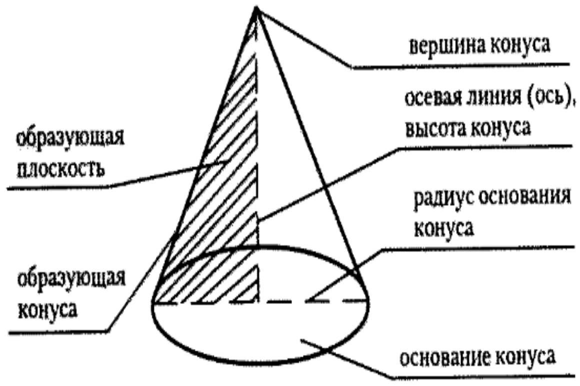
Развертка цилиндра приведена схематически

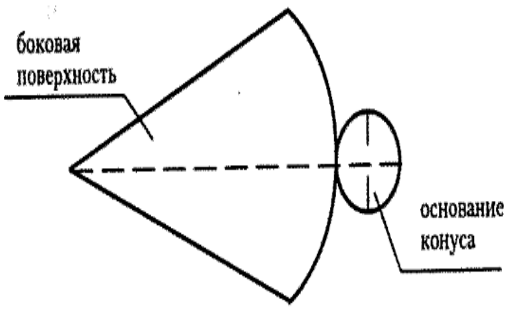
Площадь боковой поверхности цилиндра: $S_{бок.} = C \cdot H = 2\pi RH,$

где C — длина окружности, H — высота цилиндра, R — радиус окружности основания.

Площадь полной поверхности: $S_{полн.пов.цилиндра} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

Конус (прямой) — это тело (объемная геометрическая фигура), полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси

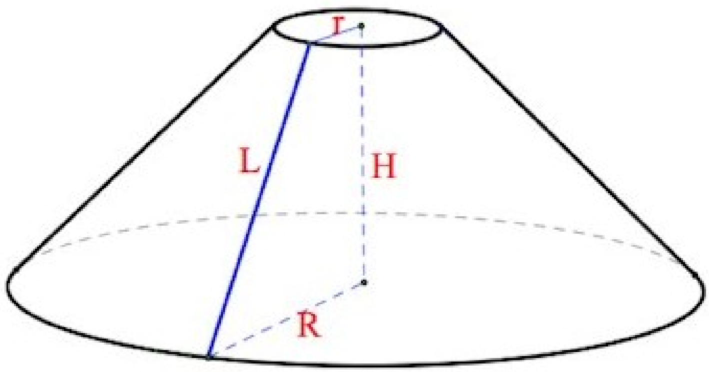




Площадь полной поверхности: $S_{полн.пов.конуса}$ ¿ $\pi R^2 + \pi RL$

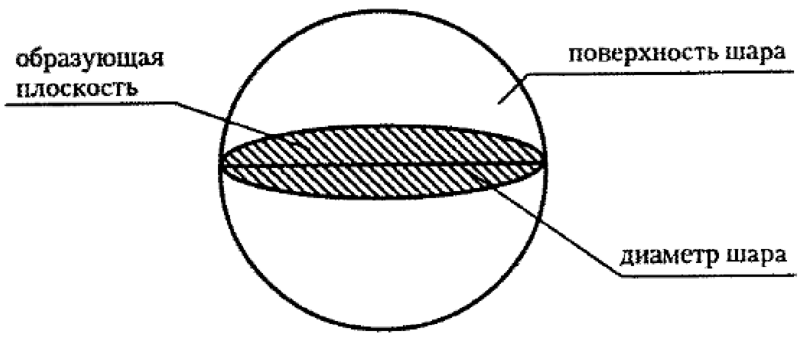
Площадь боковой поверхности: $S_{бок.пов.} = \pi RL$

УСЕЧЕННЫЙ КОНУС



$S_{бок} = \pi L(r+R)$

$S_{полн} = \pi\ (r^2 + (r + R)\ L + R^2)$

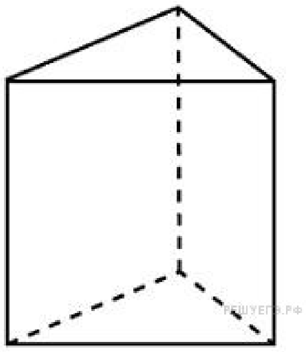


Шар — это тело (объемная геометрическая фигура), полученное вращением полукруга вокруг его диаметра как оси.

Площадь поверхности шара равна учетверенной площади большого круга шара: $S = 4\pi R^2$

где R— радиус шара.

Образцы решения заданий



Задача1. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту.

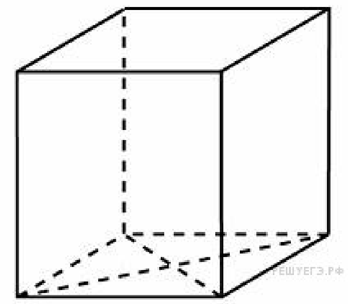
Решение.

Гипотенуза основания равна 10. Высоту найдем из выражения для площади поверхности $S=2S_{\Delta}+Ph$:

$$h=\frac{S-2S_{\Delta}}{P}=\frac{288-48}{24}=10\cdot$$

Ответ: 10.

Задача 2. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.



Решение.

Сторона ромба a выражается через его диагонали d_1 и d_2 формулой

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2}=5$$

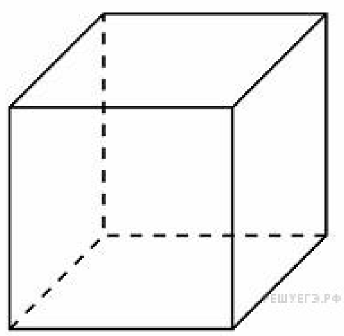
Найдем площадь ромба

$$S_P=\frac{1}{2}d_1d_2=24$$

Тогда площадь поверхности призмы равна

$$S=2S_{осн}+S_{бок}=2S_P+4aH=48+4\cdot5\cdot10=248$$

Ответ: 248.



Задача 3. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 20, а площадь поверхности равна 1760.

Решение.

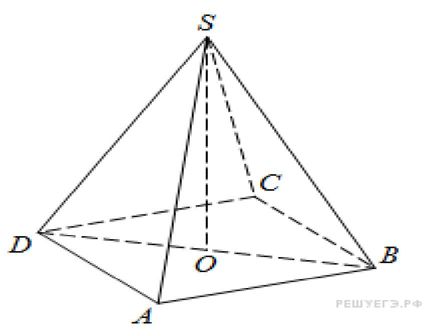
Площадь поверхности правильной четырехугольной призмы выражается через сторону ее основания a и боковое ребро H как

$$S=2a^2+4aH$$

Подставим значения a и S: $1760=2\cdot20^2+4\cdot20\cdot H$, откуда находим, что $H=12$.

Ответ: 12.

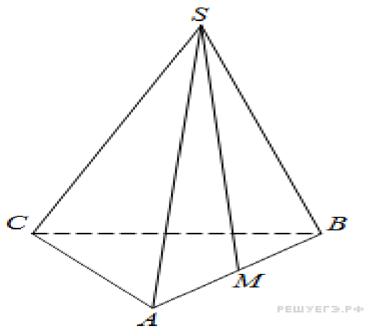
Задача 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SB=13, AC=24$. Найдите длину отрезка SO.



Решение.

В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды, тогда по теореме Пифагора

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$



Ответ: 5.

Задача 5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M – середина ребра AB, S – вершина. Известно, что BC=3, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 45. Найдите длину отрезка SM.

Решение.

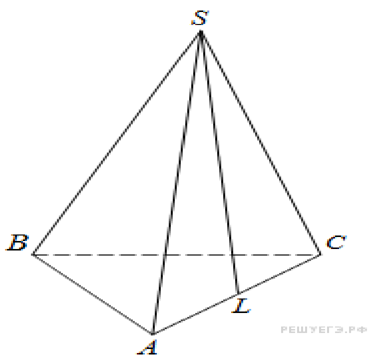
Найдем площадь грани SAB:

$$S_{SAB} = \frac{S_{\text{бок}}}{3} = \frac{45}{3} = 15.$$

Отрезок SM является медианой правильного треугольника SAB, а значит, его высотой. Тогда

$$SM = \frac{2S_{SAB}}{AB} = \frac{2S_{SAB}}{BC} = \frac{2 \cdot 15}{3} = 10.$$

Ответ: 10.



Задача 6. В правильной треугольной пирамиде SABC точка L — середина ребра AC, S — вершина. Известно, что BC=6, а SL=5. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

Отрезок SL является медианой правильного треугольника SAC, а значит, и его высотой. Боковые грани пирамиды равны, поэтому

$$S_{\text{бок}} = 3S_{SAC} = 3 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot SL = \frac{3}{2} BC \cdot SL = \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 45.$$

Ответ: 45.

Задача 7. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 384 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её налить во второй сосуд, диаметр которого в 8 раз больше диаметра первого?

Решение: Диаметр больше в 8 раз = то и радиус (который равен половине диаметра) тоже больше в 8 раз. Площадь основания увеличится в 64 раза (восемь в квадрате), потому что площадь основания $-S_{осн}=\pi r^2$ **.** Но вода та же самая, объем жидкости не изменился при переливании. Поэтому, раз площадь основания увеличилась в 64 раза, то высота должна уменьшится во столько же раз, чтобы получить такой же объем. Новая высота 384 : 64 = 6

Ответ: 6

Задача 8. Высота конуса равна 36, а диаметр основания равен 30. Найдите длину образующей конуса?

Решение

АВ - радиус основания конуса, АВ $=\frac{30}{2}=15$.

Образующая НВ является гипотенузой прямоугольного треугольника ΔАНВ. Известны высота АН = 36 и АВ = 15, по теореме Пифагора найдем НВ

$HB^2 = AH^2+AB^2$

$HB^2 = 36^2+ 15^2$

НВ = $\sqrt{1296+225}$

Ответ: 39.

Задача 9. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 60^o. Найдите радиус основания, если длина образующей равна 15.

Решение

АВ - радиус основания конуса, $\angle ABH = 60^o \to \angle AHB = 90^o - 60^o = 30^o$

$\sin(\angle AHB) = \frac{AB}{HB}$=12, НВ = 15, АВ$=\frac{HB}{2}=7.5$

Ответ: 7,5

Задача 10. .Площадь сечения сферы, проходящего через её центр, равна 9м2. Найдите площадь сферы**.**

Решение: Сечение, проходящее через центр сферы, есть окружность.

$S_{сеч}=\pi r^2$, отсюда $9= \pi R^2$, отсюда $R=\sqrt{9/\pi}$.

$S_{сферы}=4\pi r^2$, значит $S_{сферы}=4\pi \cdot 9/\pi ==36м^2$

Задания для практической работы:

1 вариант

1. Длина, ширина, высота прямоугольного параллелепипеда соответственно равны 3 см, 6 см, 7 см. Найдите диагональ параллелепипеда.

2. Найдите сторону основания и высоту правильной четырёхугольной призмы, если площадь полной поверхности равна 40 см^2, а площадь боковой поверхности равна 8 см^2.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а высота - 12 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

4. По стороне основания и высоте h найдите апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

5. Радиус основания цилиндра в два раза меньше образующей, равной 4a, Чему равна площадь боковой поверхности?

6. Чему равна площадь полной поверхности цилиндра, полученного вращением прямоугольника со сторонами 4 см и 7 см вокруг его большей стороны.

7. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь полной поверхности конуса.

8. Площадь полной поверхности конуса равна 164 π см^2, площадь его боковой поверхности равна 100 π см^2. Найдите радиус основания конуса.

9. Ребро куба равно 1. Найдите площадь большого круга, описанного около куба шара.

2 вариант

1. Длина, ширина, высота прямоугольного параллелепипеда соответственно равны 1 см, 4 см, 5 см. Найдите диагональ параллелепипеда.

2. Найдите сторону основания и высоту правильной четырёхугольной призмы, если площадь полной поверхности равна 52 см^2, а площадь боковой поверхности равна 44 см^2.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а высота - 4 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

4. По стороне основания и высоте h найдите боковое ребро правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

5. Радиус основания цилиндра в два раза больше образующей, равной 3m. Чему равна его площадь боковой поверхности?

6. Чему равна площадь полной поверхности цилиндра, полученного вращением прямоугольника со сторонами 4 см и 7 см вокруг его меньшей стороны.

7. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника вокруг меньшего катета, если другой катет равен 6 см и противолежащий ему угол равен 60°.

8. Площадь полной поверхности конуса равна 136π см^2, площадь его боковой поверхности равна 100 π см^2. Найдите радиус основания конуса.

9. Через середину радиуса шара проведена плоскость перпендикулярная к радиусу. Какая часть площади большого круга составляет площадь круга, полученного в сечении?

Практическая работа № 4

Решение прикладных задач на расчет площадей поверхностей строительных конструкций

Цель работы:

1. Научиться решать прикладные задачи на расчет площадей поверхностей строительных конструкций.

Знания:

1. Понятия многогранников и тел вращения.
2. Формулы для вычисления площадей поверхностей многогранников и тел вращения.

Умения:

1. Применение формул для вычисления площадей поверхностей различных геометрических тел.

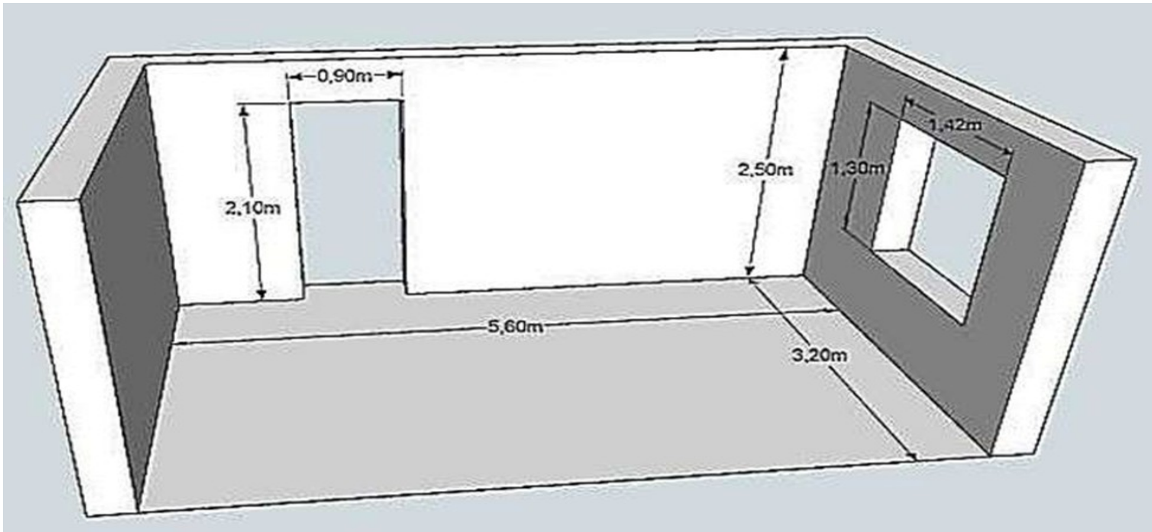
Содержание работы:

Области применения темы площадь поверхности в архитектуре и дизайне

- Расчет площадей поверхностей комнат (под штукатурку, обои)
- Расчет площадей фасадов зданий и сооружений
- Расчет площадей поверхности крыши
- И др.

Расчет площади поверхности помещений под штукатурку и обои

Задача 1. Вычислите площадь поверхности стен данной комнаты.



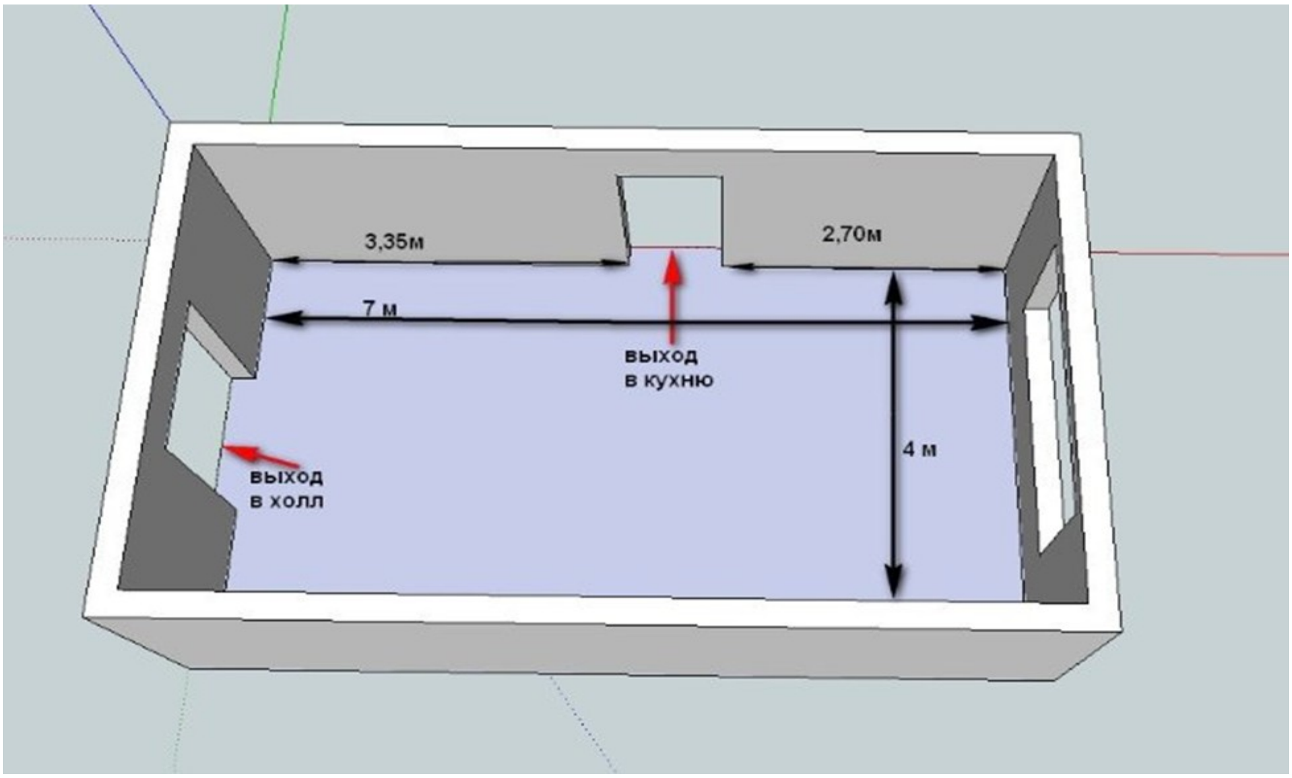
Для расчета площадей стен стандартных помещений применяют формулу площади прямоугольника $S=a\cdot b$

В данном случае мы высчитываем площадь стен и вычитаем площади двери и окна.

Тогда, в нашем примере площадь стен будет равна: ______________________

Расчет площади поверхности помещений под штукатурку и обои

Задача 2. Вычислите площадь поверхности стен данной комнаты, если площадь окна и дверей составляет 8.5% от всей площади стен.



Расчет площади поверхности помещений под штукатурку и обои

Задача 3. Рассчитать расход гипсовой штукатурки в помещении с размерами: длина – 6,5 м, ширина – 4,2 м, высота – 3,1 м. Есть 2 окна размером 2*1,5 м и дверь -0,9*2,1 м. Штукатурка укладывается только на стены в три слоя (толщина слоя 2 мм). Расход -0,8 кг/м^2. Сколько мешков штукатурки необходимо купить (фасовка 30 кг)?

Чтобы узнать количество обоев для оклейки стен, проводим расчеты по формуле: (a+b) x 2 x h, где a и b длина стен, h — высота комнаты.

Пример 4. Комната имеет длину стен 5 м и ширину 3,5 м, высота составляет 2,5 м.

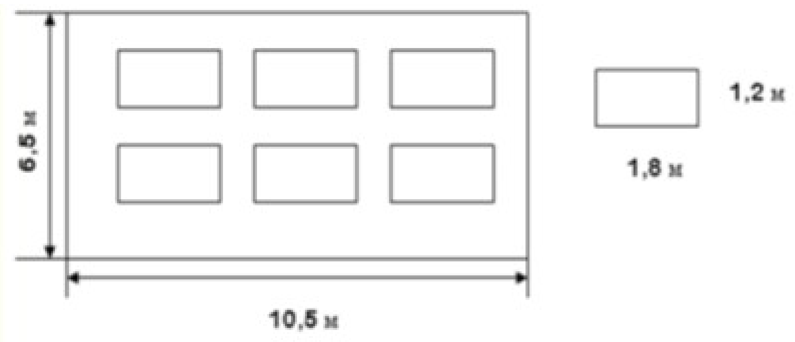
Рассчитываем и получаем ________________ кв. м, или округленно ___ кв. м без учета площади окон и дверей. Если обои с рисунком, требующим подгонки, то площадь окон и дверей не принимаем в расчет. Их площадь уйдет на подгонку рисунка. Если обои не требуют подгонки, то площадь окон и дверей вычитаем из общей площади стен.

Зная площадь стен, рассчитываем количество рулонов обоев. Каждый рулон имеет маркировку, указывающую общую длину и ширину рулона.

Решили закупить рулоны обоев длиной 10,05 м и шириной 1,05 м. По 5 см дается на припуски при наклейке обоев внахлест. Высота потолка в комнате 2,5 м, но длину одного полотнища мы увеличиваем на 10 см для выравнивания и получаем рабочую длину обоины 2,6 м. Рассчитываем количество полотнищ с одного рулона _____*______ = ____ штук. Количество целых полотен умножаем на рабочую длину и ширину обоины (___×2,6×1,05) и получаем с одного рулона ____ кв. м полезной площади. Площадь комнаты (_____ кв. м) делим на ____ кв. м и получаем необходимое количество рулонов с запасом (если не учитывали площадь окон и дверей). Проводим подсчет ___:____= ____ рулона. Округляем и закупаем для оклейки стен ____ рулонов обоев.

Расчет площади поверхности фасадов зданий под штукатурку

Задача 4. Рассчитать количество штукатурки необходимое для оштукатуривания здания (все размеры даны на схеме). Толщина слоя штукатурки -8мм. На сколько увеличится расход штукатурки, если толщину слоя увеличить на 2 мм?



Расчет площади поверхности фасадов зданий под штукатурку

Задача 5. Необходимо рассчитать количество штукатурки для оштукатуривания дома, представленного на развертке. Оштукатуривание основной части производится штукатуркой Knauf Grundband слоем в 15 мм. Внизу дома укладывается декоративная штукатурка ATLAS CERMIT PS слоем в 1,5 мм.

Размеры дома: длина -10,3 м, ширина -4,5м, высота -5,1 м

Размеры окон: длина - ширина -2,1м, высота -1,6 м

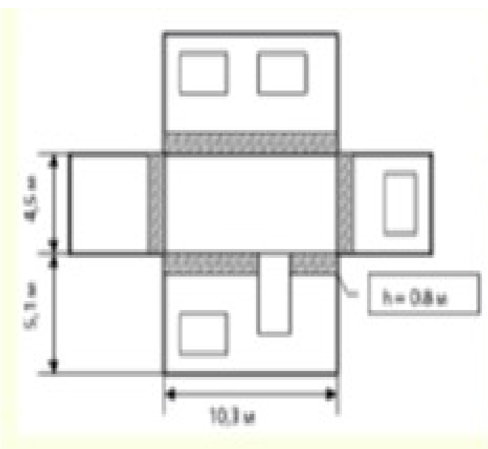
Размер двери: длина - ширина -1,2м, высота -2,5 м

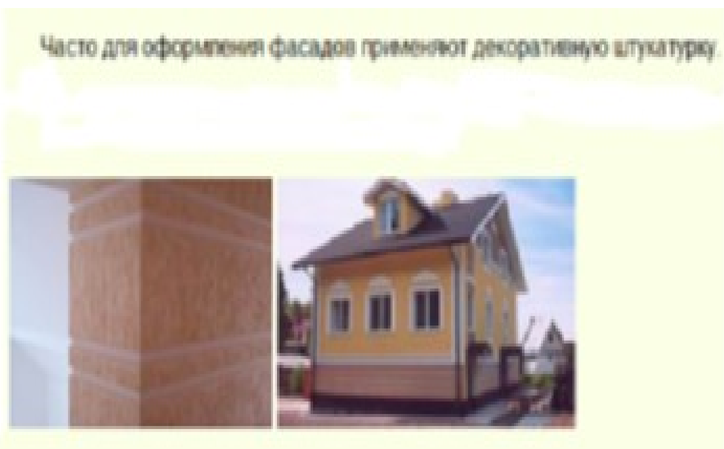
Высота полосы декоративной штукатурки – 0,8 м

Нормы расхода:

Расход штукатурки Knauf Grundband – 18,3кг/м^2/15мм

Расход штукатурки ATLAS CERMIT PS 2,0 кг/м^2/мм





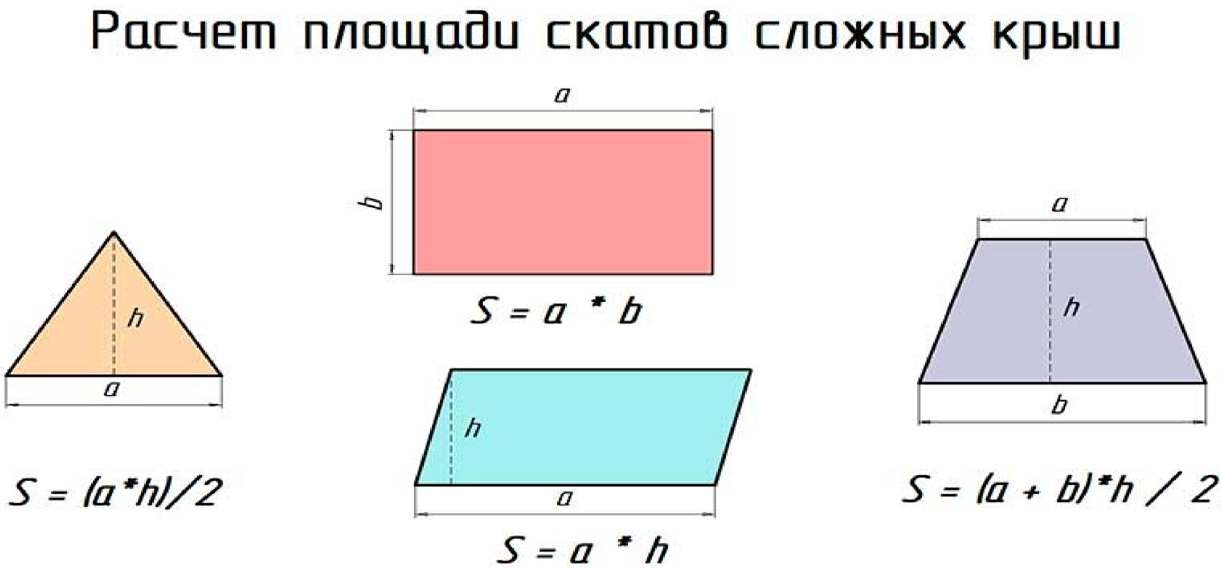
Расчет площади поверхности крыши

При расчете площади крыши учитывают следующие особенности:

- перед тем как посчитать площадь крыши, все сложные элементы кровли разбивают на отдельные составляющие – треугольники, квадраты и т.д.
- длину ската принимают от конька до крайней линии карниза;
- несмотря на то, что на любой кровле присутствуют вентиляционные каналы, дымоходные трубы, окна слуховые и мансардные, парапеты, их не отнимают от получившегося значения площади.

Существует огромное множество видов и геометрических форм крыш, но сами скаты крыши бывают, как правило, четырех геометрических форм:

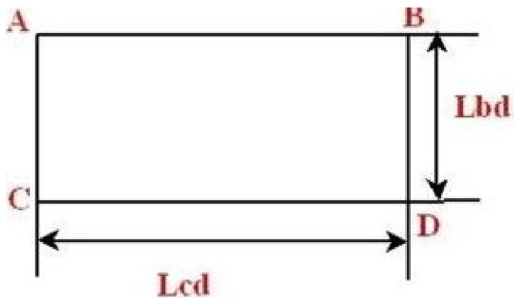
- *прямоугольник*
- *трапеция*
- *равносторонний треугольник*
- *параллелограмм*



Расчет площади односкатной кровли

Это – самый простой тип кровли, который подходит и для жилого дома, и для хозяйственной постройки.

Пример 6: Дом имеет размеры 10 х 4 метров. Стропила имеют длину 4,5 метра.



Длина свеса стандартная – 50 см.

Вычислим поверхность ската:

S = (___ + ___+___) х (___ + ___) = ___ м^{2}.

Расчет площади двускатной кровли

Среди большого разнообразия видов крыш наибольшей популярностью на протяжении нескольких столетий пользуется двухскатная крыша. Простота конструкции, отличная устойчивость, приспособленность под разные климатические условия – весомые аргументы, проверенные многолетней строительной практикой.

Так как скаты имеют форму прямоугольников, то вычисляем площадь каждого и складываем результаты

Расчет площади вальмовой кровли

Такая четырехскатная крыша имеет два ската, которые имеют вид трапеции, и два ската (торцевых) треугольной формы. Эти треугольные скаты называются вальмы. Отсюда и пошло название – вальмовая.

Вальмовые кровли имеют свои **преимущества**:

- противостоят сильным порывам ветра;
- не подвергаются деформации за счет жесткости конструкции;
- позволяют делать большие карнизные свесы с четырех сторон здания, необходимые для защиты фасадов от атмосферных осадков;
- карнизных навесов;
- визуально делают дома с мансардой низкими.

Пример расчета площади вальмовой кровли

Трапециевидные скаты имеют следующие параметры: одна сторона 10 м, другая 7 м, высота 3м.

Треугольные скаты: две стороны по 3,34 м, одна сторона 7м. Высота треугольника 4,8 м.

Площадь трапеции находится следующим образом: суммируем длину горизонтальных сторон, делим на 2, умножаем на высоту. То есть, в нашем случае: S= _______________ кв.м

Далее вычисляем площадь треугольных скатов. S= _________________

Завершающим этапом становится суммирование всех площадей:

S = _____________________ кв.м

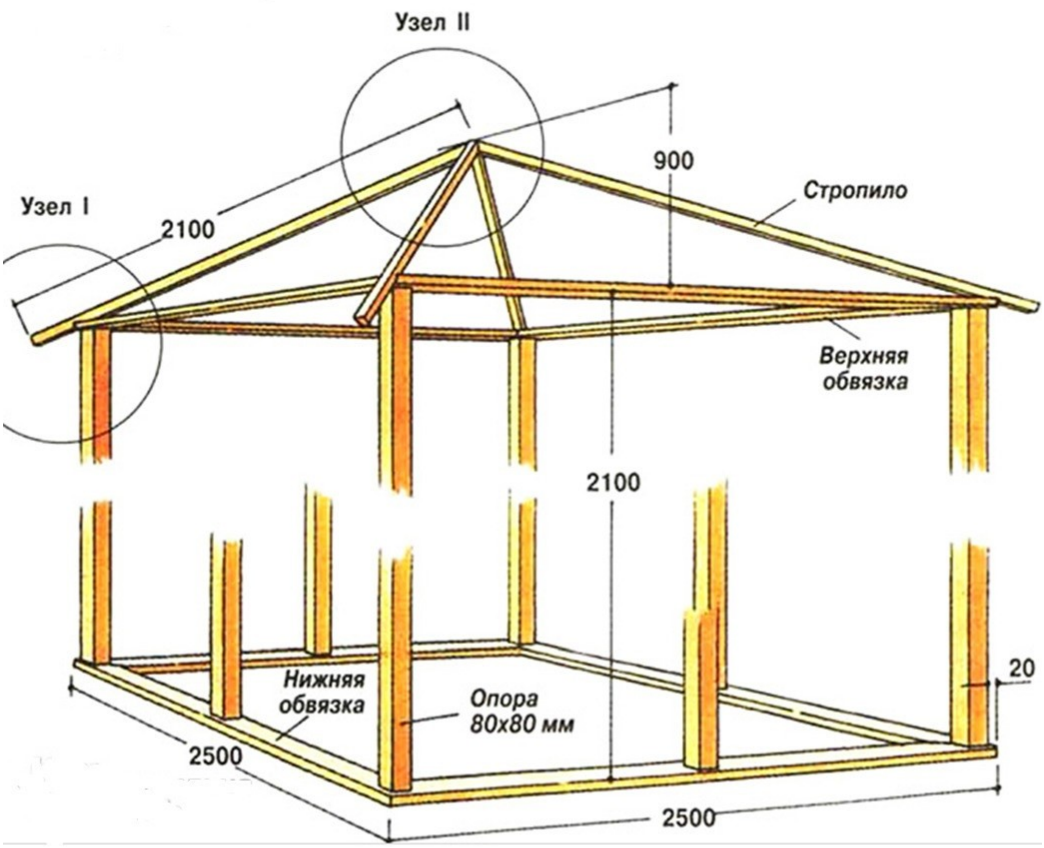
Расчет площади четырехскатной кровли

Для того, чтобы правильно рассчитать площадь четырехскатной кровли, ее следует также разделить на отдельные конструктивные элементы.

Если все скаты имеют одинаковые размеры, то достаточно рассчитать площадь одного из них и затем умножить на четыре.

Поскольку скат является равнобедренным треугольником, то: $S = b \times h/2$

b – это длина основания треугольника; h – высота; S – площадь треугольного ската.



Пример 7. Вычислить площадь крыши изображенной на рисунке.

Практическая работа № 5

Вычисление объема геометрических тел

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять объёмы геометрических тел.

Знания:

1. Понятие о многогранниках и фигурах вращения, формулы для вычисления их объёмов.

Умения:

1. Вычисление объёмов геометрических тел.

Содержание работы:

Основные формулы для вычисления объемов тел

Наклонная призма: $V=S_{пс}a$,

где $S_{пс}$ - площадь перпендикулярного сечения наклонной призмы, a - боковое ребро.

Прямая призма: $V=S_{осн}a$, где $S_{осн}$ - площадь основания прямой призмы, a - боковое ребро.

Прямоугольный параллелепипед: V=abc**,** где *a,b,c* - измерения прямоугольного параллелепипеда.

Куб: $V=a^3$**,** где *a* - ребро куба.

Пирамида: $V=\frac{1}{3}S_{осн}H$**,** где $S_{осн}$ - площадь основания, *H* - высота.

Усеченная пирамида: $V=\frac{H}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$**,** где S_1, S_2 - площади оснований усеченной пирамиды, *H* - её высота.

Цилиндр: $V=\pi R^2 H$**,** где *R* - радиус основания цилиндра, а *H* - его высота.

Конус: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$**,** где *R* - радиус основания конуса, а *H* - его высота.

Усеченный конус: $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$**,** где *R, r* - радиусы оснований усеченного конуса, *H* - его высота.

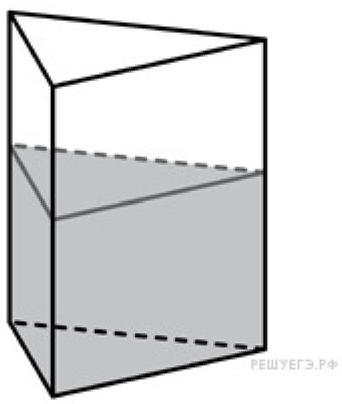
Сфера и шар: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$**,** где *R* - радиус шара.

***Объем шарового сегмента*:** $V=\pi H^2(R-\frac{1}{3}H)$**,** где *H* - высота шарового сегмента, *R* - радиус шара.

Объем шарового сектора: $V=\frac{2}{3}\pi R^2 H$**,** где *H* - высота соответствующего шарового сектора, *R* - радиус шара.

Примеры решения задач:

Задача 1. Сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3 .



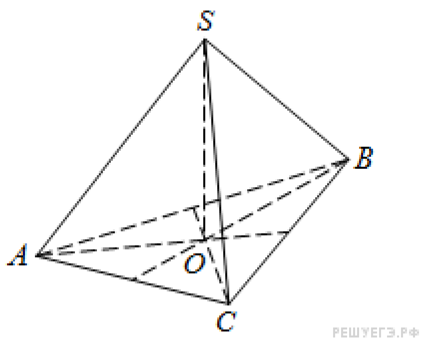
Решение.

По закону Архимеда объем детали равен объему вытесненной ею жидкости. Объем вытесненной жидкости равен 2/25 исходного объема:

$$V_{дет}=\frac{2}{25}\cdot 2300=184\text{см}^3.$$

Ответ: 184.

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде *SABC* медианы основания *ABC* пересекаются в точке O. Площадь треугольника *ABC* равна 2; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.



Решение. Отрезок OS высота треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO.$$

Таким образом,

$$SO=\frac{3V}{S_{ABC}}=\frac{3\cdot 6}{2}=9.$$

Ответ: 9.

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке О. Площадь треугольника ABC равна 9; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.

Решение.

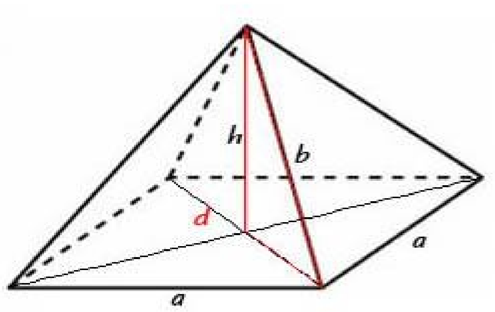
Отрезок OS является высотой треугольной пирамиды SABC, ее объем выражается формулой

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO.$$

Таким образом,

$$SO=\frac{3V}{S_{ABC}}=\frac{3\cdot 6}{9}=2.$$

Ответ: 2.



Задача 4. Дана правильная четырехугольная пирамида. Стороны основания a= 3 см, все боковые ребра b= 4 см. Найдите объем пирамиды.

Решение:

Для начала вспомним, что для расчета объема потребуется высота пирамиды. Мы можем найти ее по теореме Пифагора. Для этого нам потребуется длина диагонали, а точнее – ее половина. Тогда зная две из сторон прямоугольного треугольника, мы сможем найти высоту. Для начала находим диагональ:

$$d^2=a^2+a^2$$

Подставим значения в формулу:

$$d^2=3^2+3^2=9+9=18cm$$

$$d=\sqrt{18}=4{,}25cm$$

Высоту h найдем с помощью d и ребра b

$$h=\sqrt{\frac{d}{2}^2+b^2}$$

$$h=\sqrt{\frac{4{,}25}{2}^2+4^2}=\sqrt{4{,}5+16}=\sqrt{20{,}5}=4{,}5cm$$

Теперь найдем площадь квадрата, который лежит в основании правильной пирамиды:

$S = 3^2 = 9 cm^2$

Подставим найденные значения в формулу расчета объема:

$V = \frac{1}{3} \times 9 \times 4,5 = 13,5 cm^3$

Ответ:13,5.

№3. В цилиндрический сосуд, в котором находилось 4 литра воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объём детали? Ответ выразите в литрах.

Решение:

Объём цилиндра линейно зависит от его высоты. Не квадратно, не кубично, а просто линейно. Высота увеличилась в 1,5 раз, значит и объём увеличился в полтора раза. Было 4 литра, стало 4 умножить на 1,5 = 6 литров. Добавилось 2 литра. Таков и есть объем погруженной детали.

Ответ: 8 литров

Задания для практической работы:

1 вариант

1. Найдите объём прямого параллелепипеда, если его основание имеет стороны 4 см и 5 см, угол между ними 45°, а боковые рёбра равны 8 см.

2. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 4 см и составляет с плоскостью боковой грани угол 30º . Найдите объём призмы.

3. Основанием прямой призмы является ромб со стороной 12 см и острым углом в 60º. Меньшее из диагональных сечений является квадратом. Найти объём призмы.

4. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и катетом 6 см. Больший катет треугольника в основании призмы равен диагонали меньшей из боковых граней. Найти объём призмы.

5. Сколько кг краски потребуется для покраски (с учетом пола и потолка) помещения размерами 12 х 5 х 3 метра, если расход краски на 1 м^2 составляет 250 г?

6. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 4 см, а сторона основания равна 6 см. Найдите объём пирамиды.

7. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а высота - 12 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

8. Радиус основания цилиндра равен 2 см, высота – 5 см, чему равен объем цилиндра?

9. Найдите объём конуса, если его образующая равна 12 см, а угол при вершине равен 120°.

10. Объем конуса равен 24. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

11. Объем параллелепипеда, описанного около сферы равен 216. Найти радиус сферы.

2 вариант

1. Найдите объём прямого параллелепипеда, если его основание имеет стороны 3 см и 4 см, угол между ними 30°, а боковые рёбра равны 6 см..

2. Найти объём прямоугольного параллелепипеда, у которого стороны основания равны 12 см и 16 см, а диагональ параллелепипеда составляет 45^o с плоскостью основания. Найти объём прямоугольного параллелепипеда, у которого стороны основания равны 12 см и 16 см, а диагональ параллелепипеда составляет 45^o с плоскостью основания.

3. Основанием прямой призмы является ромб со стороной 6 см и острым углом в 60^o. Меньшее из диагональных сечений является квадратом. Найти объём призмы.

4. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и катетом 8 см. Меньший катет треугольника в основании призмы равен диагонали меньшей из боковых граней. Найти объём призмы.

5. 1. В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45^o . Сторона основания пирамиды равна 6 см. Найти объём пирамиды.

6. 2.В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 10 дм, а высота равна 8 дм. Найдите объём пирамиды.

7. Сколько литров воды вмещает яма, вырытая в виде усечённой пирамиды, если высота ямы 1,5м, сторона нижнего основания 0,8м, верхнего – 1,2м?

8. Радиус основания цилиндра равен 3 см, высота – 4 см, чему равен объем цилиндра?

9. Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объем конуса.

10.Сколько стоит покраска конического шпиля башни, если длина окружности его основания равна $18{,}84 м$, а угол между образующими в осевом сечении составляют 60^0 Покраска $1 м^2$ стоит 150 руб.

11.Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения, если объём шара равен 288π, а площадь сечения равна 27π.

Практическая работа № 6

Решение прикладных задач на расчет объёмов деталей строительных конструкций, определение объема земляных работ

Цель работы:
На конкретных примерах научиться вычислять объёмы геометрических тел.
Знания:
1. Понятие о многогранниках и фигурах вращения, формулы для вычисления их объёмов.
Умения:
1. Вычисление объёмов геометрических тел.
Содержание работы:

Краткие теоретические сведения

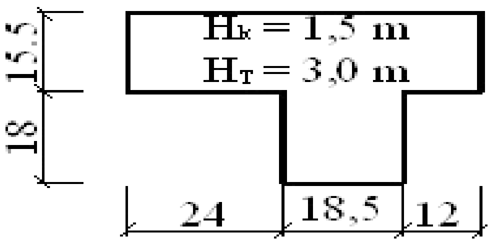
В общем случае объем земляных работ при отрывке котлована будет:

$$V_K = \frac{h_{ср}}{6}(F_1 + F_2 + 4F_0),$$

Где $h_{ср}$– средняя глубина котлована, м;

F1, F2, F0 – площадь котлована соответственно понизу, поверху и посередине, м^2.

$$F_0 \neq \frac{(F_1 + F_2)}{2}$$



$h_{max1} = h_{min} + il = 1,5 + 0,020 \times 15,50 = 1,86$ м.

$$h_{ср1} = \frac{(h_{max\,1} + h_{min})}{2} = \frac{1,5 + 1,86}{2} = 1,68 м;$$

Средний размер сторон котлована:

$a_{11} = 15,50$ м. $a_{12} = a_{11} + 2h_{ср} \times m = 15,5 + 2 \times 1,68 \times 0.67 = 17,76$ м.

$$a_0 = \frac{a_{11} + a_{12}}{2} = \frac{15,50 + 17,76}{2} = 16,63 м$$

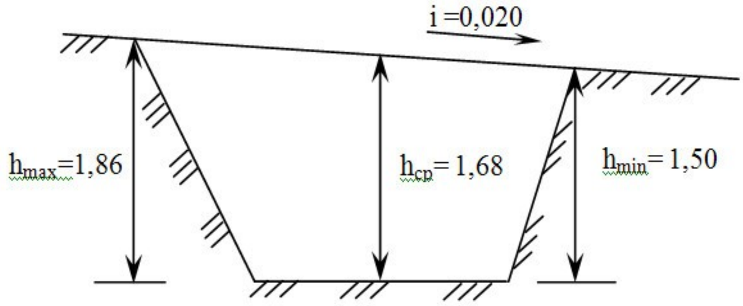
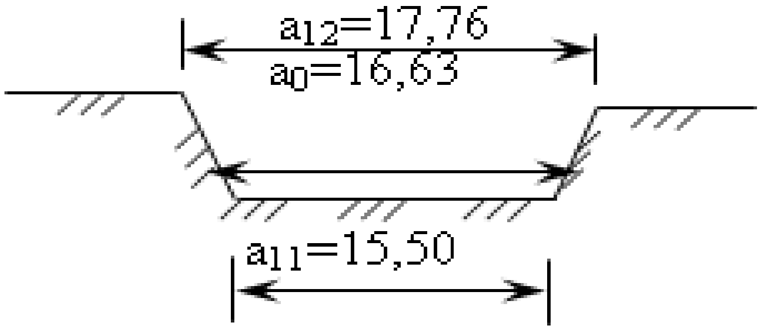


Рис. 1 Котлован под здание



Средний размер сторон котлована:

b_{11} = 54,50 м; $b_{12} = b_{11} + 2h_{ср} \times m$ = 54,50 + 2 ×1,68 × 0.67 = 56,76 м;

$$b_{01} = \frac{b_{11} + b_{12}}{2} = \frac{54,50 + 56,76}{2} = 55,63 м,$$

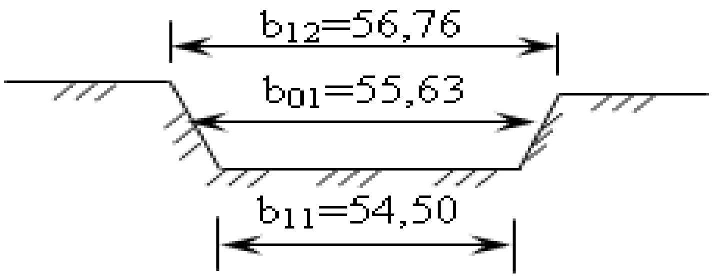


Рис. 2 Котлован под здание

$F_{11} = a_{11}b_{11}$= 15,50 ×54,50 = 845 м^2;

$F_{12} = a_{12}b_{12}$ = 17,76 × 55,63 = 988 м^2;

$F_0 = a_0 b_0$ = 16,63 × 55,63 = 926 м^2;

$$V_{к1} = \frac{1,68}{6}(845 + 988 + 4 \cdot 926) = 1551 м^3;$$

$h_{max1} = h_{min} + il$ = 1,86 + 0,020 × 18,00 = 2,28 м.

$$h_{ср1} = \frac{(h_{max\,1} + h_{min})}{2} = \frac{2,28 + 1,86}{2} = 2,07 м;$$

i =0,020

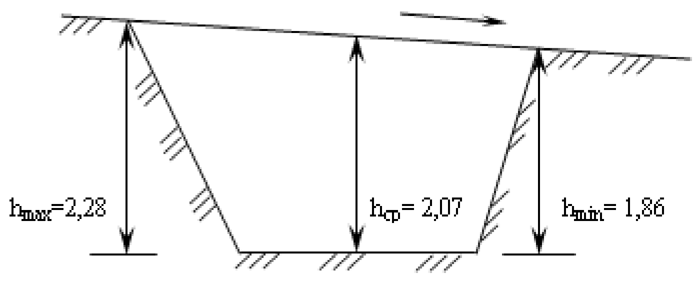
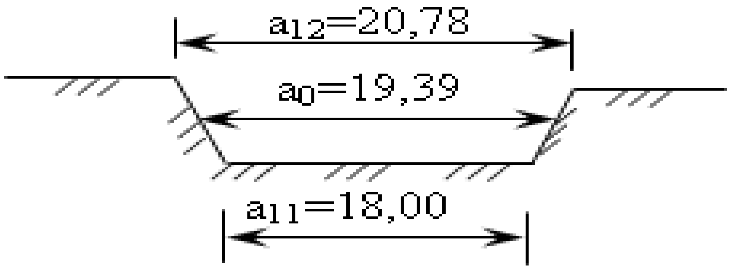


Рисунок 3 Котлован под здание

Средний размер сторон котлована:

a_{11}= 18,00 м. $a_{12} = a_{11} + 2h_{ср} \times m$ = 18,0 + 2 ×2,07 × 0.67 = 20,78 м.

$$a_0 = \frac{a_{11} + a_{12}}{2} = \frac{18,00 + 20,78}{2} = 19,39 м;$$



Средний размер сторон котлована:

b_{11} = 18,50 м; $b_{12} = b_{11} + 2h_{ср} \times m$ = 18,50 + 2 ×2,07 × 0.67 = 21,28 м;

$$b_{01} = \frac{b_{11} + b_{12}}{2} = \frac{18,50 + 21,28}{2} = 19,89 м;$$

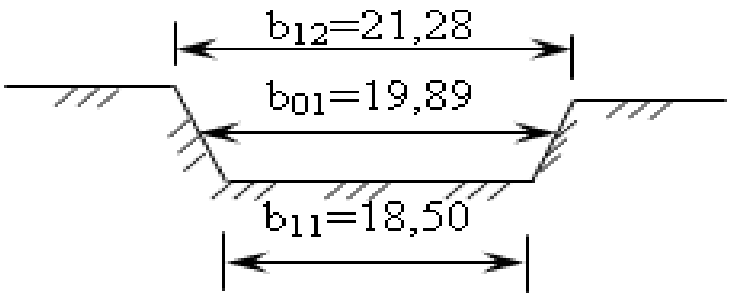


Рисунок 4 Котлован под здание

$F_{11} = a_{11} b_{11}$ = 18,00 × 18,50 = 333 м^2;

$F_{12} = a_{12} b_{12}$ = 20,78 ×21,28 = 443 м^2;

$F_0 = a_0 b_0$ = 19,39 × 19,89 = 386 м^2;

$$V_{к2} = \frac{2,07}{6}(333 + 443 + 4 \cdot 386) = 801 м^3;$$

$V = V_1 + V_2 = 1551 + 801 = 2352$ м^3;

Объем земляных работ при отрыве траншеи:

$$V_T = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot L,$$

где F_1, F_2 – площади поперечного сечения траншеи на её концах в м^2,

L – длина траншеи в м.(L=50 м.);

Ширину траншеи по дну принимаем b_1 = 0,7 м;

Глубину траншеи($h_{тр}$) принимаем равной 3,00 м;

Крутизну откоса(m) устанавливаем в зависимости от вида грунта и глубины траншеи (m = 0,75);

$b_2 = b_1 + 2h \times m = 0,7 + 2 \cdot 3,00 \cdot 0,75 = 4,12$ м. ;

$F_1 = h(b_1 + b_2)/2 = 3,00 \cdot (0.7+4.12)/2 = 7,23$ м^2;

$h_{max1} = h_{min} + il = 3 + 0{,}010 \times 50 = 3{,}50$м.

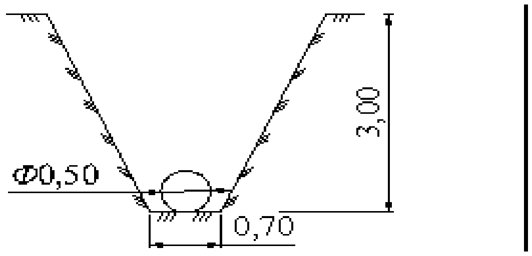
$b_3 = b_1 + 2h_{max1} \times m = 0{,}7 + 2 \cdot 3{,}50 \cdot 0{,}75 = 5.95$ м. ;

$F_2 = h_{max1}\,(b_1 + b_3)/2 = 3{,}50 \cdot (0.7+5.95)/2 = 11.64$ м^2;

$V_{T1} = F_1 \times L = 7{,}23 \cdot 50 = 361.5$ м^3;

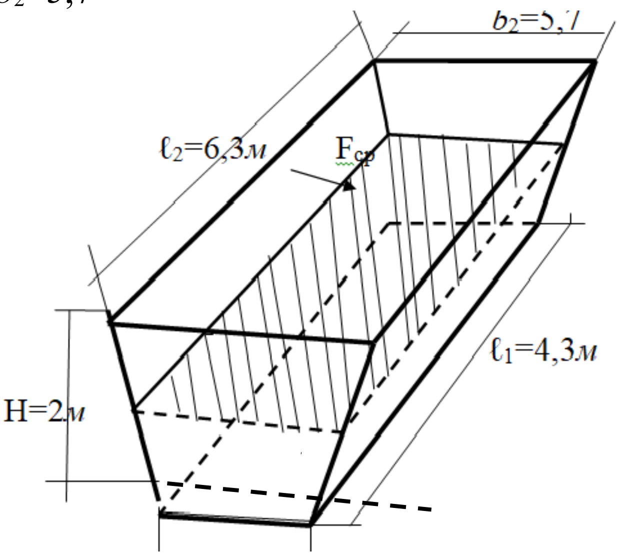
$V_{T2} = F_2 \times L = 11{,}64 \cdot 50 = 582$ м^3;

$V = (V_{T1} + V_{T2})/2 = (361.5+582)/2 = 471.75$ м^3;

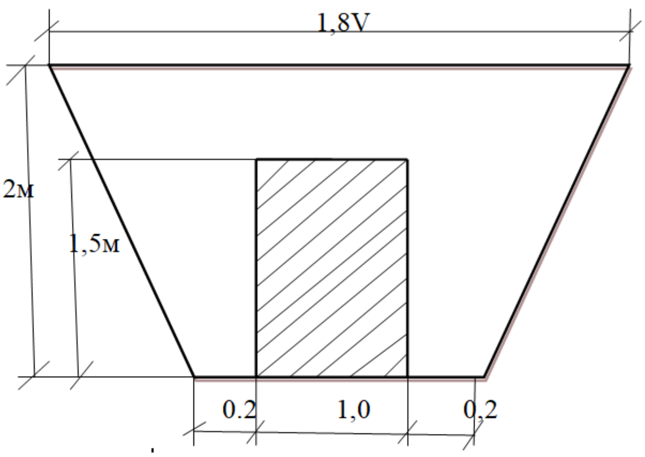


Задания для практической работы:

Задача 1. Определить объём котлована, имеющего вид (смотрите рисунок). b_2=5,7



Задача 2. Определить объём обратной засыпки котлована, если внутри установлен фундамент в форме правильной призмы. Данные смотреть на рисунке, изображенном в разрезе.



Практическая работа № 7

Раскрытие различных неопределённостей

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять пределы с различными видами неопределённостей.

Знания (актуализация):

1. Определения предела функции.

Умения:

1. Вычисление пределов функций: раскрытие неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};\infty-\infty;1^{\infty}\right]$.

Содержание работы:

Типы неопределённостей и их виды

1 тип Неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ *в пределе*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_k x^k+b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_0}=\begin{cases}0, \text{если } n<k\\ \infty, \text{если } n>k\\ \frac{a_n}{b_k}, \text{если } n>k\end{cases}$$

Примеры*:*

1) $\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 5x^2-3x+8}{2x^2-1}=\dfrac{5}{2}$(т.к. старшие степени числителя и знаменателя равны, то делим коэффициенты при старших степенях *x*).

2) $\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 5x^3-3x+8}{2x^2-1}=\infty$(т.к. старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя)

2 тип Неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ *в пределе* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Для раскрытия неопределённости необходимо либо разложить числитель и знаменатель на множители, либо умножить выражение содержащее корни на сопряжённое.

Примеры:

1) $\dfrac{\lim\limits_{x\to 3} x^2-5x+6}{x^2-9}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}x^2-5x+6=0\\ x_1=2\, x_2=3\end{matrix}\right|=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}{(x+3)}=\left[\dfrac{3-2}{3+3}\right]=\dfrac{1}{6}$

2) $\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}2x+3-9}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}2x-6}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=$

$\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}2}{\sqrt{2x+3}+3}=\left[\dfrac{2}{3+3}\right]=\dfrac{1}{3}$

3 тип I-ый замечательный предел и основные эквивалентности:

$$\frac{\lim\limits_{x\to0}\sin x}{x}=1$$

При $\boldsymbol{x\to0}$ имеют место следующие неопределённости:

$\sin x \quad x\; tg\, x \quad x \arcsin x \quad x\; arctg\, x \quad x$

$1-\cos x \quad \frac{x^2}{2}\, e^x-1 \quad x \ln(1-x) \quad x$

Примеры:

$$\frac{\lim\limits_{x\to0}\sin^2 3x}{1-\cos 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to0}(3x)^2}{\frac{(5x)^2}{2}}=\frac{\lim\limits_{x\to0} 9x^2}{\frac{25x^2}{2}}=\frac{18}{25}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to0}\ln(1-x)}{x^2-x}=\frac{\lim\limits_{x\to0}-x}{x(x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to0}-1}{(x-1)}=\frac{-1}{-1}=1$$

4 тип II -ой замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Примеры:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}=¿\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3}{x+1}-1\right)^{x-1}=¿\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3-x-1}{x+1}\right)^{x-1}=¿¿¿¿$$

$$¿\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{x-1}=¿\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-4}}\right)^{\frac{-4}{x+1}\cdot(x-1)}=¿\lim_{x\to\infty}(e)^{\frac{-4x+4}{x+1}\cdot}=e^4¿¿$$

Задания для практической работы:

Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*
«3»		
а) $\lim\limits_{x\to4}\frac{5x+2}{2x+3}$	а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x-8}{4x+2}$	а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x+2}{5x-1}$
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-8x}{4x+5}$
в) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-36}{x-6}$	в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25}$	в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$
г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 5x}$
д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$
«4»		
а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$	а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-4x+5}{x^2+6}$	а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3+5x-2}$
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}$

в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}$	в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$	в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$
г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg4x}{\sin3x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin3x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{\sin3x}$
д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{2x}$	∂¿ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{3x}$	∂¿ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{5x}$
«5»		
а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$	а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$	а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-3x^2+2x}{4x^3-2x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+5}{x^3+4}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{300x-1000}$
в) $\lim\limits_{x\to1}$ $\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$	в) $\lim\limits_{x\to2}$ $\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}$ $\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$
г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{\sin^2\frac{x}{5}}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg^2 4x}{\sin^2 x}$
д)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{5x}$	д)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3x}$	∂¿ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{4x}$

Практическая работа № 8

Вычисление производных сложных функций и высших порядков

Цель работы:

Проверить умения нахождения производной сложной функции.

Знания:

1. Определение производной и её свойства.
2. Понятие сложной функции.
3. Формула вычисления производной сложной функции.

Умения:

1.Вычисление производной заданной сложной функции.

Содержание работы:

Таблица производных основных элементарных функций:

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}\ \ (\alpha\neq0)$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Основные правила нахождения производной:

$(c)'=0$; $(x)'=1$; $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(cu)' = cu'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Производная сложной функции

Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, то $y=f(\varphi(x))$ - сложная функции, тогда её производная вычисляется по формуле $y'_x = y'_u u'_x$, то есть $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\,\varphi'(x)$. Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: *производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.*

Примеры:

1.Найти производную сложной функции: $y=\ln(x^3-3x^2+4x)$.

Положим $y=\ln u$, где $u=x^3-3x^2+4x$ получим:

$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \left(\ln(x^3-3x^2+4x)\right)' = \frac{1}{u}\cdot(x^3-3x^2+4x)' =$ ¿

¿ $\frac{1}{x^3-3x^2+4x}\cdot(3x^2-6x+4) = \frac{3x^2-6x+4}{x^3-3x^2+4x}$

2. .Найти производную сложной функции: $y=\cos^2\frac{x}{6}$.

Положим $y=u^2, u=\cos v, v=\frac{x}{6}$, получим:

$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u\cdot(-\sin v)\cdot\frac{1}{6} = 2\cos\frac{x}{6}\cdot\left(-\sin\frac{x}{6}\right)\cdot\frac{1}{6} = \frac{-1}{6}\sin\frac{x}{3}$

Задания для практической работы:

Вычислите производные сложных функций:

Вариант 1

1) $y=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$ 2) $y=\sqrt{x^2+4}$ 3) $y=2^{\arcsin x^2}$ 4) $y=\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 5) $y=\frac{1}{(5x-1)^3}$

Вариант 2

1) $y=\sin(2x^2-3x+1)$ 2) $y=\cos^3(2x-1)$ 3) $y=\left(\sqrt{x}+\frac{x^2}{4}\right)^3$

4) $y=\ln(\ln x)$ 5) $y=e^{arctg\,4x}$

Вариант 3

1) $y=\cos(3x^2-4x)$ 2) $y=\sin^3(1-2x)$ 3) $y=(x^2-2\sqrt{x})^4$

4) $y=\log_2(2x-5)$ 5) $y=e^{-x^3}$

Вариант 4

1) $y=tg(x^3-1)$ 2) $y=5^{x^2-3x+5}$ 3) $y=\sqrt[3]{(7-2x)^2}$ 4) $y=\frac{1}{\ln 3x}$

5) $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

Вариант 5

1) $y=ctg(2-x^2)$ 2) $y=\ln(\cos(5x))$ 3) $y=2^{\frac{1}{x}}$ 4) $y=\cos(\cos x)$

5) $y=\sqrt{3x-4}$

Практическая работа № 9

Исследование функции с помощью производной

Цель работы:

Используя схему исследования функции научиться исследовать функции и строить их графики.

Знания:

1. Понятие экстремумов функции и её точек перегиба.
2. Понятие асимптот и их классификация.

Умения:

1.Построение графиков функций.

Содержание работы:

Общая схема исследования функции и построение её графика.

1. Найдите область определения функции.
2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.
3. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат (нули функции).
4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.
5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.
6. Определите наличие асимптот.
7. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример:

Построить график функции: $y=\frac{x^2}{x+1}$

1. $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

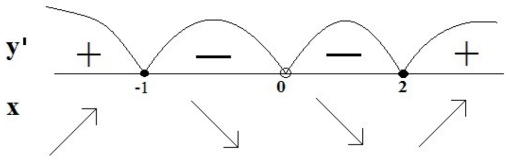
2. Т.к. область определения не симметрична относительно начала координат, то функция не является ни чётной, ни нечётной (т.е. общего вида).

3. При $x=0$, $y(0)=0$ – это единственная точка пересечения графика с осями координат.

4. $y^{'}=\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{'}=\frac{\left(x^2\right)^{'}(x+1)-x^2(x+1)^{'}}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:

$$\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}=0\Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=-2 \\ x\neq -1 \end{matrix}$$



x=-2 – т. max y_{max} *=y(2) = -4*

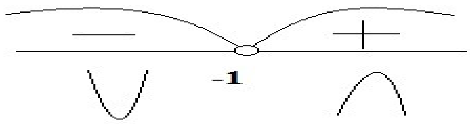
x=0 – т. min y_{min} *=y(0) = 0*

5. Вычислим вторую производную и приравняем её к нулю:

$$y^{''}=\left(\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right)^{'}=\frac{\left(x^2+2x\right)^{'}(x+1)^2-\left(x^2+2x\right)\left((x+1)^2\right)^{'}}{(x+1)^4}=¿$$

$$¿\frac{(2x+2)(x+1)^2-\left(x^2+2x\right)2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2(x+1)\left(x^2+2x+1-x^2-2x\right)}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\frac{2}{(x+1)^3}=0$$



Точек перегиба у данной функции нет.

6. Определим наличие асимптот:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}=\infty$т.е. горизонтальных асимптот нет.

б) Рассмотрим односторонние пределы в точке *x=-1:*

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^2}{x+1}=¿¿$$

Т.к. в точке *x=-1*функция терпит бесконечный разрыв, то график функции имеет вертикальную асимптоту *x=-1*

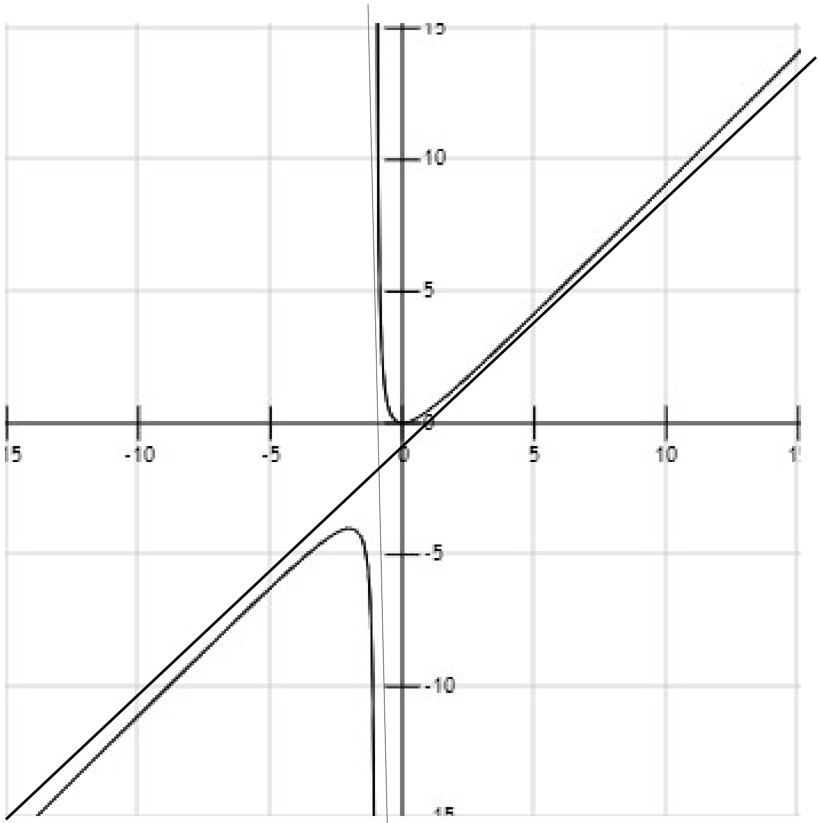
в) Для отыскания вертикальной асимптоты в виде *y=kx+b* вычислим следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=¿\frac{\lim\limits_{x\to\infty}x^2}{(x+1)x}¿\frac{\lim\limits_{x\to\infty}x}{(x+1)}=1¿$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=¿\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}-x}{x+1}=-1¿$$

Таким образом, прямая *y=x-1* служит наклонной асимптотой графика.

7. Используя полученные данные, строим график функции:



Задания для практической работы:

<u>ЗАДАЧА 1</u>

Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

1. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

2. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$

3. $y = x^3 + 12x^2 + 45x + 50$

4. $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

5. $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$

6. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

7. $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 28$

8. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

9. $y = x^3 - 6x^2 - 15x - 8$

10. $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$

<u>ЗАДАЧА 2</u>

Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

1. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$. **2.** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x - 3}$. **3.** $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

4. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$. **5.** $y = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x}$. **6.** $y = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$.

7. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 8}{x + 4}$. **8.** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 8}{x - 4}$. **9.** $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 5}$.

Практическая работа № 10

Вычисление неопределённых интегралов с помощью замены переменной

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить неопределенный интеграл с помощью замены переменных.

Знания:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

Умения:

1. Вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования.
2. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменной

Содержание работы:

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,(n\neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$	13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
2. $\int dx=x+C$	8. $\int tgxdx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert+C$
3. $\int \frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$	9. $\int ctgxdx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
4. $\int \sin xdx=-\cos xdx$	10. $\int e^x dx=e^x+C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
5. $\int \cos xdx=\sin xdx$	11. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$	

Непосредственное интегрирование – это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов. Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

1) деление числителя на знаменатель почленно;
2) применение формул сокращенного умножения;
3) применение тригонометрических тождеств.

Пример 1. Найти интеграл $\int (3x^2+2x-5)\,dx$

Решение.

$$\int (3x^2+2x-5)dx=\int 3x^2dx+\int 2xdx-\int 5dx=x^3+x^2-5x+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{7x^2+x-1}{x^3}dx$

Решение. Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель.

$$\int \frac{7x^2+x-1}{x^3}dx=7\int \frac{dx}{x}+\int x^{-2}dx-\int x^{-3}dx=7\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int(1+e^x)^3dx$

Решение. Возводим в куб и интегрируем каждое слагаемое.

$$\int(1+e^x)^3dx=\int(1+3e^x+3e^{2x}+e^{3x})dx=\int dx+3\int e^x dx+3\int e^{2x}dx+\int e^{3x}dx=$$

$$=x+3e^x+\frac{3}{2}e^{2x}+\frac{1}{3}e^{3x}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{2x-3}{x^2-4}dx$

Решение. Разлагаем подынтегральную дробь на две слагаемых дроби, деля числитель почленно на знаменатель.

$$\int \frac{2x-3}{x^2-4}dx=\int \frac{2x}{x^2-4}dx-3\int \frac{dx}{x^2-4}=\ln|x^2-4|-\frac{3}{4}\ln|\frac{x-2}{x+2}|+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int\frac{x^2}{x^2+5}dx$

Решение. Выделим в неправильной дроби целую часть и правильную дробь.

$$\int\frac{x^2}{x^2+5}dx=\int\frac{(x^2+5)-5}{x^2+5}dx=\int\left(1-\frac{5}{x^2+5}\right)dx=\int dx-5\int\frac{dx}{x^2+5}=$$

$$=x-\sqrt{5}\,arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Пример 6. Вычислить $\int(3x-4)^4dx$

Решение. Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной$t=3x-4$

$$\int (3x-4)^4 dx = \left| \begin{matrix} t=3x-4 \\ dt=(3x-4)' dx = 3dx \\ dx=\frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = \int t^4 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{t^5}{15}+C=¿$$

$$¿\frac{(3x-4)^5}{15}+C$$

Пример 7. Вычислить $\int \frac{x^2}{x^3+8}dx$

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной $t=x^3+8$

$$\int \frac{x^2}{x^3+8}dx = \left| \begin{matrix} t=x^3+8 \\ dt=(x^3+8)' dx=3x^2dx \\ x^2dx=\frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{t} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\cdot\ln|t|+C=\frac{1}{3}\cdot\ln|x^3+8|+C$$

Пример 8. Вычислить $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+4}dx$

Решение. Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной $t=\sin x$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+4}dx = \left| \begin{matrix} t=\sin x \\ dt=(\sin x)' dx=\cos x\, dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{\sin x}{2}+C$$

Задания для практической работы:

Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*
$\int \left(2\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{2x}+5\right)dx$	$\int (x-1)(x+2)dx$	$\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$
$\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$	$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$	$\int \frac{x^2-2x+1}{x^3}dx$
$\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$	$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$	$\int tg^2 xdx$
$\int \frac{dx}{(5-3x)^5}$	$\int \frac{dx}{11-4x}$	$\int \sqrt{8x-9}\,dx$
$\int x\sqrt{x^2-7}\,dx$	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$	$\int \frac{xdx}{x^2+6}$
$\int \frac{e^x dx}{e^x+4}$	$\int \sin x \cos^2 xdx$	$\int \frac{e^x dx}{(e^x-5)^3}$

Практическая работа № 11

Вычисление неопределённых интегралов с помощью метода интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций

Цель работы:

На конкретных примерах научиться находить неопределенный интеграл с помощью формулы интегрирования по частям, а также интегрировать рациональные функции.

Знания:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

Умения:

1. Вычисление неопределённых интегралов методом интегрирования по частям.
2. Вычисление неопределённых интегралов от рациональных функций.

Содержание работы:

Метод интегрирования по частям сводится к вычислению интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Для вычисления интеграла по этой формуле необходимо подынтегральное выражение исходного интеграла представить как *udv.* Т.е. часть выражения принять за *u*, а часть - за *dv.*

Пример 1. Вычислить интеграл с помощью формулы интегрирования по частям: $\int x^2 \ln x dx$

Решение:

Положим $u=\ln x$ $dv=x^2dx$ дифференцируя *u* и интегрируя *dv* получим:

$$du=\frac{dx}{x} \qquad v=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}$$

Постоянная *C* в этом случае не ставится; она будет поставлена в окончательном результате, когда будет найден данный интеграл.

Обращаемся теперь к формуле интегрирования по частям:

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Пример 2.

$$\int x^2 \cos x dx = \text{¿}|U=x^2; \quad U' = 2x\,\text{¿}|\text{¿}\,\text{¿}\,\text{¿}\,\text{¿}$$

$$=\text{¿}|U=2x; \quad \text{¿}\; U' = 2\,\text{¿}|\text{¿}\,\text{¿}\,\text{¿}$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C;$$

Пример 3.

$$\int \arccos x\ dx = \text{¿}|U=\arccos x; \ U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{¿}|\text{¿}\,\text{¿}\,\text{¿}\,\text{¿}\,\text{¿}$$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены переменной)

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = ¿\left|t=1-x^2 ¿\right|\left|dt=-2x\ dx ¿\right|¿¿¿$$

$$¿$$

в итоге получаем $\int \arccos x\ dx = x\cdot\arccos x - \sqrt{1-x^2}+C;$

Интегрирование рациональных дробей осуществляется с помощью разложения на простейшие дроби:

Пример 4.

$$\int \frac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}dx$$

Решение:

Знаменатель дроби раскладывается на множители:

x^3- $7x^2+14x-8=(x-1)(x-2)(x-4)$

Так как каждый из двучленов входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}$$

Освобождаясь от знаменателя, получим

$$x^2+2x+6=A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2)$$

Следовательно,

$$x^2+2x+6=A(x^2-6x+8)+B(x^2-5x+4)+C(x^2-3x+2)$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$x^2+2x+6=(A+B+C)x^2+(-6A-5B-3C)x+(8A+4B+2C)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -6A-5B-3C=2 \\ 8A+4B+2C=6 \end{cases}$$

Из которой найдем $A=3$, $B=-7$, $C=5$.

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{3}{x-1}+\frac{-7}{x-2}+\frac{5}{x-4}$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}dx=\int\frac{3dx}{x-1}+\int\frac{-7dx}{x-2}+\int\frac{5dx}{x-4}=3\int\frac{dx}{x-1}-7\int\frac{dx}{x-2}+5\int\frac{dx}{x-4}=$$

$$¿3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C$$

Пример 5. $\int \frac{x^6}{x^2-x+1}dx$.

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2-x+1}=x^4+x^3-x-1+\frac{1}{x^2-x+1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралы, получим:

$$\int\left(x^4+x^3-x-1+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx=\int x^4dx+\int x^3dx-\int xdx-\int 1dx+\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

Задания для практической работы:

Интегрирование по частям

1. $\int x\sin x dx$
2. $\int \ln x dx$
3. $\int x^2e^x dx$

Интегрирование рациональных дробей

1. $\int\frac{x+2}{x(x-3)}dx$
2. $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$
3. $\int\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}dx$

Практическая работа № 12

Вычисление определённых интегралов

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять определенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить определенный интеграл с помощью замены переменных и методом интегрирования по частям.

Знания:

1. Понятие определённого интеграла, его основных свойств.

Умения:

1. Вычисление определённых интегралов методом непосредственного интегрирования.

2. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменной и по частям.

Теоретические сведения.

Определённый интеграл вычисляется с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример 1

Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 (5x^5 + 4x^3 - 5x - 2)dx$.

Решение:

$$\int_0^1 (5x^5 + 4x^3 - 5x - 1)dx = 5\int_0^1 x^5 dx + 4\int_0^1 x^3 dx - 5\int_0^1 x dx - 2\int_0^1 dx = \left(\frac{5x^6}{6} + \frac{4x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} - 2x\right)\Big|_0^1 =$$

$$¿\left(\frac{5\cdot 1^6}{6} + \frac{4\cdot 1^4}{4} - \frac{5\cdot 1^2}{2} - 2\cdot 1\right) - 0 = -4\frac{1}{3}$$

Пример 2

Вычислите определенный интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(ctg\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{1-\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 3

Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$.

Решение:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3} arctg\frac{x}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} arctg\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} arctg\, 0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{\pi}{18}.$$

Пример 4

Вычислите определенный интеграл $\int_4^5 (4-x)^3 dx$.

Решение:

$$\int_4^5 (4-x)^3 dx = \frac{(4-x)^4}{-4}\Big|_4^5 = \frac{(4-5)^4}{-4} - \frac{(4-4)^4}{-4} = -\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}.$$

Метод интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, произведение функций, а в ряде случаев – и частное.

Данный метод позволяет свести исходный определенный интеграл к более простому виду либо к табличному интегралу. Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Если функции u= u(x) и v = v(x) имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Самое сложное, что есть в этом методе – это правильно определить, какую часть подынтегрального выражения брать за u, а какую за dv

Рассмотрим стандартные случаи.

- Для интегралов вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin(ax)dx$ или $\int P(x)\cos(ax)dx$, где $P_n(x)$ - многочлен, *a*– число. Удобно принять **u=P(x)**, а за **dv** обозначить все остальные сомножители.
- Интегралы вида $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\,arctgx\,dx$, $\int P(x)\,arcctgx\,dx$. Удобно принять **P(x)** = **dv**, а за **u** все остальные сомножители.
- Интегралы вида $\int \sin bx\cdot e^{ax}dx$, $\int \cos bx\cdot e^{ax}dx$, где a и b числа. За **u** можно принять функцию $\mathbf{u = e^{ax}}$.

Пример 5. Вычислить $\int_1^2 x e^x dx$

Решение.

$$\int_1^2 x e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right| = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = \text{¿}$$

$$\text{¿} 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Пример 6. Вычислить $\int_0^\pi xsinx\,dx$

Решение.

$$\int_0^\pi xsinx\,dx = \left| \begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ \sin x\,dx = dv \Rightarrow v = -\cos x \end{matrix} \right| = -xcos\,x\Big|_0^\pi + \int_1^2 \cos x\,dx = \text{¿}$$

$$\text{¿} -\pi\cdot(-1) + 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

Интегрирование заменой переменной (подстановкой).

Пусть для интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка x = φ(t).

Если: 1) функция x = φ(t) и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при t∈[α;β];

2) множеством значений функции x = φ(t) при t∈[α;β] является отрезок [a;b]

3) φ(α) = a и φ(β) = b, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi\text{¿}(t)\,dt=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$$

Отметим, что: 1) При вычислении определённого интеграла методом замены переменной возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки x = φ(t) применяют подстановку t = g(x);

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

Алгоритм вычисления определенного интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Находят новые пределы интегрирования.
5. Производят замену под интегралом.
6. Находят полученный интеграл.

Пример 7. Вычислить $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx$

Решение. Замена: t = x^2 -16; *dt* = 2*x dx;* *dx*= $\frac{dt}{2x}$.

Найдём новые пределы интегрирования. При *x* = 4, α= t(4) = 4^2 -16 =0; *x* = 5, β= t(5) = 5^2 -16 =9.

Получаем:

$$\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx=\int_0^6\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^6 t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^9=\frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^9=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{9}=9.$$

Пример 8. Вычислить $\int_0^4\frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$

Решение. Замена: t = $\sqrt{2x+1}+1$, .

t -1 =$\sqrt{2x+1}$, 2x + 1 = $(t – 1)^2$, $x=\frac{(t-1)^2-1}{2}=\frac{t^2-2t}{2}$, dx = (t -1)dt.

Найдём новые пределы интегрирования. При *x* = 0, α= t(0) = 2; *x* = 4, β=t(4)=4.

Получаем:

$$\int_0^4\frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}=\int_2^4\frac{(t^2-2t)\cdot(t-1)}{2t}dt=\frac{1}{2}\int_2^4(t\text{¿}-2)(t-1)\,dt=\text{¿}\frac{1}{2}\int_2^4(t\text{¿¿}2-3t+2)\,dt=\frac{1}{2}\text{¿¿¿¿}$$

$$\text{¿}\frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-24+8\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-6+4\right)=\frac{7}{3}.$$

Задания для практической работы.

Вариант 1.

1. $a)\int_{1}^{2}\left(3x^2-2x\right)dx$ б). $\int_{2}^{3}(1-x)^4dx$ в). $\int_{1}^{2}\left(4x^3-3x^2\right)dx$

2. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos 4x\,dx$; б) $\int_{0}^{1} x\ln(1+x)\,dx$

3. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int_{1}^{2}3x(1-x)^{17}dx$

Вариант 2.

1. а). $\int_{-2}^{1}\left(x^2-x\right)dx$ б). $\int_{-1}^{1}(7-5x)dx$ в). $\int_{1}^{0}(1-2x)^4dx$.

2. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

а) $\int_{0}^{3}(x-3)e^{-x}dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin x\,dx$

3. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int_{1}^{9}\frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$; б) $\int_{2}^{3}x(3-x)^7dx$

Практическая работа № 13

Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур

Цель работы:

1. Научиться вычислять определённые интегралы.
2. Познакомиться с понятием криволинейной трапеции
3. На конкретных примерах научиться находить площадь криволинейной трапеции

Знания:

1. Понятие определённого интеграла.
2. Свойства определённого интеграла.
3. Основные методы вычисления определённых интегралов.
4. Понятие криволинейной трапеции

5. Методы вычисления площади криволинейной трапеции

Умения:

1. Вычисление определённых интегралов.
2. Вычисление площади криволинейной трапеции

Содержание работы:

Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:

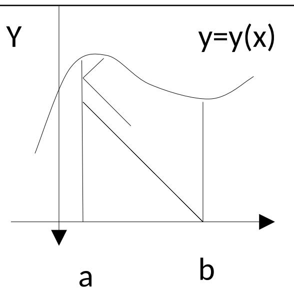


Рис.1

сверху - графиком непрерывной функции *y=y(x)*
снизу – осью OX (*y=0*)
слева – прямой *x=a*
справа – прямой *x=b*

Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S=\int_a^b y(x)\,dx \qquad (1)$$

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-2x+2$, x=-1, x=2 и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

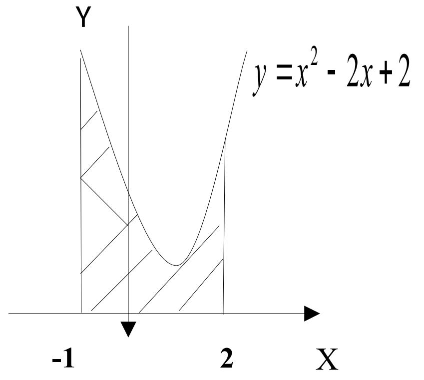
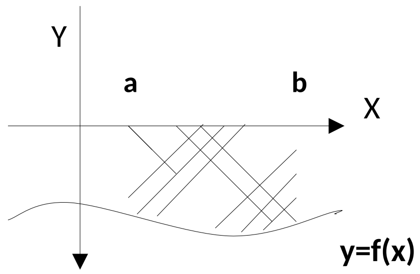


Рис. 2

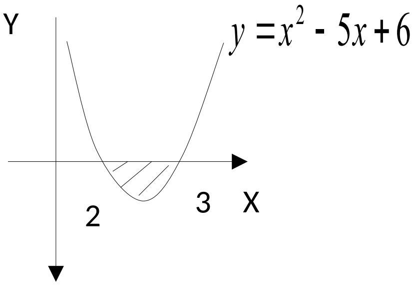
$$S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}-x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=$$
$$\left(\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)-\left(2^2-(-1)^2\right)+\left(2\cdot 2-2\cdot(-1)\right)=$$
$$3-3+6=6.$$

Ответ: 6 кв.ед.

Пусть y=f(x) – непрерывная функция при x $\in$ [a, b], график которой расположен ниже оси OX (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

 Рис. 3	$$S=\left\|\int_a^b f(x)dx\right\|$$ (2)

Пример 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2-5x+6$ и осью OX.
Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

 Рис. 4	$S=\left\|\int_2^3 (x^2-5x+6)dx\right\|=\left\|\frac{x^3}{3}\Big\|_2^3-\frac{5x^2}{2}\Big\|_2^3+6x\Big\|_2^3\right\|=$ ¿ $\left\|\left(\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{5\cdot 3^2}{2}-\frac{5\cdot 2^2}{2}\right)+(6\cdot 3-6\cdot 2)\right\|=$ ¿ $\left\|\frac{19}{3}-\frac{25}{2}+6\right\|=\left\|\frac{38-75+36}{6}\right\|=\left\|-\frac{1}{6}\right\|=\frac{1}{6}$ Ответ: 1/6 кв.ед.

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2+1$ и $y=-x+3$.
Решение: данная фигура (рис. 5)представляет собой разность криволинейных трапеций
Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: $x_1=-2$ и $x_2=1$.

$S=\int_{-2}^{1}(-x+3)dx-\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx$. Можно записать под один интеграл:

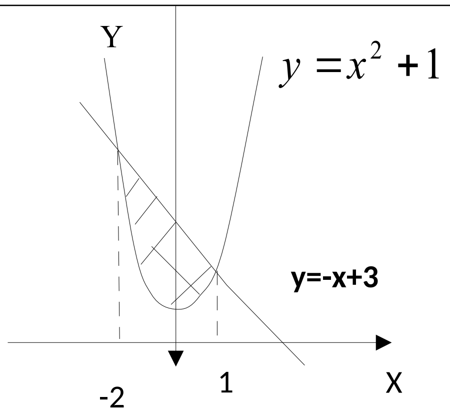


Рис. 5

$$S=\int_{-2}^{1}\left(-x+3-\left(x^2+1\right)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=$$

$$¿\,2x\Big|_{-2}^{1}-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1}=\left(2\cdot1-2\cdot(-2)\right)-\left(\frac{1^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}\right)=6-\left(-\frac{3}{2}\right)-3=4\frac{1}{2}$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

Пример 4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2+1$ и $y=-x+3$, и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций S=S$_1$+S$_2$, где $S_1=\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)dx$ и $S_2=\int_{1}^{3}\left(-x+3\right)dx$. Получим формулу:

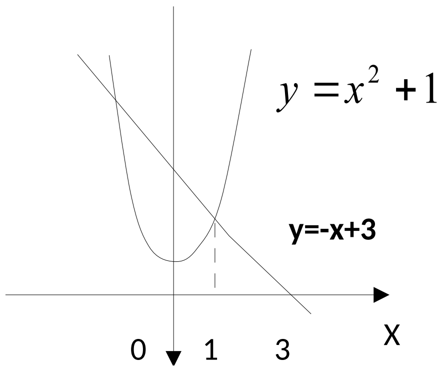


Рис. 6

$$S=\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)dx+\int_{1}^{3}\left(-x+3\right)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}+x\Big|_{0}^{1}-\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{3}+$$

$$+3x\Big|_{1}^{3}=$$

$$¿\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+(1-0)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^3}{2}\right)+(3\cdot3-3\cdot1)=$$

$$¿\,\frac{1}{3}+1-4+6=3\frac{1}{3}$$

Ответ: $3\frac{1}{3}$ кв.ед.

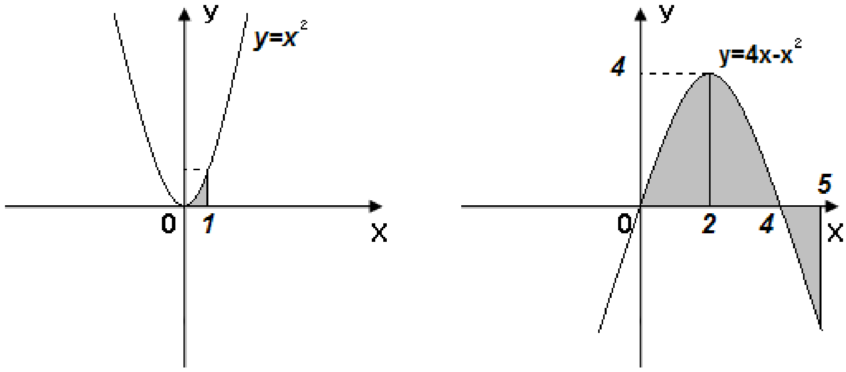
Задания для практической работы:

Задание 1 Вычислить определённые интегралы:

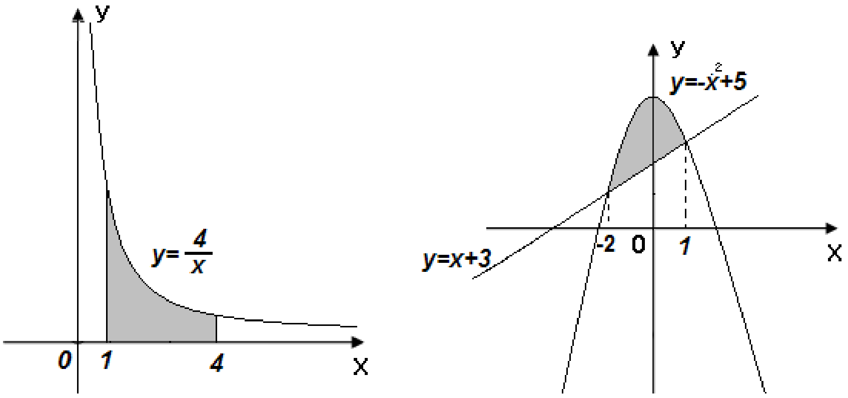
Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$	$\int_{2}^{3}(2x-1)(3x+5)dx$	$\int_{0}^{8}\sqrt[3]{x}(x+1)dx$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}2x\sin x dx$	$\int_{0}^{1}x\cdot2^x dx$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}5x\cos x dx$
$\int_{-1}^{0}\frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^3+1)}}$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\sin^2 x dx$	$\int_{0}^{1}x\left(x^2-3\right)^5 dx$

Задание 2 Вычислить площади фигур

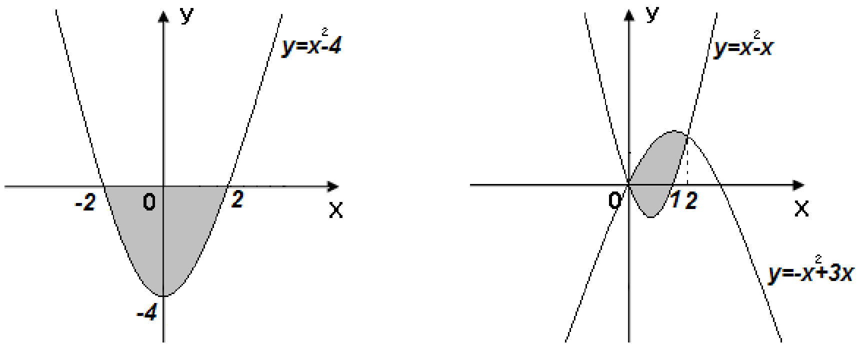
Вариант 1



Вариант 2



Вариант 3



Практическая работа № 14

Решение вероятностных задач

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять вероятности случайных событий.

Знания:

1. Понятие случайного события.
2. Классическое определение вероятности.

Умения:

1. Вычисление вероятности случайного события с применением комбинаторных формул.

Содержание работы:

1. Размещения

Рассмотрим простейшие понятия, связанные с выбором и расположением некоторого множества объектов.

Подсчет числа способов, которыми можно совершить эти действия, часто производится при решении вероятностных задач.

Определение. Размещением из n элементов по k ($k \leq n$) называется любое упорядоченное подмножество из k элементов множества, состоящего из n различных элементов.

Пример. Следующие последовательности цифр являются размещениями по 2 элемента из 3 элементов множества {1;2;3}: 12, 13, 23, 21, 31, 32.

Заметим, что размещения отличаются порядком входящих в них элементов и их составом. Размещения 12 и 21 содержат одинаковые цифры, но порядок их расположения различен. Поэтому эти размещения считаются разными.

Число различных размещений из n элементов по k обозначается A_n^k и вычисляется по формуле: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, где n! = 1·2·...·(n- 1)·n (читается «n–факториал»).

2. Перестановки

Определение. Перестановками из n элементов называются такие размещения из n элементов, которые различаются только расположением элементов.

Число перестановок из n элементов P_n вычисляется по формуле: $P_n = n!$

Пример. Сколькими способами могут встать в очередь 5 человек? Количество способов равно числу перестановок из 5 элементов, т.е. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

3. Сочетания

Определение. Сочетаниями из n элементов по k называются такие размещения из n элементов по k, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число различных сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k вычисляется по формуле: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

По определению 0!=1.

Для сочетаний справедливы следующие свойства:

1. $C_n^1 = n$
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. $C_n^n = C_n^0 = 1$
4. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Пример. Имеются 5 цветков разного цвета. Для букета выбирается 3 цветка. Число различных букетов по 3 цветка из 5 равно: $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

4. События

Познание действительности в естественных науках происходит в результате испытаний (эксперимента, наблюдений, опыта).

Испытанием или опытом называется осуществление какого-нибудь определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).

Таким образом, событие рассматривается как результат испытания.

Пример. Бросание монеты – это испытание. Появление орла при бросании – событие.

Наблюдаемые нами события различаются по степени возможности их появления и по характеру их взаимосвязи.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.

Пример. Получение студентом положительной или отрицательной оценки на экзамене есть событие достоверное, если экзамен протекает согласно обычным правилам.

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в результате данного испытания.

Пример. Извлечение из урны белого шара, в которой находятся лишь цветные (не белые) шары, есть событие невозможное. Отметим, что при других условиях опыта появления белого шара не исключается; таким образом, это событие невозможно лишь в условиях нашего опыта.

Далее случайные события будем обозначать большими латинскими буквами A,B,C... Достоверное событие обозначим буквой Ω, невозможное – Ø.

Два или несколько событий называются *равновозможными* в данном испытании, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным или менее возможным, чем другие.

Пример. При одном бросании игральной кости появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков - все это события равновозможные. Предполагается, конечно, что игральная кость изготовлена из однородного материала и имеет правильную форму.

Два события называются *несовместными* в данном испытании, если появление одного из них исключает появление другого, и *совместными* в противном случае.

Пример. В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Берем на удачу одну деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. Эти события несовместные.

Несколько событий образуют *полную группу событий* в данном испытании, если в результате этого испытания обязательно наступит хотя бы одно из них.

Пример. События из примера образуют полную группу равновозможных и попарно несовместных событий.

Два несовместных события, образующих полную группу событий в данном испытании, называются противоположными событиями.

Если одно из них обозначено через A, то другое принято обозначать через $\overline{A}$ (читается «не A»).

Пример. Попадание и промах при одном выстреле по цели - события противоположные.

5. Классическое определение вероятности

Вероятность события – численная мера возможности его наступления.

Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если всякий раз, когда наступает событие A, наступает и событие B.

События A_1,A_2, ..., A_n образуют *схему случаев*, если они:

1) равновозможны;

2) попарно несовместны;

3) образуют полную группу.

В схеме случаев (и только в этой схеме) имеет место классическое определение вероятности $P(A)$ события A. Здесь случаем называют каждое из событий, принадлежащих выделенной полной группе равновозможных и попарно несовместных событий.

Если n – число всех случаев в схеме, а m – число случаев, благоприятствующих событию A, то *вероятность события A* определяется равенством: $P(A)=\frac{m}{n}$.

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице.

2. Вероятность невозможного события равна нулю.

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей $0 \le P(A) \le 1$.

6. Операции над событиями. Теорема сложения вероятностей

Суммой, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий (в одном и том же испытании).

Пример. Бросаются две игральные кости. Пусть событие A состоит в выпадении 4 очков на 1 кости, а событие B – в выпадении 5 очков на другой кости. События A и B совместны. Поэтому событие $A+B$ состоит в выпадении 4 очков на первой кости, или 5 очков на второй кости, или 4 очков на первой кости и 5 очков на второй одновременно.

Пример. Событие A– выигрыш по 1 займу, событие B – выигрыш по 2 займу. Тогда событие $A+B$– выигрыш хотя бы по одному займу (возможно по двум сразу).

Произведением или пересечением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий (в одном и том же испытании).

Пример. События A и B состоят в успешном прохождении I и II туров соответственно при поступлении в институт. Тогда событие $A \times B$ состоит в успешном прохождении обоих туров.

Теорема. Если события A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) попарно несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Если события A_1 и A_2 совместны, то вероятность суммы двух совместных событий равна: $P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \mathrm{P}(A_1 \times A_2)$.

8. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Условной вероятностью $P(B/A)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot \mathrm{P}(B/A)$.

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого, т.е. $P(A) = P(A/B)$

Если события A и B независимы, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Задания для практической работы:

1. В коробке находятся $m+2$ синих, $n+3$ красных и $2n+1$ зеленых карандашей. Одновременно вынимают $m+3n+2$ карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет $m+1$ синих и $n+1$ красных.

2. В первой урне находятся $m+2$ шаров белого и n шаров черного цвета, во второй — $m+n$ белого и m синего, в третьей — $n+3$ белого и $m+1$ красного цвета. Из первой и второй урны наудачу извлекают по одному шару и кладут в третью. После этого из третьей вынимают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень при одном выстреле равна $\frac{m+n}{m+n+2}$. Производится $n+4$ выстрела. Найти вероятность того, что он промахнется не более двух раз.

4. Каждый избиратель независимо от остальных избирателей, отдаёт свой голос за кандидата А с вероятностью 0,1(m+n) и за кандидата В – с вероятностью 1-0,1(m+n). Оценить вероятность того, что в результате голосования на избирательном участке (5000 избирателей) один из кандидатов опередит другого:

а) ровно на 1900 голосов; б) не менее, чем на 1900 голосов

Таблица 1 (выбор параметра m)

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

Таблица 2 (выбор параметра n)

B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	3	5	4	2	1	5	4	1	3	2

Практическая работа № 15

Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм

Цель работы:

Научиться строить статистический ряд выборки и гистограммы.

Знания:

1. Понятие о выборочном исследовании.
2. Понятие о представлении статистических данных.

Умения:

1. Построение статистического ряда и гистограммы.

Содержание работы:

Предмет математической статистики составляют разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данный, получаемых в результате наблюдения случайных явлений.

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных, т.е. результатов наблюдения.

В математической статистике рассматривают две основных задачи:

1) Первая задача состоит в том, чтобы указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате поставленных экспериментов

2) Состоит в разработке методов анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка параметров распределения, вид которого неизвестен; оценка зависимой случайной величины от одной или нескольких случайных величин

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого неизвестен.

Изучение тех или иных явлений методами математической статистики служат решение многих вопросов, выдвигаемых наукой и практикой правильная организация технологического процесса наибольше целесообразное планирование и прочее.

И так, основная задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Генеральная и выборочная совокупность.

Совокупность всех объектов, подчинённых данному признаку, называется **генеральной совокупностью**. Число таких объектов называется **объёмом генеральной совокупности.**

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторых качественных или количественных признаков, характеризующие эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественными признаками может служить стандартность деталей, а количественным - контролируемый размер детали.

Обычно из всей совокупности отбирают ограниченное число объектов, которое изучают такую случайно отобранную совокупность, называют **выборочной совокупностью** или **выборкой.**

Выборка, достаточно хорошо описывающая всю генеральную совокупность, называется **репрезентативной.** Для того, чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке, необходимо, чтобы

объекты выборки правильно его представляли, т. е. выборка должна быть репрезентативной (представительной).

Для получение репрезентативной выборки необходимо ,чтобы все отображённые элементы имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. В случае большого объёма генеральной совокупности используют таблицу случайных чисел. Например, чтобы выразить 20объектов из пронумерованной генеральной совокупности можно записать 20 случайных чисел.

Элементы x_1, x_2,.. x_n случайно попавшие в выборку называются вариантами, а их кол-во n – объем выборки. Отобранные элементы располагают в порядке возрастания. Такая последовательность называется вариационным рядом.

Разность между максимальным и минимальными элементами называется **размахом выборки.**

Среди n-элементов выборки могут быть встречаться повторяющиеся.

Например x_1 – n_1 раз, x_2 – n_2 раз; x_n – n_n раз. Числа n_1, n_2, n_n называются частотами вариант.

Расположенное в порядке возрастания вариант последовательность пар чисел, составленная из вариант и их частот ($x_1;n_1$), ($x_2;n_2$) называется статистическим рядом или статистическим распределением. При этом пользуются табличной записью:

x_i	x_1	x_2	….
n_i	n_1	n_2	….

Пример: записать вариационный ряд и статистическое распределение выборки из числа учебных дней в году, пропущенных по болезни студентами. Определить размах выборки:

5,0,3,7,0,1,0,5,0,5,2,10,2,0,7,2,4,7,7,4

1) Найдем объем выборки: n=20
2) Запишем вариационный ряд:

0,0,0,0,0,2,2,2,3,4,4,5,5,5,7,7,7,7,10,10

3) Запишем статистическое распределение:

x_i	0	2	3	4	5	7	10
n_i	5	3	1	2	3	4	2

4) Определим размах выборки: Z=10-0=10

При большом объеме выборки для упрощения ее вычисления ее элементы объединяют в разряды, представляя в выборку в виде группированного статистического ряда. Для этого все содержащиеся элементы разбивают на k интервалов равной длины.

Графические представления статистической совокупности

Полигон и гистограмма.

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения. Они позволяют лучше представить характер распределения элементов выборки, а иногда и сделать предположения о законе распределения генеральной совокупности.

Основные понятия.

Ряд распределения – это ряд чисел, в котором значение изучаемого признака (варианта) расположены в определенном порядке. Либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Наряду с вариантами ряд распределений включают в частоты (величины, показывающие сколько раз каждая из вариантов встречаются в данной совокупности). Сумма частот равна объему совокупности. Таким образом, ряд распределения состоит из вариант и частот.

В зависимости от прерывности и непрерывности варьирующего признака ряды распределения удобно представлять в виде двух разновидностей: **дискретного и вариационного (интервальных)**

Дискретный ряд представляет собой ряд прерывных чисел.

Например: распределение семей по числу членов.

При непрерывной вариации распределением признака называется интервальным.

Например: распределение совхозов области по % выполнению плана.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка. Наблюдаемые значения x_i- называют вариантами, n_i- числа наблюдения частотами, $n=\sum n_i$- объем выборки, отношения частот к объему выборки называется **относительными частотами** $W_i=\frac{n_i}{n}$

Пример. Составить распределения относительных частот, если задано распределение частот выборки объема.

n=20

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Решение. Найдём относительные частоты.

$w_1=\frac{n_1}{n}=\frac{3}{20}$

$w_2=\frac{10}{20}$

$w_3=\frac{7}{20}$

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,5	0,35

0,15+0,5+0,35=1 .

Сумма относительных частот равна единице.

В целях наглядности строят различные графики *полигон* и *гистограмма*.

Полигоном частот называется ломаная линия вершиной, которой являются точки ($(x_1,n_1),(x_2,n_2)\dots(x_k,n_k)$ определяемые элементами статистического ряда. Для его построения по оси абсцисс откладывают варианты x_i, а по оси ординат соответствующая им частота n_i.

Построенные точки соединяют отрезками прямых.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура составленная из прямоугольников построенных на интервалах так что площадь каждого прямоугольника численно равна частоте варианты расположенной в середине i интервала. То есть площадь гистограммы частот равна объему выборки

Пример. Построить полигон и гистограмму частот.

Дано время недельной загрузки электрических духовых шкафов 50-ти обследованных предприятий общественного питания в часах.

38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
60	52	47	46	49	49	14	57	54	59
77	47	28	48	58	32	42	58	61	30
61	35	47	72	41	45	44	56	30	40
67	65	39	48	43	60	54	42	59	50

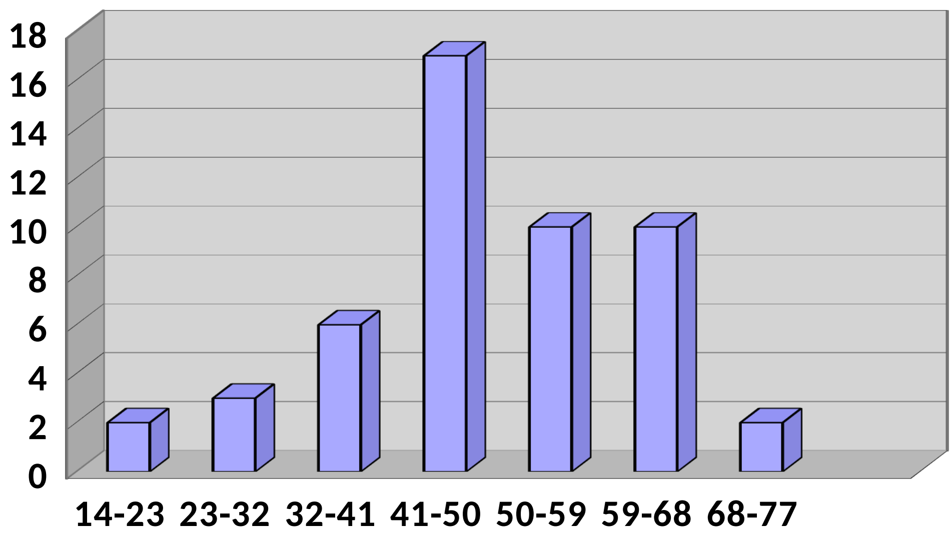
Разобьем ряд распределения на 7 интервалов, определим размах выборки.

77-14=63

Найдем длину интервала. $h=\frac{63}{7}=9$

	Границы интервалов	Середина интервалов	x_i
1	14-23	18,5	2
2	23-32	27,5	3
3	32-41	36,5	6
4	41-50	45,5	17
5	50-59	54,5	10
6	59-68	63,5	10
7	68-77	72,5	2

Чтобы построить гистограмму найдём относительные частоты.



Задания для практической работы:

При изменении диаметра валика после шлифовки была получена следующая выборка:

20,3	18,1	20,4	20,1	15,3	22,8	18,3	13,9	16,7	17,8	13,5
15,4	21,9	16,5	16,8	19,3	21,9	14,7	19,8	20,4	21,3	11,8
17,2	15,3	19,7	14,7	17,8	12,5	14,5	18,5	19,5	17,5	18,6
19,2	16,8	20,5	20,8	16,2	10,1	18,1	20,2	17,2	19,4	19,1
23,3	13,2	14,3	19,5	15,7	21,1	18,4	23,8	19,6	17,8	19,3

Построить гистограмму частот, предварительно построив ряд статистического распределения, состоящий из семи интервалов.

Список литературы

Основные источники:

Пехлецкий И.Д. Математика 2014 ОИЦ «Академия».

Дополнительные источники:

Григорьев В.П., Сабурова Т.Н., Сборник задач по высшей математике, ОИЦ «Академия» 2014.

Интернет - ресурсы

- Электронно-библиотечная система ZNANIUM.COM Режим доступа: http://www.znanium.com/
- Электронно-библиотечная система "ЮРАЙТ" Режим доступа http://www. biblio-online. ru
- Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru/
- Информационные, тренировочные и контрольные материалы. Режим доступа: http:// www. fcior. edu. ru.
- Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. Режим доступа: http:// www. school-collection. edu. ru.