Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
**«Южно-Уральский государственный технический колледж»**

**Методические рекомендации**
**по организации внеаудиторной самостоятельной работы**

по учебной дисциплине:

**МАТЕМАТИКА**

для студентов специальности

08.02.04 Водоснабжение и водоотведение
(Учебный план 2020)

Челябинск, 2020

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по организации внеаудиторной самостоятельной работы по учебной дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по специальности **08.02.04 Водоснабжение и водоотведение (ФГОС 2018).**

Самостоятельная внеаудиторная работа по математике организуется с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- развития познавательных способностей и активности студентов, самостоятельности, ответственности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Общий объём времени, отведённого на внеаудиторную самостоятельную работу по учебной дисциплине «Математика», предназначены для обучающихся по специальности **08.02.04 Водоснабжение и водоотведение (ФГОС 2018)** составляет 16 часов.

В результате выполнения заданий внеаудиторной самостоятельной работы обучающийся должен:

*знать:*

- основные математические методы решения прикладных задач;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления;
- роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

*уметь:*

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- производить операции над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
-решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- решать системы линейных уравнений различными методами.

В методических рекомендацияхпо выполнению внеаудиторной самостоятельнойработы по каждой теме содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая самостоятельная работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий.

## Порядок выполнения заданий внеаудиторной самостоятельной работы

Задания внеаудиторной самостоятельной работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

*Ход работы:*

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. В тетрадях выполнить самостоятельную работу.
4. Задачи сдаются студентом  на проверку частями – по мере изучения курса.

## Критерии оценивания внеаудиторной самостоятельной работы

**Оценка «5»** ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

**Оценка «4»** ставится при  безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

**Оценка «3»** ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

**Оценка «2»** - решено мене 70% предлагаемых заданий.

## Перечень самостоятельных работ

| № темы | Название темы по программе | Содержание внеаудиторной самостоятельной работы | Кол-во часов |
|---|---|---|---|
| Тема 1.1 | Элементы теории пределов. | Выполнение расчетной работы по теме: «Исследование функции на непрерывность» | 2 |
| Тема 1.2 | Дифференциальное исчисление функции одной переменной. | Подготовка презентации по теме: «Использование производной в различных областях науки»<br>Выполнение расчетной работы по теме: «Применение производной при решении прикладных задач» | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Тема 1.3 | Интегральное исчисление функции одной переменной | Подготовка презентации по теме: «Использование интеграла в различных областях науки»<br>Выполнение расчетной работы по теме: «Применение определенного интеграла при решении прикладных задач» | 3 |
| Тема 2.2 | Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) | Выполнение расчетной работы по теме: «Использование матриц при решении прикладных задач» | 2 |
| Тема 4.1 | Комплексные числа и действия над ними | Выполнение расчетной работы по теме «Изображение комплексных чисел на координатной плоскости» | 2 |
| Тема 5.1 | Вероятность случайного события | Выполнение расчетной работы по теме: «Вычисление вероятностей сложных событий» | 2 |
| Тема 5.2 | Случайные величины | Выполнение расчетной работы по теме: «Вычисление числовых характеристик случайных величин» | 2 |
| ВСЕГО | | | 16 |

## Тема 1.1Элементы теории пределов

**Цель**:Научиться определять точки разрыва функции и их вид, исследовать функцию на непрерывность.

**Самостоятельная работа:** выполнение расчетной работы.

**Форма контроля:** проверка расчетной работы.

Изучите теоретический материал и приведённые примеры:

*Определение*: функция непрерывна в точке$x_0$, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение детализируется в следующих условиях:

1) Функция должна быть определена в точке $x_0$, то есть должно существовать значение $f(x_0)$.

2) Должен существовать общий предел функции: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x)$

3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке:$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

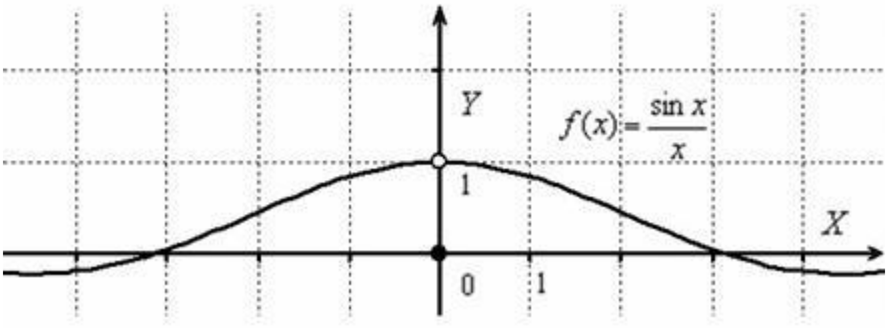
**Замечание:** Если нарушено **<u>хотя бы одно</u>**из 3-х условий, то функция теряет свойство непрерывности в точке$x_0$.

Классификация точек разрыва

*Точки разрыва первого рода*

Если в точке $x_0$ нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы <u>конечны</u>,** то она называется **точкой разрыва <u>первого рода</u>.**

***Пример1:*** Изобразим на чертеже график функции: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



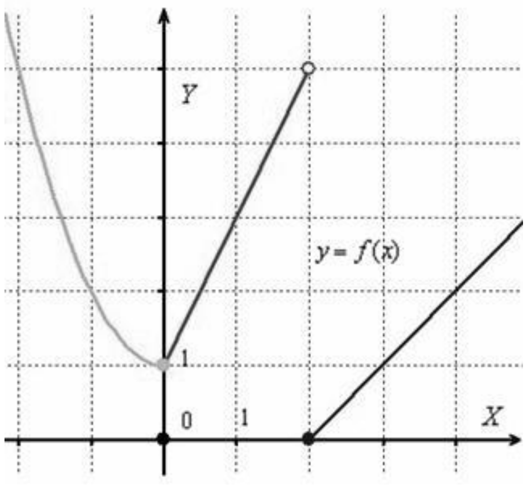

Данная функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки *x=0*. И в самом деле, знаменатель же не может быть равен нулю. Однако хоть точка и выколота, справедливость первого замечательного предела $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ не нарушена – мы можем приблизиться к «нулю» и слева и справа *бесконечно близко*, таким образом, односторонние пределы существуют и совпадают: $\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1$ (Условие №2 непрерывности выполнено).

Но функция не определена в точке *x=0*, следовательно, нарушено Условие №1 непрерывности, и функция терпит разрыв в данной точке.

Разрыв такого вида (с существующим <u>общим пределом</u>) называют **устранимым разрывом**. Почему устранимым? Потому что функцию можно <u>доопределить</u> в точке разрыва: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{если}\quad x\neq 0\\ 1, & \text{если}\quad x=0\end{cases}$

***Пример 2:***

Рассмотрим функцию, заданную кусочно $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{при } x\leq 0\\ 1+2x, & \text{при } 0<x<2\\ x-2, & \text{при } x\geq 2\end{cases}$ и выполним её чертёж.




Исследуем точку *x=2* на непрерывность:

1) *f(2)=2-2=0* – функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы.

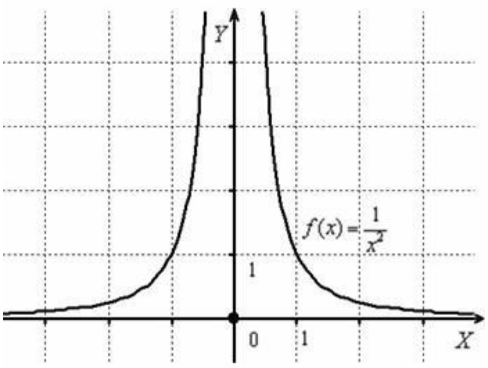
$\lim_{x\to 2+0}(x-2)=0 \qquad \lim_{x\to 2-0}(1+2x)=5$

В результате получены *конечные числа*, причем они *не равны*. Поскольку односторонние пределы конечны и различны, то наша функция терпит разрыв первого рода неустранимый.

*Точки разрыва второго рода:*

***Пример 3:*** Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x^2}$.

Исследуем на непрерывность точку $x=0$:




1) Функция не определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$ Односторонние пределы бесконечные, следовательно $x=0$ является точкой разрыва второго рода. Построим схематичный гафик данной функции, для этого вычислим ещё пределы этой функции на бесконечности $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$.

**Задания для расчетнойработы**

Исследовать непрерывность функций в соответствии с заданиями.

а) Проверить, является ли функция $y = f(x)$ непрерывной в точках $x_1$ и $x_2$. В случае разрыва функции указать тип разрыва и сделать схематический чертеж в окрестности точки разрыва.

б) Построить график функции $y = f(x)$, используя график, записать промежутки непрерывности функции, перечислить точки разрыва и указать тип каждого из них.

| № варианта | а) | б) |
|---|---|---|
| 1 | $y = 12^{\frac{1}{x-4}}, x_1 = 4,\ x_2 = 5$ | $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 2 - x, & 0 \le x \le 1, \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$ |
| 2 | $y = 8^{\frac{1}{2x-3}}, x_1 = 1{,}5,\ x_2 = 2$ | $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ 0, & 0 \le x < 2, \\ 3 - x, & x \ge 2 \end{cases}$ |
| 3 | $y = 10^{\frac{2}{5-x}}, x_1 = 5,\ x_2 = 7$ | $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \le 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $y = 5^{\frac{3}{1-x}}, x_1 = 1,\ x_2 = 4$ | $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1, \\ 2x-1, & -1 \le x \le 2, \\ 3, & x > 2 \end{cases}$ |
| 5 | $y = 9^{\frac{1}{4x-2}}, x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}5$ | $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \mathrm{tg}x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ -x, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$ |
| 6 | $y = 7^{\frac{3}{2-x}}, x_1 = -1,\ x_2 = 2$ | $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x < 0, \\ x+1, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$ |
| 7 | $y = 3^{\frac{2}{x-3}}, x_1 = 3,\ x_2 = 5$ | $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$ |
| 8 | $y = 16^{\frac{1}{3-x}}, x_1 = 1,\ x_2 = 3$ | $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 0, \\ x^2-2, & 0 \le x < 2, \\ 2, & x \ge 2 \end{cases}$ |
| 9 | $y = 2^{\frac{1}{x-1}}, x_1 = 0,\ x_2 = 1$ | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ -2, & 0 \le x \le 1, \\ 2x-4, & x > 1 \end{cases}$ |
| 10 | $y = 6^{\frac{3}{2x+1}}, x_1 = -0{,}5,\ x_2 = 1$ | $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 1, \\ -1, & 1 \le x < 2, \\ 3-x, & x \ge 2 \end{cases}$ |

## Тема 1.2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

**Цель***:* Закрепить навыки вычисления производных и уметь применять производную для решения прикладных экономических задач.

**Самостоятельная работа:** подготовка презентации и выполнение расчетной работы.

**Форма контроля:** проверка расчетной работы и оценка презентации.

Порядок выполнения работы

**1**. Изучите теоретический материал по теме: «Использование производной в экономике» и, согласно приведенным ниже требованиям, подготовьте презентацию.

**2**. Выполните расчетную работу, предварительно изучив, рассмотренные ниже задачи. Оформите решение письменно в тетради.

**Требования к созданию презентации**

***Создание материалов-презентаций***– это вид самостоятельной работы студентов по созданию наглядных информационных пособий, выполненных с помощью мультимедийной компьютерной программы PowerPoint (см. прил. 1).

Материалы-презентации готовятся студентом в виде слайдов с использованием программы Microsoft PowerPoint. В качестве материалов-презентаций могут быть представлены результаты любого вида внеаудиторной самостоятельной работы, по формату соответствующие режиму презентаций.

***Структура презентации:***

**титульный слайд** (дисциплина, тема, ФИО студента, специальность, номер группы)

**содержание**, где представлены основные этапы (моменты) презентации. Желательно, чтобы из содержания по гиперссылке можно перейти на необходимую страницу и вернуться вновь на содержание.

**основная часть -** от 15 слайдов (текстовый материал по теме + графическое сопровождение)

**заключение -** 1 слайд (выводы по теме)

**список литературы-** содержит не менее 2 – 5 источников

Приветствуются**:**музыкальное сопровождение, мультипликация, видео, анимация.

***При создании презентации рекомендуется:***

соблюдать единый стиль оформления;

- для фона выбирайте холодные тона (синий, зеленый);
- на одном слайде использовать не более 3 цветов;
- анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде;
- при представлении информациииспользуйте короткие слова и предложения;
- надписи располагайте под картинками;
- шрифты: для заголовков не менее 24,для информации не менее 18;
- для выделения информации используйте рамки, заливку;
- не перегружайте слайд большим объемом информации;
- ключевые факты отображайте по одному на каждом слайде;
- для обеспечения разнообразия используйте различные виды слайдов.

*Теоретические сведения:*

**Основные понятия**

Применение производной в экономикепозволяет получать так называемые *предельные характеристики*экономических объектов или процессов. Предельные величины (предельные выручка, полезность, производительность, предельный доход идр.) характеризуют *не состояние, а скорость* *изменения*экономического объекта или процесса по времени или относительно другого исследуемого фактора.

***1. Издержки производства.***Если издержки производства *у*рассматривать как функцию выпускаемой продукции *x,* т.е. $y = C(x)$, то $y' = C'(x)$будут выражать *предельные издержки* производства и приближенно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. Средние издержки являются издержками на единицу выпуска продукции: $y_1 = \frac{C(x)}{x}$.

**2. Производительность труда.** Пусть функция $u(t)$выражает объем произведенной продукции *у*за время *t.* Тогда производная объема произведенной продукции по времени $u'(t_0)$есть *производительность труда* в момент времени $t_0$.

**3. Функция потребления и сбережения.** Если *x* – национальный доход, $C(x)$– функция потребления (часть дохода, которая тратится), а $S(x)$функция сбережения, то $x = C(x) + S(x)$. Дифференцируя получим, что

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1$$

где $\frac{dC}{dx}$ – предельная склонность к потреблению;

где $\frac{dS}{dx}$ – предельная склонность к сбережению.

**4. Эластичность.** Эта мера реагированияодной переменной величины на изменение другой. Эластичность показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1 %.

Эластичность функции определяется с помощью соотношения:

$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x$или $E_x(y) = x \cdot T_y$

где $T_y(x) = (\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'_x$–*относительная скорость изменения(темп)* функции.

Эластичность функции применяется при анализе спроса и предложения от цены (*ценовая эластичность*). Она показывает реакцию спроса или предложения на изменение цены и определяет, на сколько процентов приближенно изменится спрос или предложение при изменении цены на 1%.

Если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считается *эластичным*, если $|E_x(y)| = 1$ , *нейтральным* (с единичной эластичностью), $|E_x(y)| < 1$ – *неэластичным* относительно цены.

Примеры:

**1.** Зависимость между издержками производства у и объемом выпускаемой продукции х выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

*Решение*. Функция средних издержек (на единицу проудукции) выражается отношением $y_{cp} = \frac{y}{x} = 50 - 0{,}05x^2$; при $x = 10$ средние издержки (на единицу продукции) равны $y_{cp}(10) = 50 - 0{,}05 \cdot 10^2 = 45$ (ден. ед.). Функция предельных издержек выражается производной $y'(x) = 50 - 0{,}15x^2$;при $x = 10$ предельные издержки составят $y'(10) = 50 - 0{,}15 \cdot 10^2 = 35$ (ден. ед.). Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства (объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составляют 35 ден. ед.

**2.** Зависимость между себестоимостью единицы продукции у (тыс. руб.) и выпуском продукции х (млрд. руб.) выражается функцией $y = -0{,}5x + 80$у. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

*Решение*. По формуле$E_x(y) = x \cdot T_y = \frac{x}{y} \cdot y'$эластичность себестоимости $E_x(y) = \frac{x}{-0{,}5x+80} \cdot (-0{,}5) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x+80} = \frac{x}{x-160}$. При $x = 60$ $E_{x=60}(y) = -0{,}6$ , т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0 ,6 %.

**3.** Объем продукции и, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (ед.), $1 \leq t \leq 8$ , где t — рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

*Решение*. Производительность труда выражается производной $z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100$ $(\frac{\text{ед}}{\text{ч}})$,а скорость и темп изменения производительности — соответственно производной $z'(t)$и логарифмической производной$T_z(t) = [lnz(t)]'$:

$$T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-15t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100} = \frac{2t-6}{t^2-6t-40} \ (\frac{\text{ед}}{\text{ч}}),$$

В заданные моменты времени $t_1 = 1$ и$t_2 = 8 - 1 = 7$соответственно имеем: $z(1) = 112{,}5\left(\frac{\text{ед}}{\text{ч}}\right)$, $z'(1) = 10 \left(\frac{\text{ед}}{\text{ч}^2}\right)$, $T_z(1) = 0{,}09\left(\frac{\text{ед}}{\text{ч}}\right)$, $z(7) = 82{,}5 \left(\frac{\text{ед}}{\text{ч}}\right)$, $z'(7)$=-20$\left(\frac{\text{ед}}{\text{ч}^2}\right)$, $T_z(7) = -0{,}24\left(\frac{\text{ед}}{\text{ч}}\right)$.

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$и $T_z(t)$ с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы.

**Задания для расчетнойработы**

**1**. Объем продукции $u$ (уел. ед.) цеха в течение рабочего дня представляет функцию $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, где $t$ — время (ч). Найти производительность труда через 2 ч после начала работы.

**2**. Зависимость между издержками производства у (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции $x$ (ед.) выражается функцией $y = 10x - 0{,}04x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 5 ед.

**3**. Функции спроса $q$ и предложения $s$ от цены $p$ выражаются соответственно уравнениями $q = 7 - pis = p + 1$. Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 5% от равновесной.

## Тема 1.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

**Цель***:* Закрепить навыки вычисления неопределенных и определенных интегралов, научиться применять их при решении прикладных задач.

**Самостоятельная работа:** подготовка презентации и выполнениерасчетной работы.

**Форма контроля:** проверка работы

Порядок выполнения работы

**1**. Изучите теоретический материал по теме: «Использование интеграла в экономике» и, согласно приведенным в **Теме 1.2**требованиям, подготовьтепрезентацию.

**2**. Выполните расчетную работу, предварительно изучив, рассмотренные ниже задачи. Оформите решение письменно в тетради.

*Теоретические сведения*

***Экономический смысл определенного интеграла***. Пусть функция *z* = *f(t)* описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Тогда объем продукции и, произведенной за промежуток времени [0,T] может быть вычислен по формуле:

$$u = \int_0^T f(t)dt$$

т.е. если $f(t)$ – производительность труда в момент t, то $\int_0^T f(t)dt$ есть объем выпускаемой продукции за промежуток [0, T ].

Если в функции Кобба—Дугласа считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид $g(t) = (\propto t + \beta)e^{\gamma t}$.Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит:

$$Q = \int_0^T (\propto t + \beta) e^{\gamma t} dt.$$

**Пример:**Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $g(t) = (t+1)e^{3t}$

Решение: По формуле $Q = \int_0^T (\propto t + \beta) e^{\gamma t} dt$:$Q = \int_0^4 (t+1)e^{3t} dt$.

Используем метод интегрирования по частям. Пусть$|u = t + 1, dv = e^{3t}dt|$Тогда$\left| du = dt, v = \int e^{3t} dt = \frac{1}{3} e^{3t} \right|$

Следовательно, $Q = (t+1)\frac{1}{3}e^{3t} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3} e^{3t} dt = \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9} e^{3t} \Big|_0^4 = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2{,}53 \cdot 10^5 (\text{усл. ед.})$

Пусть известна функция *t=t(x)*, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x — порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время $t_{ср}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от $x_1$ до $x_2$ изделий, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий t = t(x), то часто она имеет вид $t = ax^{-b}$, где a — затраты времени на первое изделие, b — показатель производственного процесса.

**Пример**. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$до$x_2 = 121$ изделий, полагая в формуле изменения затрат a = 600 (мин), b = 0,5.

Решение. Используя формулу

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx$$

Получаем

$$t_{cp} = \frac{1}{121 - 100} \int_{100}^{121} 600 x^{-1/2} dx = \frac{600}{21} 2\sqrt{x} \Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57{,}2 \text{ (мин)}.$$

**Задания для расчетнойработы**

**1**. Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией $z(t) = -0{,}00625t^2 + 0{,}05t + 0{,}5$(ден. ед./ч), где t — время в часах от начала работы, $0 \le t \le 8$. Найти функцию $u$ = *u(t)*, выражающую объем продукции (в стоимостном выражении) и его величину за рабочий день.

**2**. Стоимость перевозки одной тонны груза на один километр (тариф перевозки) задается функцией $f(x) = \frac{10}{x+2}$(цен. ед./км). Определите затраты на перевозку одной тонны груза на расстояние 20 км

## Тема 2.2 Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

**Цель:** научиться применять свойства матриищ для решения прикладных экономических задач.

**Самостоятельная работа:** выполнение расчетной работы

**Форма контроля:** проверка расчетной работы.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

*Теоретические сведения:*

Матричное исчисление играет важную роль в экономике: многие математические модели экономических объектов записываются в компактной матричной форме.

***Пример 1***. некоторое предприятие выпускает четыре вида изделий, используя при этом четыре вида сырья. Нормы расхода сырья на каждый вид изделия можно задать матрицей четвертого порядка:

*Вид сырья*

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

*Вид изделия*

Предприятие выпускает продукцию двух видов и использует сырье трех видов. Нормы расхода сырья задаются матрицей

*Видсырья*

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

*Вид продукции*

Каждый элемент $a_{ij}\,(1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 3)$ этой матрицы указывает, сколько единиц сырья $j$-го вида расходуется на производство единицы продукции $i$-го вида.

План выпуска задан матрицей-строкой *B=(50 100).* Стоимость единицы каждого вида сырья (ден. ед.) характеризуется матрицей-столбцом

$$S = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Следует определить:

1) затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции;

2) общую стоимость сырья.

*Решение.* Определим затраты $C_j$ $j$-го сырья $(1 \le j \le 3)$;

$$C_1 = 4 \cdot 50 + 7 \cdot 100 = 900;$$

$$C_2 = 3 \cdot 50 + 6 \cdot 100 = 750;$$

$$C_3 = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 100 = 250.$$

Матрица-строка затрат $C = BA = (50 \quad 100) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (900 \quad 750 \quad 250)$

Общая стоимость сырья $Q = 900 \cdot 5 + 750 \cdot 4 + 250 \cdot 2 = 8000$ (ден. ед.) может быть найдена средствами матричного исчисления:

$$Q = C \cdot S = (900 \quad 750 \quad 250) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = (8000)$$

*Ответ:* 1) (900 750 250); 2) 8000 ден. ед.

***Пример 2.*** Данные о дневной производительности пяти предприятий, выпускающих четыре вида продукции с потреблением трех видов сырья, продолжительность работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья приведены в табл. 1.

*Таблица 1*

| Вид изделия | Производительность предприятий, изд./день | | | | | Затраты сырья, ед. веса изд. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 4 | 2 | 0 | 5 | 4 | 2 | 5 | 5 |
| 2 | 0 | 15 | 7 | 4 | 6 | 3 | 4 | 6 |
| 3 | 8 | 10 | 3 | 6 | 0 | 5 | 3 | 4 |
| 4 | 3 | 5 | 4 | 3 | 7 | 4 | 8 | 6 |
| Число рабочих дней в году | | | | | | Цена сырья | | |
| 81 | | 131 | 181 | 231 | 281 | 32 | 33 | 34 |

Требуется определить:

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;

2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;

3) годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска изделий указанных видов и при определенном количестве рабочих дней.

*Решение.*

1. <u>Определим годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий.</u>

На основании табл. 1 составим матрицу $P$, характеризующую производительность предприятий по всем видам продукции:

Производительность предприятий

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \boldsymbol{P}= & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 15 & 7 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Вид изделия**

$j$-й столбец матрицы $P$ характеризует дневную производительность $j$-го предприятия по каждому виду продукции: $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Годовая производительность $j$-го предприятия по каждому виду продукции определится при умножении $j$-го столбца матрицы $P$ на количество рабочих дней в году этого предприятия, потраченных на изготовление четырех видов продукции. Тогда годовая производительность $j$-го предприятия по каждому виду изделий будет характеризоваться матрицей $P_{год} = (p'_{ij})$, где $p'_{ij} = p_{ij} \cdot n_j$, $1 \le i \le 4$, $1 \le j \le 5$.

$$P_{год} = \begin{pmatrix} 4\cdot 81 & 2\cdot 131 & 0\cdot 181 & 5\cdot 231 & 4\cdot 281 \\ 0\cdot 81 & 15\cdot 131 & 7\cdot 181 & 4\cdot 231 & 6\cdot 281 \\ 8\cdot 81 & 10\cdot 131 & 3\cdot 181 & 6\cdot 231 & 0\cdot 281 \\ 3\cdot 81 & 5\cdot 131 & 4\cdot 181 & 3\cdot 231 & 7\cdot 281 \end{pmatrix} =$$

$$
=\begin{pmatrix} 324 & 262 & 0 & 1155 & 1124 \\ 0 & 1965 & 1267 & 924 & 1686 \\ 648 & 1310 & 543 & 1386 & 0 \\ 243 & 655 & 724 & 693 & 1967 \end{pmatrix}.
$$

В соответствии с условием задачи матрица$Z$ затрат сырья на единицу изделия имеет вид

*Вид изделия*

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \longleftarrow \textbf{Затраты сырья}
$$

Если умножить матрицу $Z$ на матрицу $P$, то получим расход на предприятиях по всем видам сырья:

$$
ZP=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 15 & 7 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =
$$

$$
=\begin{pmatrix} 8+40+12 & 4+45+50+20 & 21+15+16 & 10+12+30+12 & 8+18+28 \\ 20+24+24 & 10+60+30+40 & 28+9+32 & 25+16+18+24 & 20+24+56 \\ 20+32+18 & 10+90+40+30 & 42+12+24 & 25+24+24+18 & 20+36+42 \end{pmatrix},
$$

$$
ZP=\begin{pmatrix} 60 & 119 & 52 & 64 & 54 \\ 68 & 140 & 69 & 83 & 100 \\ 70 & 170 & 78 & 91 & 98 \end{pmatrix}.
$$

В матрице $ZPi$-я строка соответствует номеру вида сырья, $j$-й столбец-номеру предприятия согласно табл. 1 *(i=1, 2,3; j=1,2,3,4,5)*.

2.<u>Определим годовую потребность каждого предприятия в каждом виде сырья.</u>

Годовая потребность каждого предприятия в каждом виде сырья определится матрицей $Z{\cdot}P_{год}$, которая получается по аналогии с матрицей $P_{\text{год}}$ при умножении матрицы $ZP$ на соответствующее количество рабочих дней в году для предприятий.

$$Z\cdot P_{год}=\begin{pmatrix} 4860 & 15589 & 9412 & 14784 & 15174 \\ 5508 & 18340 & 12489 & 19173 & 28100 \\ 5670 & 22270 & 14118 & 21021 & 27538 \end{pmatrix}.$$

3. Определим годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья.

Вектор стоимости сырья $\overline{C}=(C_1,C_2,C_3)=(32;33;34)$.

Стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия характеризуется вектором

$$\vec{C}\cdot(Z\cdot P_{год})=(530064;\ 1861248;\ 1193333;\ 1820511;\ 2349480).$$

Таким образом, суммы кредитования предприятий для закупки сырья определяются соответствующими компонентами вектора $\vec{C}\cdot(Z\cdot P_{\text{год}})$.

*Ответ*: 1) $\begin{pmatrix} 324 & 262 & 0 & 1155 & 1124 \\ 0 & 1965 & 1267 & 924 & 1686 \\ 648 & 1310 & 543 & 1386 & 0 \\ 243 & 655 & 724 & 693 & 1967 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 4860 & 15589 & 9412 & 14784 & 15174 \\ 5508 & 18340 & 12489 & 19173 & 28100 \\ 5670 & 22270 & 14118 & 21021 & 27538 \end{pmatrix}.$

3) $(530064;\ 1861248;\ 1193333;\ 1820511;\ 2349480).$

***Пример 3.*** Отрасль состоит из трех предприятий, выпускающих по одному виду продукции каждое объемом $x_i$. Каждое из предприятий отрасли для обеспечения своего производства потребляет часть продукции, выпускаемой им самим и другими предприятиями. $a_{ij}$ - доля продукции $i$-го предприятия, потребляемая $j$-м предприятием для обеспечения выпуска своей продукции $x_j$. Найти количество $y_i$ продукции $i$-го предприятия, предназначенной для реализации вне данной отрасли (объем конечного продукта).

$$A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,03 \\ 0,04 & 0,4 & 0,02 \\ 0,3 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Матрицу конечного продукта обозначим $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Эта матрица является решением матричного уравнения *(E-A)·X=Y*.

Находим матрицу *E-A*:

$$E\text{-}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,03 \\ 0,04 & 0,4 & 0,02 \\ 0,3 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,7 & -0,4 & -0,03 \\ -0,04 & 0,6 & -0,02 \\ -0,3 & -0,3 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

На основании правила умножения матриц получаем

$$(E\text{-}A)\cdot X=\begin{pmatrix} 0,7 & -0,4 & -0,03 \\ -0,04 & 0,6 & -0,02 \\ -0,3 & -0,3 & 0,3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 140-40-12 \\ -8+60-8 \\ -60-30+120 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 88 \\ 44 \\ 30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

*Ответ*: $y_1=88;\quad y_2=44;\quad y_3=30.$

**Задания для расчетной работы**

**1.** Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в табл. 2.

*Таблица 2*

| Видизделия | Количествоизделий | Расход сырья, кг/изд. | Норма изготовления ч/изд. | Цена изделия, ден. ед. изд. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 10 | 15 | 40 |
| 2 | 60 | 7 | 10 | 20 |
| 3 | 40 | 12 | 20 | 50 |
| 4 | 50 | 9 | 12 | 30 |

Определить следующие ежесуточные показатели: расход сырья *S*, затраты рабочего времени *T* и стоимость *P* выпускаемой продукции предприятия.

**2.** Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы *A*. Найти затраты на сырье каждого вида при заданном плане выпуска каждого вида изделия соответственно 50; 65; 30; 45.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

**3**. Затраты на четыре вида сырья для выпуска четырех видов продукции характеризуются матрицей *A*, приведенной в задаче 13.

Найти:

1) общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку;

2) общие затраты на сырье и его транспортировку при условии заданного вектор-плана задачи 13, если известны себестоимости каждого вида сырья 8, 5, 6, 4 и его доставки 2, 3, 1, 2 ден. ед. соответственно.

## Тема 4.1 Комплексные числа и действия над ними

**Цель:** формировать умение графического изображения комплексных чисел, выполнения арифметических операций с комплексными числами.

**Самостоятельная работа:** выполнение расчетной работы.

**Форма контроля:** проверка расчетной работы.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите расчетную работу. Оформите решение письменно в тетради.
3. Ответьте письменно на контрольные вопросы.

*Теоретические сведения:*

**Основные понятия**

### ***Изображение комплексных чисел***

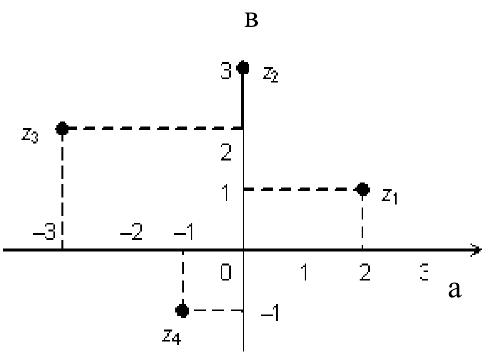
***Комплексные числа*** записываются в виде: $a+bi$. Здесь$a$и$b$ – *действительные числа*, а $i$ – *мнимая единица, т.е.* $i^2=-1$.Число $a$ называется*абсциссой,* а $b$ – *ординатой* комплексного числа $a+bi$. Комплексное число $0+bi$ называется *чисто мнимымчислом*.Запись $bi$означает то же самое, что и $0+bi$.

***Модулем***комплексного числа называется длина вектора$OP$, изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости. Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль

Рассмотрим на плоскости декартову прямоугольную систему координат xOy. Каждому комплексному числу $z = a + bi$можно сопоставить точку с координатами (a;b) , и наоборот, каждой точке с координатами (c;d) можно сопоставить комплексное число $w = c + di$. Таким образом, между точками плоскости и множеством комплексных чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексные числа можно изображать как

точки плоскости. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, обычно называют комплексной плоскостью.
Пример.Изобразим на комплексной плоскости числа $z_1 = 2 + i$;$z_2 = 3i$; $z_3 = -3 + 2i$; $z_4 = -1 - i$.

Решение:




Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу

$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$,

аумножение— поправилу

$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$(здесь как раз используется, что$i^2=-1$).

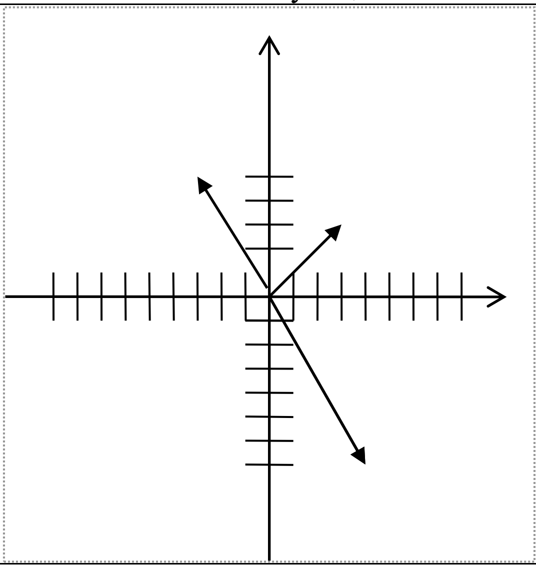
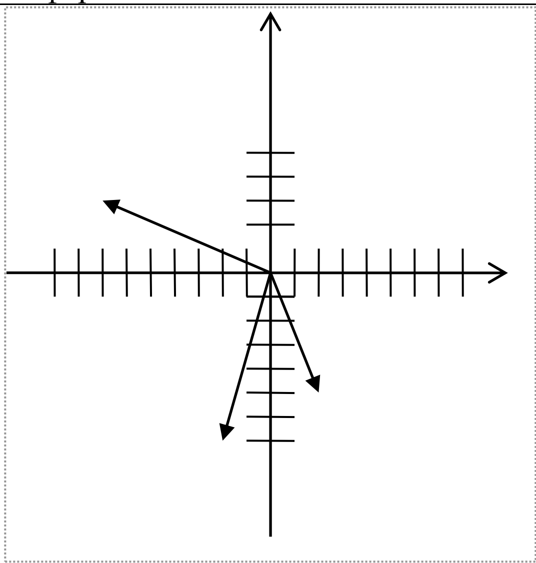
Число $\bar{z}=a-bi$называется*комплексно-сопряженным*к$z=a+bi$. Равенство$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Например,$\frac{3+4i}{1+2i}=\frac{11}{5}-\frac{2}{5}i$

**Задания для расчетнойработы**

| 1 вариант | 2 вариант | Количество баллов |
|---|---|---|
| № 1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа: | | |
| $z_1= 4i$ | $z_1= -5i$ | 1 |
| $z_2 = 3 + i$ | $z_2= 4 + i$ | 1 |
| $z_3= - 4 +3i$ | $z_3 = -7 + 2i$ | 1 |
| $z_4= - 2 -5i$ | $z_4= -3 - 6i$ | 1 |
| № 2. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел: | | |
| а) $(3 + 5i) + (7 - 2i)$.<br>б) $(6 + 2i) + (5 + 3i)$. | $(3 - 2i) + (5 + i)$.<br>$(4 + 2i) + (-3 + 2i)$. | 2<br>2 |

| | | |
|---|---|---|
| в) $(-2+3i)-(7-2i)$.<br>г) $(5-4i)-(6+2i)$. | $(-5+2i)-(5+2i)$.<br>$(-3-5i)-(7-2i)$. | 2<br>2 |
| № 3. Произведитеумножениекомплексныхчисел: | | |
| а) $(2+3i)(5-7i)$.<br>б) $(6+4i)(5+2i)$.<br>в) 11) $(3-2i)(7-i)$.<br>г) $(-2+3i)(3+5i)$. | $(1-i)(1+i)$.<br>$(3+2i)(1+i)$.<br>$(6+4i)3i$.<br>$(2-3\text{i})(-5\text{i})$. | 2<br>2<br>2<br>2 |
| № 4. Выполните деление комплексных чисел: | | |
| а) $\frac{8+2\text{i}}{5-3\text{i}}$<br>б)$\frac{1-\text{i}}{1+\text{i}}$ | а) $\frac{5+\text{i}}{2+3\text{i}}$<br>б)$\frac{1+\text{i}}{1-\text{i}}$ | 2<br>2 |
| № 5. Выполнитедействия: | | |
| а) $(3+2i)(3-2i)$.<br>б) $(5+i)(5-i)$.<br>в) $(1-3i)(1+3i)$. | а) $(7-6i)(7+6i)$<br>б) $(4+i)(4-i)$.<br>в) $(1-5i)(1+5i)$. | 2<br>2<br>2 |
| № 6. Решите уравнения: | | |
| а)$x^2-4x+13=0$.<br>б)$x^2+3x+4=0$ | а) $2{,}5x^2+x+1=0$.<br>б) $4x^2-20x+26=0$. | 3<br>3 |
| №7. На рисунке показано графическое изображение комплексных чисел. Перерисуйте рисунок в тетрадь. Обозначьте комплексные числа как $z_1$, $z_2$, $z_3$. Запишите соответствующие аналитические формы. | | |
|  |  | 2 |

## Критерии оценки

| Набранное количество баллов | оценка |
|---|---|
| 21 – 28 баллов | 3 |
| 29 - 34 баллов | 4 |
| 35 - 38 балла | 5 |

## Тема 5.1 Вероятность случайного события

**Цель:** получить навыки по нахождению условных вероятностей; вычислению вероятностей сложных событий с помощью теорем умножения и сложения вероятностей, получить навыки по вычислению вероятностей сложных событий с помощью формулы полной вероятности

**Самостоятельная работа:** выполнение расчетной работы;

**Форма контроля:** проверка работы.

*Теоретические сведения:*

Пусть А и В – зависимые события. ***Условной вероятностью P(B|A) (или $P_A(B)$)*** называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

*Теорема умножения вероятностей*

**Теорема**: Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B).$$

**Пример .**Какова вероятность того, что при десятикратном бросании монеты герб выпадет 10 раз ?

**Решение:** Пусть событие $Ai$ — появление герба при $i$-м бросании. Искомая вероятность есть вероятность совмещения всех событий $Ai$ $(i=1,2,3,...,10)$, а так как они, очевидно, независимы в совокупности, то применяя формулу (10), имеем

$$P(A_1A_2...A_{10}) = P(A_1)P(A_2)...P(A_{10})$$

Но $P(Ai)=1/2$ для любого $i$; поэтому

$$P(A_1A_2...A_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}001$$

**Теорема**: Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предложении, что первое уже наступило.

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B\,|\,A).$$

Для трех зависимых событий:

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B\,|\,A)\cdot P(C\,|\,A\cdot B).$$

**Пример.** Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми ?

**Решение:** Эта задача уже была решена в п. 3 с помощью классического определения вероятности. Решим ее, применяя формулу (5). Извлечение двух шаров равносильно последовательному их извлечению. Обозначим через $A$ появление белого шара при первом извлечении, а через $B$ — при втором. Событие, состоящее в появлении двух белых шаров, является совмещением событий $A$ и $B$. По формуле (5) имеем

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

Но $P(A)=3/10$; $PA(B)=2/9$, поскольку после того, как был вынут первый белый шар, в урне осталось 9 шаров, из которых 2 белых. Следовательно,

$$P(AB) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

*Теорема сложения вероятностей несовместимых событий*

**Теорема**: Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B).$$

**Пример.** В урне 2 зеленых, 7 красных, 5 коричневых и 10 белых шаров. Какова вероятность появления цветного шара?

**Решение:** Находим соответственно вероятности появления зеленого, красного и коричневого шаров: *P(зел.)=2/24*; *P(кр.)=7/24*; *P(кор.)=5/24*. Так как рассматриваемые события, очевидно, несовместны, то, применяя аксиому сложения, найдем вероятность появления цветного шара:

$$P(цв.) = P(зел.) + P(кр.) + P(кор.) = \frac{2}{24} + \frac{7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{7}{12}$$

***Теорема:***

Если A и B – совместные события, то

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A \cdot B).$$

Для трех и более совместных событий эта формула значительно усложняется.

Например:

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cdot B)-P(A \cdot C)-P(B \cdot C)+P(A \cdot B \cdot C)$.

**Пример**: Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, а из второго – 0,91. Найти вероятность поражения цели.

**Решение**: Пусть событие A – хотя бы одно попадание в мишень, событие $A_1$ – попадание в мишень из первого орудия, событие $A_2$ – попадание в мишень из второго орудия.

Тогда $A = A_1+A_2$.

Поскольку события $A_1$ и $A_2$ совместны, то

$P(A) = P(A_1)+P(A_2)-P(A_1 \cdot A_2)$.

Т.к. события $A_1$ и $A_2$ независимы, то $P(A_1 \cdot A_2)=P(A_1) \cdot P(A_2)$,

где $P(A_1)=0,85$, а $P(A_2)=0,91$ по условию задачи.

Итак, $P(A) =0,85+0,91-0,85 \cdot 0,91=0,9865$.

*Вероятность противоположного события*

Несколько событий в данном опыте образуют <u>полную группу</u>, если в результате опыта обязательно должно появиться хотя бы одно из этих событий, Отсюда следует, что сумма событий полной группы есть достоверное событие, вероятность которого равна единице.

Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате опыта появится одно и только одно из этих событий.

Для суммы таких событий справедлива формула

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) = 1.$$

**Теорема**: Два противоположных друг другу события образуют полную группу: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

**Пример**: В партии содержится 20 деталей, среди которых 4 нестандартных. Для контроля взяли наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей нестандартна.

**Решение**: Пусть событие А – хотя бы одна из взятых деталей окажется нестандартной. Рассмотрим событие $\overline{A}$, противоположное событию А:

$\overline{A}$ - среди взятых деталей нет нестандартных. Вычислим вероятность события $\overline{A}$: $P(\overline{A})=\dfrac{m}{n}=\dfrac{C_{16}^{3}}{C_{20}^{3}}=\dfrac{16!\cdot 3!\cdot 17!}{3!\cdot 13!\cdot 20!}=\dfrac{28}{57}$.

Теперь вычислим вероятность искомого события:

P(A) = 1- $P(\overline{A})=1-\dfrac{28}{57}=\dfrac{29}{57}\approx 0{,}509$.

**Пример**: Перегорела одна из пяти электроламп, включенных в сеть последовательно. С целью устранения повреждения наудачу выбранную лампочку заменяют годной, после чего сразу проверяется исправность линии. Если повреждение не устранено, то заменяется другая лампочка. Найти вероятность того, что повреждение будет устранено только после замены третьей лампочки.

**Решение**: Пусть событие А – повреждение будет исправлено после замены третьей лампы.

Рассмотрим следующие три события:

$A_1$ – первая замененная лампа оказалась перегоревшей;

$A_2$ – вторая замененная лампа оказалась перегоревшей;

$A_3$ – третья замененная лампа оказалась перегоревшей.

Тогда: А = $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$

Поскольку события $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}$ *и* $\overline{A_3}$ зависимы, то

$$P(A)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}|\overline{A_1})\cdot P(A_3|\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})$$

Вероятность события $\overline{A_1}$ есть вероятность того, что первая замененная лампа оказалась исправной $P(\overline{A_1})=\frac{4}{5}$.

Условная вероятность $P(\overline{A_2}|\overline{A_1})$ - вероятность того, что вторая замененная лампа оказалась исправной, если известно, что первая замененная лампа также исправна.

Поэтому $P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=\frac{3}{4}$.

Наконец, условная вероятность $P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})$ есть вероятность того, что третья замененная лампа оказалась перегоревшей, если известно, что первая и вторая замененные лампы были исправными.

Откуда $P(A_3|\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=\frac{1}{3}$.

Теперь подсчитаем искомую вероятность: P(A)=$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=0{,}2$

**Пример**: Вероятности того, что деталь нужного вида находится в первом, втором, третьем ящике соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится не менее, чем в двух ящиках.

**Решение**: Пусть событие А – деталь нужного вида находится не менее, чем в двух ящиках. Рассмотрим следующие три события:

$A_1$ – деталь нужного вида имеется в 1-ом ящике;

$A_2$ – деталь нужного вида имеется во 2-ом ящике;

$A_3$- деталь нужного вида имеется в 3-ем ящике.

Событие $B_1=\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3$ заключается в том, что нужного вида деталь имеется во 2-ом и 3-ем ящиках, но ее нет в 1-ом ящике. События имеется во 2-ом и 3-ем независимы, поэтому

$$P(B_1)=P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=(1-0{,}7)\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}216.$$

Событие $B_2=A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$ заключается в том, что нужного вида деталь имеется в 1-ом и в 3-ем ящиках, но ее нет во 2-ом ящике.

Событие $B_3=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}$ заключается в том, что нужного вида деталь имеется в 1-ом и 2-ом ящиках, но ее нет в 3-ем ящике.

$$P(B_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})=0{,}7\cdot 0{,}8\cdot(1-0{,}9)=0{,}056.$$

Наконец, событие $B_4=A_1\cdot A_2\cdot A_3$ заключается в том, что нужного вида деталь имеется и в 1-ом, и во 2-ом, и в 3-ем ящиках.

$$P(B_4)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}504.$$

Событие А произойдет тогда, когда произойдет одно из событий:
или $B_1$, или $B_2$, или $B_3$, или $B_4$. Поэтому $A=B_1+B_2+B_3+B_4$.
Поскольку события $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ несовместны, то
$P(A)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)$.
Вычисляем:
P(A)=0,216+0,126+0,056+0,504=0,902.

*Формула полной вероятности*

Пусть событие А происходит совместно с одним из событий (гипотез) $H_1$, $H_2$,… $H_n$, которые образуют полную группу событий. Тогда справедлива *формула полной вероятности события А :*

$$P(A) = \sum_{\kappa=1}^{n} P(H_\kappa) \cdot P(A|H_\kappa),$$

где $P(H_к)$ – вероятность гипотезы $H_к$, $P(A|H_к)$ – условная вероятность А, т.е. вероятность появления события А при условии, что произошла гипотеза $H_к$ .

**Пример.**Три автомата изготовляют одинаковые детали.

Известно, что первый автомат производит 30% всей продукции, второй – 25% и третий – 45%. Вероятность изготовления детали, соответствующей стандарту, на первом автомате равна 0,99, на втором – 0,988 и на третьем – 0,988. все изготовленные за смену детали складываются вместе. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь не соответствует стандарту.

**Решение**: Пусть событие А – взятая наудачу деталь не соответствует стандарту.

Гипотезы:

$H_1$- взятая деталь изготовлена первым автоматом;

$H_2$- взятая деталь изготовлена вторым автоматом;

$H_3$- взятая деталь изготовлена третьим автоматом.

Вычислим вероятность гипотез.

$$P(H_1) = \frac{30\%}{100\%} = 0,3; \quad P(H_2) = \frac{25\%}{100\%} = 0,25; \quad P(H_3) = \frac{45\%}{100\%} = 0,45.$$

Вычислим условные вероятности:

$P(A|H_1)$ – вероятность того, что взятая наудачу деталь не соответствует стандарту, если она изготовлена первым автоматом.

$$P(A|H_1) = 1 - 0,99 = 0,01. \quad P(A|H_2) = 1 - 0,988 = 0,012.$$

$$P(A|H_3) = 1 - 0,988 = 0,012.$$

Вероятность события А подсчитываем по формуле полной вероятности :

$P(A)=0,3 \cdot 0,01+0,25 \cdot 0,012+0,45 \cdot 0,012=0,009$.

**Пример**. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 2 черных. При перевозке из первой урны во вторую урну перекатились два шара. После того, как шары во второй урне перемешались, из неё выкатился шар. Найти вероятность того, что выкатившийся из второй урны шар белый.

**Решение**: Пусть событие $H_1$ состоит в том, что из первой урны во вторую перекатились два белых шара, событие $H_2$ состоит в том, что перекатились два чёрных шара, а событие $H_3$ состоит в том, что перекатились шары разного цвета. Можно вычислить вероятности $P(H_1)=C_7^2/C_{10}^2=7/15$, $P(H_2)=C_3^2/C_{10}^2$ $=1/15$, $P(H_3)=7 \cdot 3/C_{10}^2=7/15$ (при решении задачи полезно проверить выполнение необходимого условия $\sum P(H_i)=1$).

Если реализовалась гипотеза $H_1$, то во второй урне оказалось 10 белых и 2 черных шара. Обозначим через $A$ событие, заключающееся в том, что из второй урны выкатился белый шар. Тогда $P(A/H_1)=10/C_{12}^2=5/33$. Если реализовалась гипотеза $H_2$, то во второй урне оказалось 8 белых и 4 чёрных шара, и $P(A/H_2)= 8/C_{12}^2=4/33$. Легко показать, что $P(A/H_3)=9/C_{12}^2=3/22$. Теперь можно воспользоваться формулой полной вероятности:

$P(A)=(5/33)\cdot(7/15)+(4/33)\ (1/15)+(3/22)\ (7/15)= 47/330$

**Пример**. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры выбираются 2 мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются ещё два мяча. Найти вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.

**Решение**Обозначим через $A$ событие, заключающееся в том, что вторая игра будет проводиться новыми мячами. Пусть гипотеза $H_1$ состоит в том, что для первой игры были выбраны два новых мяча, гипотеза $H_2$ состоит в том, что для первой игры были выбраны новый и играный мячи, гипотеза $H_3$ состоит в том, что для первой игры были выбраны два играных мяча. Определим вероятности гипотез:

$P(H_1)=C_{15}^2/C_{20}^2=21/38$; $P(H_2)=15\cdot 5/C_{20}^2=15/38$; $P(H_3)=C_5^2/C_{20}^2=2/38$.

Теперь вычислим условные вероятности события $A$.

$P(A/H_1)=C_{13}^2/C_{20}^2=39/95$; $P(A/H_2)=C_{14}^2/C_{20}^2=91/190$; $P(A/H_3)=C_{15}^2/C_{20}^2=21/38$.

Осталось подставить результаты вычислений в формулу полной вероятности

$P(A)=(21/38)\cdot(39/95)+(15/38)\cdot(91/190)+(2/38)\cdot(21/38)\approx 0.445$.

**Пример.**На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока?

**Решение** Событие$A$– установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока – может произойти, если произойдет одно из несовместных событий: $H_1, H_2, H_3$– установленный на машине двигатель изготовлен на первом, втором или третьем заводе соответственно. Эти события образуют полную группу, их вероятности:

$$P(H_1)=\frac{10}{20}=0{,}5,\ P(H_2)=\frac{6}{20}=0{,}3,\ P(H_3)=\frac{4}{20}=0{,}2,$$

(Контроль: $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$).

По условию $P_{H_1}(A)=0{,}9$, $P_{H_2}(A)=0{,}8$, $P_{H_3}(A)=0{,}7$.

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}83.$$

*Формула Байеса*

Пусть вероятности гипотез до опыта были $P(H_1)$, $P(H_2)$,… $P(H_n)$. В результате опыта появилось событие A . Тогда условная вероятность $P(H_к \mid A)$ гипотезы $H_к$ с учетом появления события A вычисляется по *<u>формуле Байеса</u>:*

$$P(H_к \mid A) = \frac{P(H_к) \cdot P(A \mid H_к)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)} = \frac{P(H_к) \cdot P(A \mid H_к)}{P(A)}.$$

**Пример.**На двух станках производят одинаковые детали, которые поступают на конвейер. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго. Первый станок дает в среднем 80% деталей отличного качества, а второй –90%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того , что она изготовлена на втором станке.

**Решение** Пусть событие A - взятая наудачу с конвейера деталь отличного качества.

Гипотезы:

$H_1$- деталь изготовлена на первом станке;

$H_2$- деталь изготовлена на втором станке.

Вероятность гипотез до появления события A:

$P(H_1)=3/4$; $P(H_2)=1/4$.

Условные вероятности

$$P(A \mid H_1) = \frac{80\%}{100\%} = 0{,}8; \qquad P(A \mid H_2) = \frac{90\%}{100\%} = 0{,}9.$$

Вероятности того, что взятая наудачу с конвейера деталь окажется отличного качества, т.е. вероятность события A, вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{3}{4}\ 0{,}8 + \frac{1}{4}\ 0{,}9 = 0{,}825.$$

Искомая вероятность того, что взятая деталь отличного качества изготовлена на втором станке, вычисляется по формуле Байеса:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}\ 0{,}9}{0{,}825} \approx 0{,}273.$$

**Пример**. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 2 черных. При перевозке из первой урны во вторую урну перекатились два шара и шары во второй урне перемешались, из неё выкатился белый шар. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую перекатились разноцветные шары.

**Решение**

Пусть событие $H_1$ состоит в том, что из первой урны во вторую перекатились два белых шара, событие $H_2$ состоит в том, что перекатились два чёрных шара, а событие $H_3$ состоит в том, что перекатились шары разного цвета. Можно вычислить вероятности $P(H_1)=C_7^2/C_{10}^2=7/15$, $P(H_2)=C_3^2/C_{10}^2=1/15$, $P(H_3)=7\cdot 3/C_{10}^2=7/15$ (при решении задачи полезно проверить выполнение необходимого условия $\sum P(H_i)=1$).

Если реализовалась гипотеза $H_1$, то во второй урне оказалось 10 белых и 2 черных шара. Обозначим через $A$ событие, заключающееся в том, что из второй урны выкатился белый шар. Тогда $P(A/H_1)=10/C_{12}^2=5/33$. Если реализовалась гипотеза $H_2$, то во второй урне оказалось 8 белых и 4 чёрных шара, и $P(A/H_2)=8/C_{12}^2=4/33$. Легко показать, что $P(A/H_3)=9/C_{12}^2=3/22$. Теперь можно воспользоваться формулой полной вероятности:

$P(A)=(5/33)\cdot(7/15)+(4/33)\,(1/15)+(3/22)\,(7/15)=47/330$

Вычисления подставим в формулу Байеса

$P(H_3/A)=P(A/H_3)P(H_3)/\,P(A)=(3/22)(7/15)/(\,47/33)=7/47.$

**Пример** Сообщение со спутника на землю передаётся в виде бинарного кода, то есть как упорядоченного набора нулей и единиц. Предположим, что послание на 70% состоит из нулей. Помехи приводят к тому, что только 80% нулей и единиц правильно распознаются приёмником. Если принят сигнал “1”, то какова вероятность того, что отправлен сигнал “0”?

**Решение** Пусть событие $B_0$ состоит в том, что отправлен сигнал “0”, а событие $B_1$ –в том, что отправлен сигнал “1”. Пусть событие $A_0$ состоит в том, что принят сигнал “0”, с событие $A_1$ – в том, что принят сигнал “1”. Нас интересует $P(B_0/A_1)$. По условию

$P(B_0)=0{,}7$ $P(B_1)=0{,}3$

$P(A_0/\,B_0)=0{,}8$ $P(A_1/\,B_0)=0{,}2$

$P(A_1/B_0)=0{,}8$ $P(A_0/\,B_1)=0{,}2$

По формуле Байеса получаем

$P(B_0/A_1)=0{,}2\cdot 0{,}7/(0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}8\cdot 03)=0{,}37.$

**Пример** По цели независимо сбросили две бомбы. Вероятность попадания для каждой бомбы равна *1/2*. При попадании одной бомбы цель поражается с вероятность *1/2*, а при попадании двух бомб она поражается с вероятностью *2/3*. Найти вероятность поражения цели.

**Решение.**Пусть события $H_1$, $H_2$ *и* $H_3$ состоят в попадании 0, 1 и 2 бомб соответственно. Событие *A* состоит в поражении цели. По формуле полной вероятности

$P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+ P(A|H_2)P(H_2)+ P(A|H_3)P(H_3).$

$P(A|H_1)=0,\ P(A|H_2)=1/2,\ P(A|H_3)=2/3, P(H_2)= ½, P(H_3)=1/4.$

Поэтому, P(A)= (1/2)(1/2)+(2/3)(1/4)=5/12.

## Задания для расчетнойработы

### *Теорема умножения вероятностей*

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна p = 0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание. *Отв.* 0,729.

2. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: "появился "герб", "появилось 6 очков". *Отв.* 1 / 12.

3. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартных), во втором — 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными. *Отв.* 0,12.

4. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна *p* = 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие А). *Отв.* 0,936.

5. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие А)? *Отв.* 91 / 216.

### *Теорема сложения вероятностей*

1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета? *Отв.* p = 0,02.

2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков. *Отв.* p = 0,4.

3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная. *Отв.* p = 44 / 45.

4. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали. *Отв.* p = 2 / 3.

Указание. Если А — нет ни одной нестандартной детали, В — есть одна нестандартная деталь, то

$P(A + B) = P(A) + P(B) = C^6_8 / C^6_{10} + C^1_2 * C^5_8 / C^6_{10}$.

*Формула полной вероятности*

1. На фирме работают сотрудники разного возраста. Молодых сотрудников – 24, среднего возраста – 82 и пожилых – 16. Вероятность того, что молодого сотрудника отправят на повышение квалификации, равна 0,52; сотрудника среднего возраста – 0,54; пожилого – 0,36. Найдите вероятность того, что выбранного наудачу сотрудника отправят повышать квалификацию.

2. В библиотеке имеется 21 книга по истории, 34 книги –по математике, 25 книг – по юриспруденции. Вероятность того, что книга по истории занесена в электронный каталог, равна 0,33; по математике – 0,15; по юриспруденции – 0,61. Найдите вероятность того, что выбранная наудачу книга занесена в электронный каталог.

3. Пассажир за получение билета может обратиться в одну из трех касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, во вторую – 0,35, в третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3, для второй – 0,4, для третьей – 0,6. Найти вероятность того, что пассажир купит билет.

*Формула Байеса*

1. В магазин поступают одинаковые электрические утюги: 80% с одного завода и 20% с другого. Известно, что первый завод выпускает 90% продукции, способной прослужить гарантийный срок, а второй завод – 95%. Какова вероятность, что купленный в магазине утюг прослужит гарантийный срок?

2. На сборку поступают изделия трех цехов: 50 изделий из первого цеха, 40 из второго и 30 из третьего. Вероятность того, что изделие первого цеха отличного качества, равна 0,8, для второго цеха эта вероятность равна 0,9, для третьего - 0,8. Наудачу взятое сборщиком изделие оказалось отличного качества. Какова вероятность, что это изделие поступило из второго цеха?

3. Известно, что в партии из 600 лампочек 200 лампочек изготовлено первым заводом, 250 - вторым и 150 - третьим. Известно также, что вероятности изготовления стандартной лампочки 1-м, 2-м и 3-м заводом соответственно равны 0,97 ; 0,91 ; 0,93. Какова вероятность того, что наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной?

4. Трое охотников одновременно выстрелили по медведям, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно: 0,2 ; 0,4 ; 0,6.

5. Была проведена одна и та же контрольная работа в трех параллельных группах. В 1-ой группе, где 30 учащихся, оказалось 8 работ, выполненных на «отлично»; во 20ой, где 28 учащихся – 6 работ, в 3-ей, где 27 учащихся – 9 работ. Найти вероятность того, что первая взятая наудачу при повторной проверке работа из работ, принадлежащих группе, которая также выбрана наудачу, окажется выполненной на «отлично».

6. В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

7. В вычислительной лаборатории имеется шесть клавишных автомата и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95. для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

8. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95. Для винтовки без оптического прицела 0,8. Стрелок поразил мишень их наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

## Тема 5.2. Случайные величины

**Цель**:получить навыки по вычислению характеристик ДСВ, заданной своим распределением, вычисление (с помощью свойств) характеристик для функций от одной или нескольких ДСВ

**Самостоятельная работа:** выполнение расчетной работы.

**Форма контроля:** проверка расчетной работы.

*Теоретические сведения:*

***Случайной величиной*** называется величина, которая в результате опыта примет одно и только одно возможное значение, при этом заранее неизвестно, какое именно.

***Дискретной*** называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные значения.

Случайную величину в дальнейшем мы будем обозначать большой буквой X, а ее возможные значения маленькой буквой x.

*Например*, X- число попаданий при трех выстрелах. Возможные значения этой случайной величины: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$. Рассмотрим случайную величину X  с возможными значениями $x_1, x_2,\dots x_n$ .  Каждое из этих значений случайная величина может принять с некоторой вероятностью:

$P(X=x_1)=p_1, P(X=x_2)=p_2, \dots P(X=x_n)=p_n$.

В результате опыта случайная величина X примет только одно из этих значений, т.е. произойдет только одно из полной группы событий: $X=x_1$ ,$X=x_2$, … $X=x_n$.

Поскольку сумма вероятностей полной группы попарно несовместных событий равна 1, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

**Законом распределения** ДСВ называется соотношение между ее возможными значениями и их вероятностями (т. е. вероятностями, с которыми случайная величина принимает эти возможные значения).

Закон распределения может быть задан формулой (формулы Бернулли, Пуассона и др.), таблицей или графиком, а также функцией распределения.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | . . . | $x_n$ |
| $P_i$ | $p_1$ | $p_2$ | . . . | $p_n$ |

называется **законом или рядом распределения дискретной случайной величины**.

***Числовые характеристики ДСВ***

*Математическое ожидание ДСВ*

***Математическое ожидание***ДСВ находится по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

*Вероятностный смысл*этого выражения таков: при большом числе измерений среднее значение наблюдаемых значений величины X приближается к ее математическому ожиданию.

*Механический смысл*этого равенства заключается в следующем: математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы - их вероятностям.

*Дисперсия ДСВ*

***Дисперсия*** случайной величины X есть

$$D(X) = M((X - M(X))^2)$$

Дисперсию случайной величины X иногда удобнее вычислять по формуле

$$Д(X) = M(X)^2 - (M(X))^2 .$$

*Вероятностный смысл*Дисперсия случайной величины X есть характеристика рассеивания разбросанности значений случайной величины около ее математического ожидания. Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины.

*Среднее квадратическое отклонение*

Для более наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, имеющей размерность самой случайной величины. Поэтому вводится понятие *среднего квадратическогоотклонения*: $\sigma(X) = \sqrt{Д(X)}$.

**Пример**: Случайная величина X задана функцией распределения

| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| p(x) | 0,2 | 0,3 | $p_3$ | 0,1 |

Найти вероятность $p_3$. Найти числовые характеристики с.в.

**Решение:**Проверим тождество $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

0,2+0,3+$p_3$+0,1=1.

$p_3$=0,4.

Найдем числовые характеристики случайной величины X:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

M(X)=1.0,2+2.0,3+3.0,4+4.0,1=0,2+0,6+1,2+0,4=2,4.

Для вычисления дисперсии применим формулу: $Д(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

M(X2 )=12. 0,2+22.0,3+32.0,4+42.0,1=0,2+1,2+3,6+1,6=6,6.

$$Д(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 6,6 - (2,4)^2 = 0,84.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Д(X)} = \sqrt{0,84} \approx 0,916.$$

**Задания для расчетной работы**

1. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из 1-го, 2-го, 3-го орудия равны соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое из орудий стреляет по некоторой цели один раз. Построить ряд распределения случайной величины числа попаданий в цель. Вычислить числовые характеристики.
2. В ящике семь изделий, одно из которых бракованное. Из ящика извлекают одно изделие за другим, пока не обнаружат брак. Составить ряд распределения случайной величины - числа вынутых изделий. Найти ее числовые характеристики.
3. Дискретная случайная величина *X*задана рядом распределения:

| $x_i$ | -2 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,08 | 0,40 | 0,32 | 0,2 |

Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию; в) среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

## Список литературы

**Основные источники:**

1. Пехлецкий, И. Д. Математика [Текст] : учебник / И. Д. Пехлецкий. – 13-е изд., стер. – М. : Академия, 2018. – 320 с. – (Профессиональное образование).

2.Башмаков, М. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия [Текст] : учебник / М. И. Башмаков. – 3-е изд., стер. – М. : Академия, 2017. – 253 с. : ил. – (Профессиональное образование).

3.Башмаков, М. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия [Текст] : задачник : учеб. пособие / М. И. Башмаков. – 4-е изд., стер. – М. : Академия, 2017. – 253 с. : ил. – (Профессиональное образование).

**Дополнительные источники :**

1.Григорьев, В. П. Математика [Текст] : учебник / В. П. Григорьев, Т. Н. Сабурова. – 2-е изд., стер. – М. : Академия, 2018. – 368 с. – (Профессиональное образование).

2.Григорьев, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] : учеб. пособие / В. П. Григорьев, Т. Н. Сабурова. – 2-е изд., стер. – М. : Академия, 2018. – 160 с. – (Профессиональное образование).

3.Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики [Электронный ресурс] : учебник : в 2 т. Т. 1 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. – М. : КУРС : ИНФРА-М, 2017. – 304 с. – (Среднее профессиональное образование). – Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/615108

4.Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики [Электронный ресурс] : учебник : в 2 т. Т. 2 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. – М. : КУРС : ИНФРА-М, 2017. – 368 с. – (Среднее профессиональное образование). – Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/872363

**Интернет-ресурсы:**

1. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.school-collection.edu.ru

2. Математические олимпиады и олимпиадные задачи [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.zaba.ru

***Приложение 1***

**Образец оформления презентации**

1. Первый слайд:

| |
|---|
| Тема информационного сообщения (или иного вида задания): ________________________________________________ <br><br> Подготовил: Ф.И.О. студента, курс, группа, специальность <br> Руководитель: Ф.И.О. преподавателя |

2. Второй слайд

| План: |
| --- |
| 1. ___________________________________. |
| 2. ___________________________________. |
| 3. ___________________________________. |

3. Третий слайд

| Литература: |
| --- |

4. Четвертый слайд

| |
| --- |
| Лаконичноераскрытие  информации, можно<br>включать рисунки, автофигуры, графики, диаграммы<br>и другие способы наглядного отображения информации |