

Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ

для студентов специальности

08.02.04 Водоснабжение и водоотведение
(Учебный план 2023)

Челябинск, 2023

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по специальности **08.02.04 Водоснабжение и водоотведение**.

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Методические рекомендации предназначены для организации выполнения практических работ по учебной дисциплине «Математика».

Программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 12 практических работ, направленных на **формирование элементов следующих компетенций:**

Код ПК, ОК, ЛР	Умения	Знания
ОК 1-5,9 ПК 2.4 ЛР 1,2,4,10,11,13,14, 15,16,17	анализировать сложные функции и строить их графики; - выполнять действия над комплексными числами; - вычислять значения геометрических величин; - производить операции над матрицами и определителями; - решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; - решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления; - решать системы линейных уравнений различными методами.	основные математические методы решения прикладных задач; - основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; - основы интегрального и дифференциального исчисления; - роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

В методических указаниях к выполнению практических работ содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая практическая работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий.

Ход выполнения практической работы

Практические работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. В тетрадях для практических работ выполнить самостоятельную работу или решить номера, которые указаны в работе.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Критерии оценивания практических работ

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

Перечень практических работ

№ работы	Наименование практических работ	Кол-во часов
1.	Раскрытие различных неопределённостей.	2
2.	Вычисление производных сложных функций и высших порядков.	2
3.	Исследование функции с помощью производной.	2
4.	Вычисление неопределённых интегралов с помощью замены переменной.	2
5.	Вычисление неопределённых интегралов с помощью метода интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций.	2
6.	Вычисление определённых интегралов.	2
7.	Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур.	2
8.	Выполнение операций над матрицами.	2
9.	Решение СЛАУ различными методами.	2
10.	Выполнение операций над комплексными числами в различных формах.	2
11.	Решение вероятностных задач.	2
12.	Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм.	2
Всего		24

Практическая работа № 1

Раскрытие различных неопределённостей

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять пределы с различными видами неопределённостей.

Знания:

1. Определения предела функции.

Умения:

1. Вычисление пределов функций: раскрытие неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 1^\infty\right]$.

Содержание работы:

Типы неопределённостей и их виды

1 тип Неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в пределе

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} 0, \text{ если } n < k \\ \infty, \text{ если } n > k \\ \frac{a_n}{b_k}, \text{ если } n = k \end{cases}$$

Примеры:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 8}{2x^2 - 1} = \frac{5}{2}$ (т.к. старшие степени числителя и знаменателя равны, то делим коэффициенты при старших степенях x).

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x + 8}{2x^2 - 1} = \infty$ (т.к. старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя)

2 тип Неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ в пределе $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

Для раскрытия неопределённости необходимо либо разложить числитель и знаменатель на множители, либо умножить выражение содержащее корни на сопряжённое.

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{matrix} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \end{matrix} \right| = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)}{(x+3)} = \left[\frac{3-2}{3+3}\right] = \frac{1}{6}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+3-9}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} = \left[\frac{2}{3+3}\right] = \frac{1}{3}$$

3 тип I-ый замечательный предел и основные эквивалентности:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

При $x \rightarrow 0$ имеют место следующие неопределённости:

$$\sin x \sim x \quad \operatorname{tg} x \sim x \quad \arcsin x \sim x \quad \operatorname{arctg} x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad e^x - 1 \sim x \quad \ln(1-x) \sim -x$$

Примеры:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos 5x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{\frac{(5x)^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{\frac{25x^2}{2}} = \frac{18}{25}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x-1)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

4 тип II -ой замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Примеры:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x-3}{x+1} - 1 \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x-3-x-1}{x+1} \right)^{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{x+1} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-4}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{-4}} \right)^{\frac{-4}{x+1} \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{-4x+4}{x+1}} = e^4 \end{aligned}$$

Задания для практической работы:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
«3»		
а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3}$	а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-8}{4x+2}$	а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x+2}{5x-1}$
б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-2x}{x+1}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2x+7}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-8x}{4x+5}$
в) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-36}{x-6}$	в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25}$	в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 5x}$
д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x}$	д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x$	д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{5x}$
«4»		
а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$	а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x+5}{x^2+6}$	а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^3+5x-2}$
б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}$
в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-4}$	в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$	в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}$
д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{2x}$	д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{3x}$	д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-2} \right)^{5x}$
«5»		

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$	a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 3x^2 + 2x}{4x^3 - 2x + 1}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^3 + 4}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{300x - 1000}$
в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}$	в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{7 + 2x - x^2}}{x^2 - 2x}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}}{x^2 - x}$
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sin^2 \frac{x}{5}}$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\sin^2 x}$
д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{5x}$	д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{3x}$	д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-2} \right)^{4x}$

Практическая работа № 2

Вычисление производных сложных функций и высших порядков

Цель работы:

Проверить умения нахождения производной сложной функции.

Знания:

1. Определение производной и её свойства.
2. Понятие сложной функции.
3. Формула вычисления производной сложной функции.

Умения:

1. Вычисление производной заданной сложной функции.

Содержание работы:

Таблица производных основных элементарных функций:

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \neq 0)$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Основные правила нахождения производной:

$$(c)' = 0; \quad (x)' = 1; \quad (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (cu)' = cu'; \quad (uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Производная сложной функции

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, то $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция, тогда её производная вычисляется по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, то есть $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$. Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: *производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.*

Примеры:

1. Найти производную сложной функции: $y = \ln(x^3 - 3x^2 + 4x)$.

Положим $y = \ln u$, где $u = x^3 - 3x^2 + 4x$ получим:

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_x = (\ln(x^3 - 3x^2 + 4x))' = \frac{1}{u} \cdot (x^3 - 3x^2 + 4x)' = \\ &= \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 4x} \cdot (3x^2 - 6x + 4) = \frac{3x^2 - 6x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4x} \end{aligned}$$

2. Найти производную сложной функции: $y = \cos^2 \frac{x}{6}$.

Положим $y = u^2$, $u = \cos v$, $v = \frac{x}{6}$, получим:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u \cdot (-\sin v) \cdot \frac{1}{6} = 2 \cos \frac{x}{6} \cdot \left(-\sin \frac{x}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \sin \frac{x}{3}$$

Задания для практической работы:

Вычислите производные сложных функций:

Вариант 1

$$1) y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) 2) y = \sqrt{x^2 + 4} 3) y = 2^{\arcsin x^2} 4) y = \ln \frac{2x-1}{2x+1} 5) y = \frac{1}{(5x-1)^3}$$

Вариант 2

$$1) y = \sin(2x^2 - 3x + 1) 2) y = \cos^3(2x - 1) 3) y = \left(\sqrt{x} + \frac{x^2}{4}\right)^3$$

$$4) y = \ln(\ln x) 5) y = e^{\arctg 4x}$$

Вариант 3

$$1) y = \cos(3x^2 - 4x) 2) y = \sin^3(1 - 2x) 3) y = (x^2 - 2\sqrt{x})^4$$

$$4) y = \log_2(2x - 5) 5) y = e^{-x^3}$$

Вариант 4

$$1) y = \tg(x^3 - 1) 2) y = 5^{x^2 - 3x + 5} 3) y = \sqrt[3]{(7 - 2x)^2} 4) y = \frac{1}{\ln 3x}$$

$$5) y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

Вариант 5

$$1) y = \ctg(2 - x^2) 2) y = \ln(\cos(5x)) 3) y = 2^{\frac{1}{x}} 4) y = \cos(\cos x)$$

$$5) y = \sqrt{3x - 4}$$

Практическая работа № 3

Исследование функции с помощью производной

Цель работы:

Используя схему исследования функции научиться исследовать функции и строить графики.

Знания:

1. Понятие экстремумов функции и её точек перегиба.
2. Понятие асимптот и их классификация.

Умения:

1. Построение графиков функций.

Содержание работы:

Общая схема исследования функции и построение её графика.

1. Найдите область определения функции.
2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.
3. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат (нули функции).
4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.
5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.
6. Определите наличие асимптот.
7. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример:

Построить график функции: $y = \frac{x^2}{x+1}$

1. $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

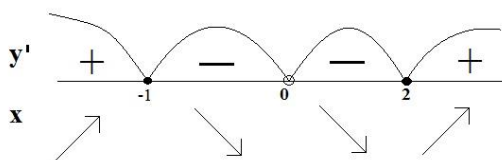
2. Т.к. область определения не симметрична относительно начала координат, то функция не является ни чётной, ни нечётной (т.е. общего вида).

3. При $x=0$, $y(0)=0$ – это единственная точка пересечения графика с осями координат.

4. $y' = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:

$$\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x \neq -1 \end{matrix}$$

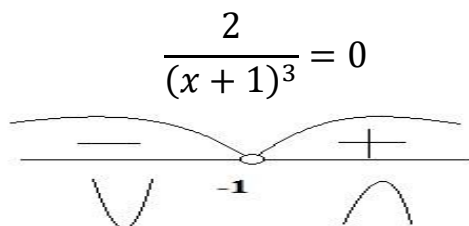


$x = -2$ – *m. max* $y_{max} = y(2) = -4$

$x = 0$ – *m. min* $y_{min} = y(0) = 0$

5. Вычислим вторую производную и приравняем её к нулю:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(x^2 + 2x)'(x+1)^2 - (x^2 + 2x)((x+1)^2)'}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2 + 2x)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)(x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{2}{(x+1)^3} \end{aligned}$$



Точек перегиба у данной функции нет.

6. Определим наличие асимптот:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty$ т.е. горизонтальных асимптот нет.

б) Рассмотрим односторонние пределы в точке $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2}{x+1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2}{x+1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

Т.к. в точке $x=-1$ функция терпит бесконечный разрыв, то график функции имеет вертикальную асимптоту $x=-1$

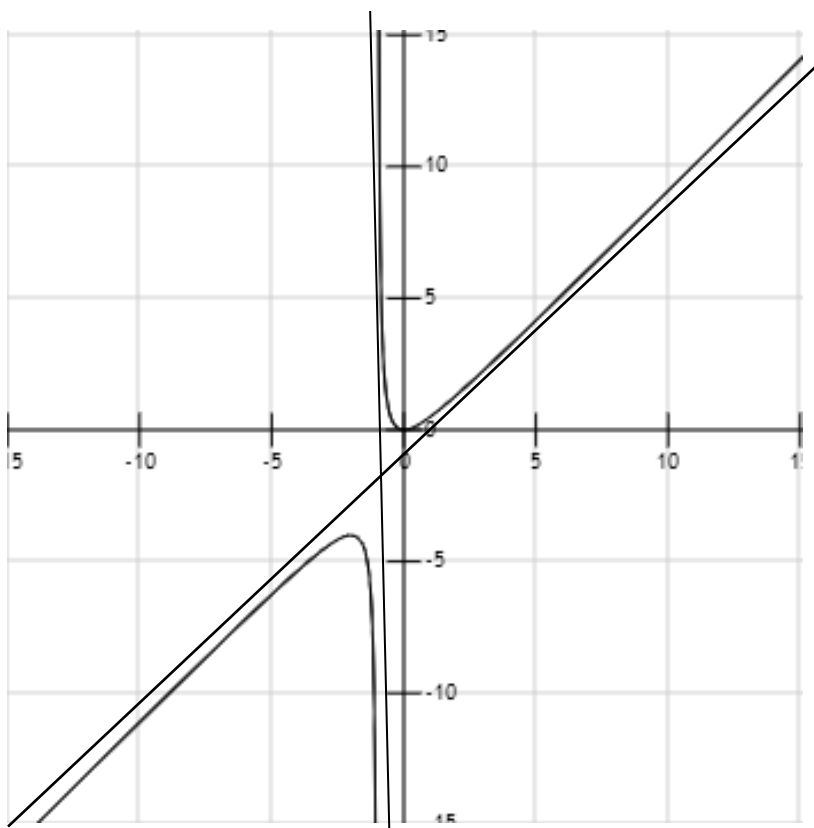
в) Для отыскания вертикальной асимптоты в виде $y=kx+b$ вычислим следующие пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

Таким образом, прямая $y=x-1$ служит наклонной асимптотой графика.

7. Используя полученные данные, строим график функции:



Задания для практической работы:

ЗАДАЧА 1

Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

1. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

9. $y = x^3 - 6x^2 - 15x - 8$

2. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$

10. $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$

3. $y = x^3 + 12x^2 + 45x + 50$

4. $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

5. $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$

6. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

7. $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 28$

8. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

ЗАДАЧА 2

Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

1. $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$. 2. $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 3}$. 3. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.
4. $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$. 5. $y = \frac{x^2 + 3x + 4}{x}$. 6. $y = \frac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$.
7. $y = \frac{x^2 + 2x + 8}{x + 4}$. 8. $y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x - 4}$. 9. $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 5}$.

Практическая работа № 4

Вычисление неопределённых интегралов с помощью замены переменной

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить неопределенный интеграл с помощью замены переменных.

Знания:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

Умения:

1. Вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования.
2. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменной

Содержание работы:

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} x + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int \operatorname{tg} x dx = \ln \cos x + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	

Непосредственное интегрирование – это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов. Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

- 1) деление числителя на знаменатель почленно;
- 2) применение формул сокращенного умножения;
- 3) применение тригонометрических тождеств.

Пример 1. Найти интеграл $\int (3x^2 + 2x - 5) dx$

Решение.

$$\int (3x^2 + 2x - 5) dx = \int 3x^2 dx + \int 2x dx - \int 5 dx = x^3 + x^2 - 5x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{7x^2 + x - 1}{x^3} dx$

Решение. Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель.

$$\int \frac{7x^2 + x - 1}{x^3} dx = 7 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx = 7 \ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int (1 + e^x)^3 dx$

Решение. Возводим в куб и интегрируем каждое слагаемое.

$$\begin{aligned} \int (1 + e^x)^3 dx &= \int (1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}) dx = \int dx + 3 \int e^x dx + 3 \int e^{2x} dx + \int e^{3x} dx = \\ &= x + 3e^x + \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x} + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 4} dx$

Решение. Разлагаем подынтегральную дробь на две слагаемых дроби, деля числитель почленно на знаменатель.

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 - 4} dx = \int \frac{2x}{x^2 - 4} dx - 3 \int \frac{dx}{x^2 - 4} = \ln|x^2 - 4| - \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{x^2 + 5} dx$

Решение. Выделим в неправильной дроби целую часть и правильную дробь.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2 + 5} dx &= \int \frac{(x^2 + 5) - 5}{x^2 + 5} dx = \int \left(1 - \frac{5}{x^2 + 5} \right) dx = \int dx - 5 \int \frac{dx}{x^2 + 5} = \\ &= x - \sqrt{5} \arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной

интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Пример 6. Вычислить $\int (3x - 4)^4 dx$

Решение. Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной $t = 3x - 4$

$$\int (3x - 4)^4 dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x - 4 \\ dt = (3x - 4)' dx = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \int t^4 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^4 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^5}{5} + C$$

$$= \frac{t^5}{15} + C = \frac{(3x - 4)^5}{15} + C$$

Пример 7. Вычислить $\int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx$

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной $t = x^3 + 8$

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 + 8 \\ dt = (x^3 + 8)' dx = 3x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{3} dt}{t} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \cdot \ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3 + 8| + C$$

Пример 8. Вычислить $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4} dx$

Решение. Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной $t = \sin x$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = (\sin x)' dx = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{2} + C$$

Задания для практической работы:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\int (2\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{2x} + 5) dx$	$\int (x-1)(x+2) dx$	$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx$
$\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$	$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$	$\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3} dx$
$\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$	$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$	$\int \operatorname{tg}^2 x dx$
$\int \frac{dx}{(5 - 3x)^5}$	$\int \frac{dx}{11 - 4x}$	$\int \sqrt{8x - 9} dx$

$\int x\sqrt{x^2-7}dx$	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$	$\int \frac{xdx}{x^2+6}$
$\int \frac{e^x dx}{e^x+4}$	$\int \sin x \cos^2 x dx$	$\int \frac{e^x dx}{(e^x-5)^3}$

Практическая работа № 5

Вычисление неопределённых интегралов с помощью метода интегрирования по частям, интегрирование рациональных функций

Цель работы:

На конкретных примерах научиться находить неопределенный интеграл с помощью формулы интегрирования по частям, а также интегрировать рациональные функции.

Знания:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

Умения:

1. Вычисление неопределённых интегралов методом интегрирования по частям.
2. Вычисление неопределённых интегралов от рациональных функций.

Содержание работы:

Метод интегрирования по частям сводится к вычислению интеграла по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Для вычисления интеграла по этой формуле необходимо подынтегральное выражение исходного интеграла представить как $u dv$. Т.е. часть выражения принять за u , а часть - за dv .

Пример 1. Вычислить интеграл с помощью формулы интегрирования по частям: $\int x^2 \ln x dx$

Решение:

Положим $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$ дифференцируя u и интегрируя dv получим:

$$du = \frac{dx}{x} \quad v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Постоянная C в этом случае не ставится; она будет поставлена в окончательном результате, когда будет найден данный интеграл.

Обращаемся теперь к формуле интегрирования по частям:

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Пример 2. $\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} U = x^2; \quad U' = 2x \\ V' = \cos x; \quad V = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} U = 2x; \quad U' = 2 \\ V' = \sin x; \quad V = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - (2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

Пример 3. $\int \arccos x \, dx = \left| \begin{array}{l} U = \arccos x; \quad U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; \quad V = x \end{array} \right| = x \cdot \arccos x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены переменной)

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ -x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

в итоге получаем $\int \arccos x \, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$

Интегрирование рациональных дробей осуществляется с помощью разложения на простейшие дроби:

Пример 4.

$$\int \frac{x^2 + 2x + 6}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} dx$$

Решение:

Знаменатель дроби раскладывается на множители:

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x-1)(x-2)(x-4)$$

Так как каждый из двучленов входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}$$

Освобождаясь от знаменателя, получим

$$x^2 + 2x + 6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2)$$

Следовательно,

$$x^2 + 2x + 6 = A(x^2 - 6x + 8) + B(x^2 - 5x + 4) + C(x^2 - 3x + 2)$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$x^2 + 2x + 6 = (A+B+C)x^2 + (-6A-5B-3C)x + (8A+4B+2C)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему:

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ -6A - 5B - 3C = 2 \\ 8A + 4B + 2C = 6 \end{cases}$$

Из которой найдем $A=3, B=-7, C=5$.

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} + \frac{-7}{x-2} + \frac{5}{x-4}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 2x + 6}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} dx &= \int \frac{3dx}{x-1} + \int \frac{-7dx}{x-2} + \int \frac{5dx}{x-4} = 3 \int \frac{dx}{x-1} - 7 \int \frac{dx}{x-2} + 5 \int \frac{dx}{x-4} = \\ &= 3 \ln|x-1| - 7 \ln|x-2| + 5 \ln|x-4| + C = \ln \left| \frac{(x-1)^3 (x-4)^5}{(x-2)^7} \right| + C\end{aligned}$$

Пример 5. $\int \frac{x^6}{x^2 - x + 1} dx.$

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2 - x + 1} = x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\begin{aligned}\int \left(x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right) dx &= \int x^4 dx + \int x^3 dx - \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C;\end{aligned}$$

Задания для практической работы:

Интегрирование по частям

1. $\int x \sin x dx$
2. $\int \ln x dx$
3. $\int x^2 e^x dx$

Интегрирование рациональных дробей

1. $\int \frac{x+2}{x(x-3)} dx$
2. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx$
3. $\int \frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} dx$

Практическая работа № 6

Вычисление определённых интегралов

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять определённый интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить определённый интеграл с помощью замены переменных и методом интегрирования по частям.

Знания:

1. Понятие определённого интеграла, его основных свойств.

Умения:

1. Вычисление определённых интегралов методом непосредственного интегрирования.
2. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменной и по частям.

Теоретические сведения.

Определённый интеграл вычисляется с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример 1

Вычислите определённый интеграл $\int_0^1 (5x^5 + 4x^3 - 5x - 2)dx$.

Решение:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (5x^5 + 4x^3 - 5x - 2)dx &= 5 \int_0^1 x^5 dx + 4 \int_0^1 x^3 dx - 5 \int_0^1 x dx - 2 \int_0^1 dx = \left(\frac{5x^6}{6} + \frac{4x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 = \\ &= \left(\frac{5 \cdot 1^6}{6} + \frac{4 \cdot 1^4}{4} - \frac{5 \cdot 1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) - 0 = -4 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Пример 2

Вычислите определённый интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{3}.$$

Пример 3

Вычислите определённый интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2}$.

Решение:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{\pi}{18}.$$

Пример 4

Вычислите определенный интеграл $\int_4^5 (4-x)^3 dx$.

Решение:

$$\int_4^5 (4-x)^3 dx = \frac{(4-x)^4}{-4} \Big|_4^5 = \frac{(4-5)^4}{-4} - \frac{(4-4)^4}{-4} = -\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}.$$

Метод интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, произведение функций, а в ряде случаев – и частное.

Данный метод позволяет свести исходный определенный интеграл к более простому виду либо к табличному интегралу. Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Самое сложное, что есть в этом методе – это правильно определить, какую часть подынтегрального выражения брать за u , а какую за dv

Рассмотрим стандартные случаи.

- Для интегралов вида $\int P(x)e^{ax} dx$, $\int P(x) \sin(ax) dx$ или $\int P(x) \cos(ax) dx$, где $P_n(x)$ – многочлен, a – число. Удобно принять $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

- Интегралы вида $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$. Удобно принять $P(x) = dv$, а за u все остальные сомножители.

- Интегралы вида $\int \sin bx \cdot e^{ax} dx$, $\int \cos bx \cdot e^{ax} dx$, где a и b числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 5. Вычислить $\int_1^2 x e^x dx$

Решение.

$$\int_1^2 x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx =$$

$$= 2e^2 - e - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Пример 6. Вычислить $\int_0^\pi x \sin x dx$

Решение.

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ \sin x dx = dv \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_1^2 \cos x dx =$$

$$= -\pi \cdot (-1) + 0 + \sin x \Big|_0^\pi = \pi.$$

Интегрирование заменой переменной (подстановкой).

Пусть для интеграла $\int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$.

Если: 1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha; \beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha; \beta]$ является отрезок $[a; b]$

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] \Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

Отметим, что: 1) При вычислении определённого интеграла методом замены переменной возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$;

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

Алгоритм вычисления определённого интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4. Находят новые пределы интегрирования.

5. Производят замену под интегралом.

6. Находят полученный интеграл.

Пример 7. Вычислить $\int_4^5 x \sqrt{x^2 - 16} dx$

Решение. Замена: $t = x^2 - 16$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$.

Найдём новые пределы интегрирования. При $x=4$, $\alpha = t(4) = 4^2 - 16 = 0$; $x=5$, $\beta = t(5) = 5^2 - 16 = 9$.

Получаем:

$$\int_4^5 x\sqrt{x^2 - 16} dx = \int_0^9 \frac{1}{2}\sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^9 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^9 = \frac{1}{3} t\sqrt{t} \Big|_0^9 = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{9} = 9.$$

Пример 8. Вычислить $\int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{2x+1} + 1}$

Решение. Замена: $t = \sqrt{2x+1} + 1$, .

$$t-1 = \sqrt{2x+1}, 2x+1 = (t-1)^2, x = \frac{(t-1)^2 - 1}{2} = \frac{t^2 - 2t}{2}, dx = (t-1)dt.$$

Найдём новые пределы интегрирования. При $x=0$, $\alpha = t(0) = 2$; $x=4$, $\beta = t(4) = 4$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{2x+1} + 1} &= \int_2^4 \frac{(t^2 - 2t) \cdot (t-1)}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_2^4 (t-2)(t-1) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_2^4 (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right) \Big|_2^4 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{64}{3} - 24 + 8 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Задания для практической работы.

Вариант 1.

$$1. \text{ а) } \int_1^2 (3x^2 - 2x) dx \quad \text{б) } \int_2^3 (1-x)^4 dx \quad \text{в) } \int_1^2 (4x^3 - 3x^2) dx$$

2. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x \cos 4x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 x \ln(1+x) dx$$

3. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}; \quad \text{б) } \int_1^2 3x(1-x)^{17} dx$$

Вариант 2.

$$1. \text{ а) } \int_{-2}^1 (x^2 - x) dx \quad \text{б) } \int_{-1}^1 (7-5x) dx \quad \text{в) } \int_1^0 (1-2x)^4 dx.$$

2. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_0^3 (x-3)e^{-x} dx; \quad \text{б) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$$

3. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int_1^9 \frac{x dx}{\sqrt{2x+7}}$; б) $\int_2^3 x(3-x)^7 dx$

Практическая работа № 7

Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур

Цель работы:

1. Научиться вычислять определённые интегралы.
2. Познакомиться с понятием криволинейной трапеции
3. На конкретных примерах научиться находить площадь криволинейной трапеции

Знания:

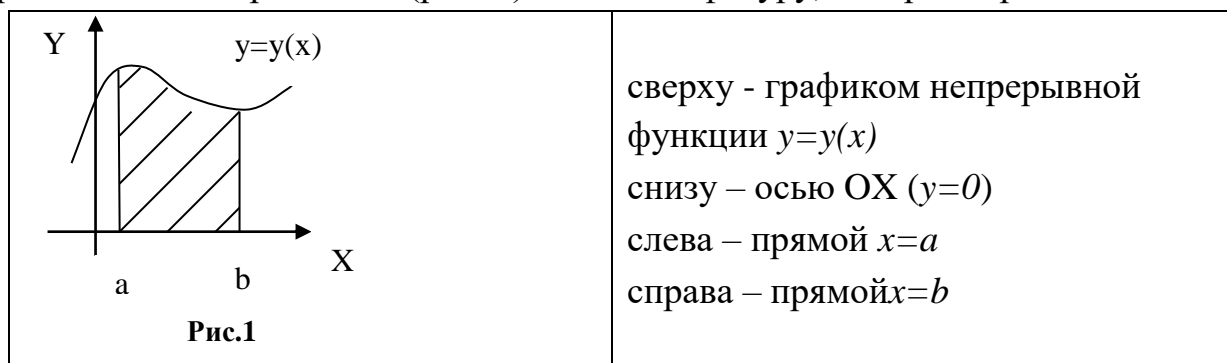
1. Понятие определённого интеграла.
2. Свойства определённого интеграла.
3. Основные методы вычисления определённых интегралов.
4. Понятие криволинейной трапеции
5. Методы вычисления площади криволинейной трапеции

Умения:

1. Вычисление определённых интегралов.
2. Вычисление площади криволинейной трапеции

Содержание работы:

Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:



Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

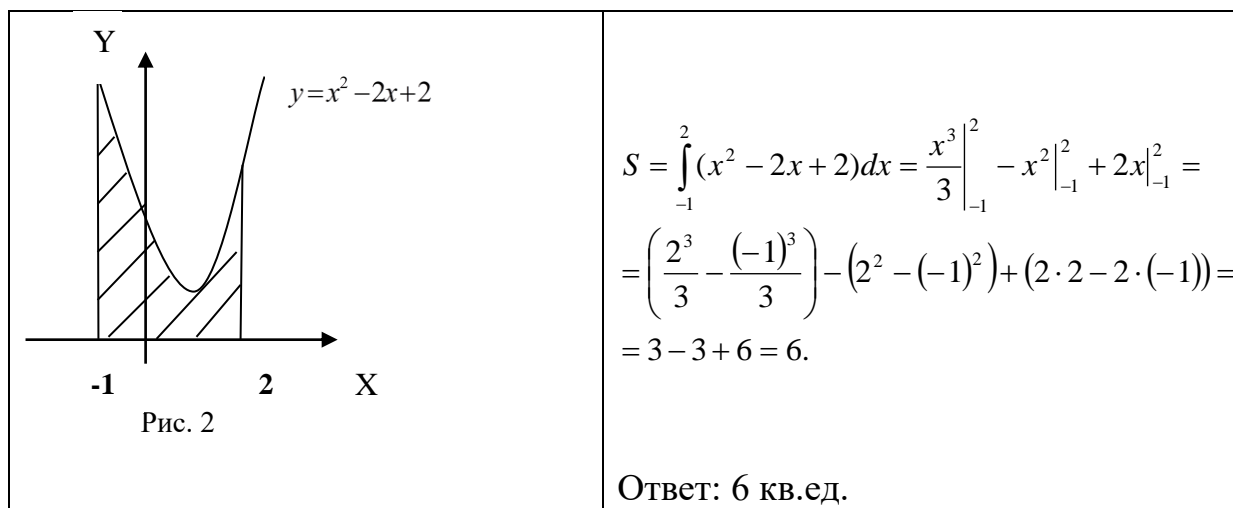
$$S = \int_a^b y(x) dx \quad (1)$$

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

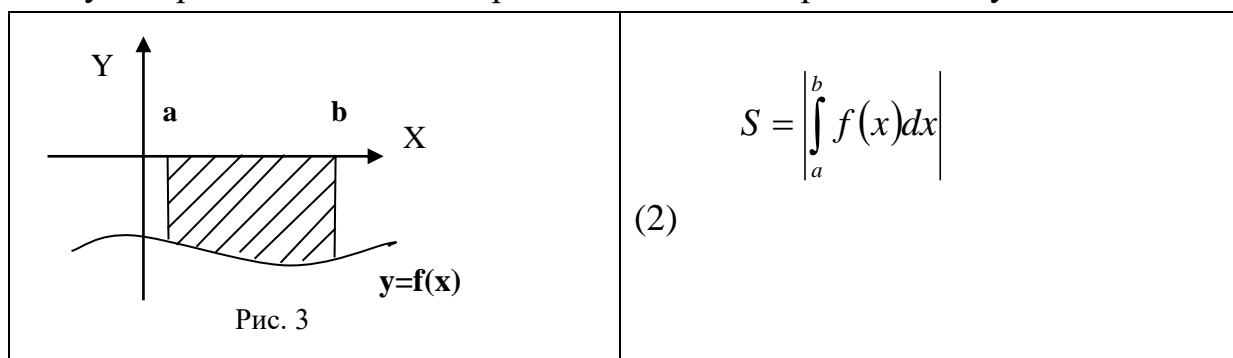
Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2x + 2, x = -1, x = 2 \text{ и осью ОХ.}$$

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

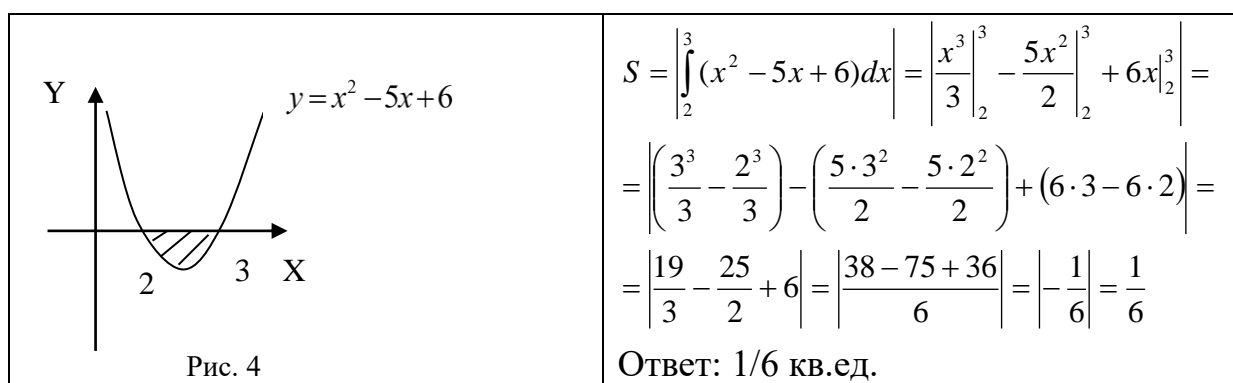


Пусть $y=f(x)$ – непрерывная функция при $x \in [a, b]$, график которой расположен ниже оси ОХ (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.



Пример 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 5x + 6$ и осью ОХ.

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси ОХ, поэтому применим формулу (2).

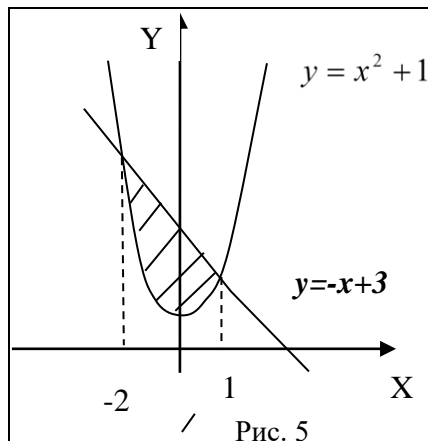


Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = -x + 3$.

Решение: данная фигура (рис. 5) представляет собой разность криволинейных трапеций

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

$$S = \int_{-2}^1 (-x + 3) dx - \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx. \text{ Можно записать под один интеграл:}$$

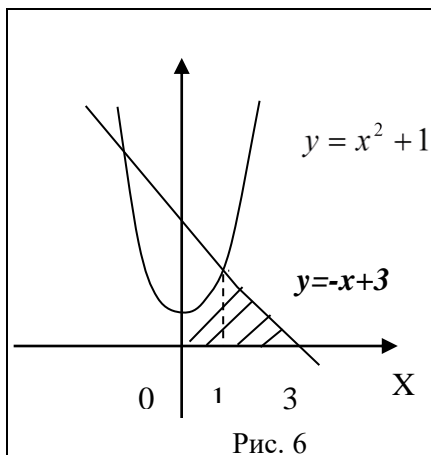


$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 (-x + 3 - (x^2 + 1)) dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \\ &= 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = (2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} \right) - \\ &- \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right) = 6 - \left(-\frac{3}{2} \right) - 3 = 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

Пример 4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = -x + 3$, и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций $S = S_1 + S_2$, где $S_1 = \int_0^1 (x^2 + 1) dx$ и $S_2 = \int_1^3 (-x + 3) dx$. Получим формулу:



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^2 + 1) dx + \int_1^3 (-x + 3) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 + \\ &+ 3x \Big|_1^3 = \\ &= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + (1 - 0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + (3 \cdot 3 - 3 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{3} + 1 - 4 + 6 = 3\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $3\frac{1}{3}$ кв.ед.

Задания для практической работы:

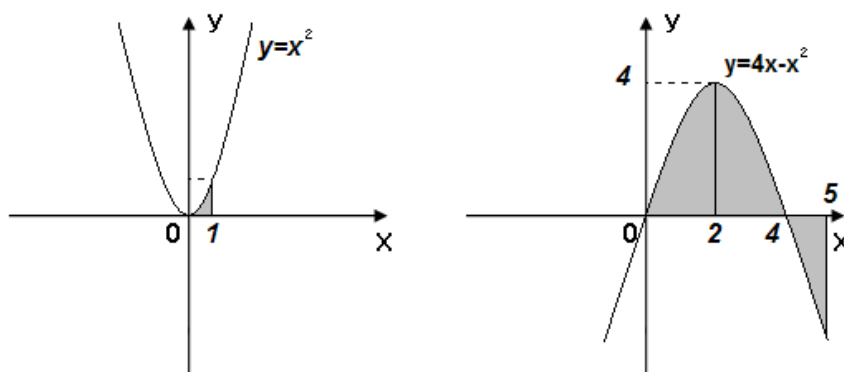
Задание 1 Вычислить определённые интегралы:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$	$\int_2^3 (2x - 1)(3x + 5) dx$	$\int_0^8 \sqrt[3]{x}(x + 1) dx$

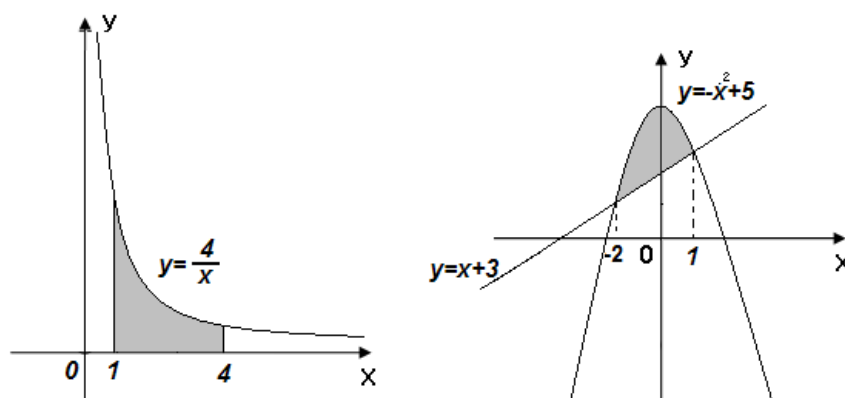
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \sin x dx$	$\int_0^1 x \cdot 2^x dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5x \cos x dx$
$\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^3 + 1)}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 x dx$	$\int_0^1 x(x^2 - 3)^5 dx$

Задание 2 Вычислить площади фигур

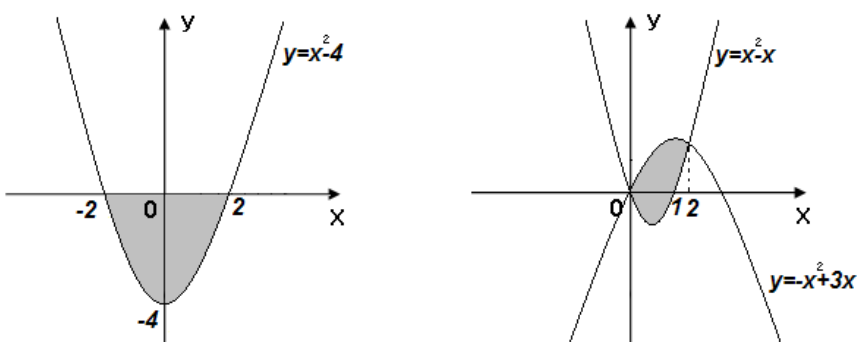
Вариант 1



Вариант 2



Вариант 3



Практическая работа № 8

Выполнение операций над матрицами

Цель работы:

На конкретных примерах научиться выполнять операции над матрицами.

Знания:

1. Определения матрицы и операций над матрицами.

Умения:

1. Сложение, вычитание, транспонирование и умножение матриц.

Содержание работы:

Теоретические сведения к практической работе

Матрицей размером $n \times m$ называется прямоугольная таблица, составленная из $n \cdot m$ чисел и имеющая n строк и m столбцов. Числа α_{ij} , составляющие матрицу, называются элементами матрицы

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A^t называют транспонированной по отношению к матрице A , если она получена из матрицы A заменой строк этой матрицы её столбцами, и, наоборот, столбцов строками.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n \times m}.$$

Пример, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все ее элементы, размещенные над главной диагональю (под ней), равны нулю, т.е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} - \text{верхняя треугольная матрица},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{нижняя треугольная матрица}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей.

Матрица-строка $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, матрица-столбец $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$

Операции над матрицами.

1) Пусть матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$ одинаковой размерности. Суммой матриц A и B называется матрица $C_{m \times n}$ той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матрицы A и B .

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

2) Разностью матриц $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$ одинаковой размерности называется матрица $C_{m \times n}$ той же размерности, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов матрицы A и B .

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

3) Произведением матрицы A на число λ называется матрица C , каждый элемент которой равен $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

4) Матрицу A можно умножить на матрицу B ($A \cdot B = C$) лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы $A_{m \times n}$ равно числу строк второй матрицы $B_{n \times l}$, т.е. $A_{m \times n} \cdot B_{n \times l} = C_{m \times l}$. При этом каждый элемент матрицы-произведения C определяется так:

$$c_{ij} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

Т.е., элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

Найти произведение матрицы-строки и матрицы-столбца:

Пример 1.

$$1) (5 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = 10 - 12 = -2,$$

$$2) (1 \ -1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 4 - 3 - 6 = -5,$$

$$3) (-4 \ 1 \ -8) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = (-4) \cdot 2 + 1 \cdot (-5) + (-8) \cdot 0 = -8 - 5 = -13,$$

$$4) (-2 \ 0 \ 5 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = -6 + 5 = -1,$$

$$5) (7 \ -1 \ 0 \ 2 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 7 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -2 - 8 + 6 = -4.$$

Пример 2

Для заданных матриц A, B, C найти матрицы $3A+2B, C^T, AB, BA, C^T B, AB+E, BA-4C$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\begin{aligned} 1.1) \quad 3A+2B &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ -3 & -3 & 9 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 6 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 & 9+0 & -12+6 \\ -3+6 & -3-2 & 9+2 \\ 3+2 & -6+4 & 15+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -6 \\ 3 & -5 & 11 \\ 5 & -2 & 15 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$1.2) \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} 1.3) \quad A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2) & 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & (-1) \cdot (-4) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4-3-4 & 6-3+8 & -8+9-20 \\ -2+1+3 & -3+1-6 & 4-3+15 \\ 2+2+5 & 3+2-10 & -4-6+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 11 & -19 \\ 2 & -8 & 16 \\ 9 & -5 & 15 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.4) \quad A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2+9-4 & -3-8 & 6+3 \\ -1-3+3 & 1+6 & -3-1 \\ 1-6+5 & 2+10 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 9 \\ -1 & 7 & -4 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.5) \quad B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2+3 & 3-6 & -4+15 \\ 6+1+1 & 9+1-2 & -12-3+5 \\ 2-2 & 3-2 & -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 8 & 8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подчеркнем еще раз, что $AB \neq BA$.

$$\begin{aligned}
 1.6) C^T \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 & (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1+9-2 & -3-4 & 3+3 \\ -1-3 & 1 & -3-1 \\ 6-3 & -2-6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 6 \\ -4 & 1 & -4 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

Задания для практической работы.

Задание 1. Для матриц A, B, C вычислить:

1) $3A^T - 4B$, 2) $2B^T + 5A$, 3) $AB + 5E$,

4) $AC + 2B^T$, 5) $CB - 2A^T$, 6) $(C^T)^2 - 4E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Для матриц A, B, C вычислить:

1) $5A - 2B + 3C$, 2) $2A^T - 3C^T + B^T$,

3) $AB - BA$, 4) $A^2 - B^2$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad 6) (1 \ 2 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix};$$

$$7) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 8) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Практическая работа № 9

Решение СЛАУ различными методами

Цель работы:

1. Научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.
2. Научиться решать системы линейных уравнений матричным методом.
3. Научиться решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

Знания:

1. Понятие системы линейных уравнений.

2. Матричный метод, метод Крамера и Гаусса.

Умения:

1. Решение систем линейных уравнений матричным методом, методом Крамера и Гаусса.

Содержание работы:

Системой из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными называется

$$\text{система вида: } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

1. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Пример: Решить систему $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ методом Крамера

Вычисляем определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3.$$

Чтобы получить определитель Δ_1 , мы заменили в определителе Δ первый столбец на столбец из свободных членов; заменяя в определителе Δ 2-ой столбец на столбец из свободных членов, получаем Δ_2 ; аналогичным образом, заменяя в определителе Δ 3-ий столбец на столбец из свободных членов, получаем Δ_3 . Решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Ответ: (1; 0; -1)

2. Запишем систему (I) в матричном виде $AX = B$, тогда решение ищем в виде: $X = A^{-1}B$ (при условии, что матрица A - невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$).

Пример: Решить систему
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
 с помощью обратной матрицы

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 1 - 1 - 0 + 2 = 3 \neq 0$$

Найдем матрицу A^{-1}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ тогда } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: (1; 0; -1)

Процесс решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Гаусса состоит из двух этапов.

Первый этап (прямой ход метода) – система приводится к треугольному виду.

Второй этап (обратный ход) – неизвестные определяются последовательно, начиная с последнего неизвестного и заканчивая первым.

Пример: Решить систему:
$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ 3x - y + 5z = 2, \\ x - 2y + 4z = 3. \end{cases}$$

Решение:

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-2) \\ \times(-3) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\oplus} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем $r(\bar{A})=3$, ранг матрицы системы также равен трем, $r(A)=3$ и число неизвестных $n=3$, следовательно, система определенная, т.е. имеет единственное решение.

2. Записываем уравнение, используя последнюю строку приведённой матрицы: $z=1$.

Из второй строки: $5y-7z = -7$, т.к. $z=1$, то $y = 0$. Из третьей строки: $x-2y+4z=3$, т.к. $z=1$ $y=0$, то $x=1$.

Ответ: $(-1, 0, 1)$

Пример: Решить систему:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-2) \\ \times(-3) \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 21 \\ 0 & -10 & 11 & 9 & 32 \end{array}\right) \xrightarrow{\times \frac{1}{7}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & 11 & 9 & 32 \end{array}\right) \xrightarrow{\times(-10)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем $r(\bar{A})=3$, ранг матрицы системы также равен трем, $r(A)=3$. Поскольку ранг рассмотренных матриц равен 3, а число неизвестных переменных 4, т. е. $r=3 < n=4$, то делаем вывод о неопределенности данной системы линейных уравнений (т.е. система имеет бесконечное множество решений).

Базисными переменными будут x_1, x_2, x_3 (соответствующие этим переменным коэффициенты находятся в уголках ступенек треугольной матрицы), а переменная x_4 будет свободной. Пусть $x_4 = C$, тогда

из третьей строки приведённой матрицы: $x_3 - x_4 = 2 \Rightarrow x_3 - C = 2 \Rightarrow x_3 = 2 + C$

из второй строки: $-x_2 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow -x_2 + 2 + C + C = 3 \Rightarrow x_2 = 2C - 1$

из первой строки: $x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -10 \Rightarrow x_1 + 3(2C - 1) - 4(2 + C) - 4C = -10$

$x_1 + 6C - 3 - 8 - 4C - 4C = -10 \Rightarrow x_1 = 2C + 1$

Ответ: $(2C+1; 2C-1; C+2; C)$, $C \in R$

Задания для практической работы.

Решить системы линейных уравнений а) матричным методом; б) методом Крамера:

$$1) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ 7x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -12 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 18 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 26 \\ x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19 \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 17 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11 \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

Решить системы методом Гаусса:

$$1 \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -1, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -7, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -9. \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -5, \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 3. \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 - 8x_2 + 17x_3 - 19x_4 = 5. \end{cases}$$

Практическая работа № 10

Выполнение операций над комплексными числами в различных формах.

Цель работы:

Научиться выполнять операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

Знания:

1. Понятие комплексного числа.

Умения:

1. Выполнение операций над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

2. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

Содержание работы:

Число вида $z = \alpha + i\beta$, где α, β - действительные числа, i - мнимая единица, определяемая равенством: $i^2 = -1$, называется *комплексным числом*. α - действительная часть комплексного числа, β - мнимая часть комплексного числа.

Модулем комплексного числа $z = \alpha + i\beta$: $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Числа $z = \alpha + i\beta$ и $z = \alpha - i\beta$ называются *сопряженными*.

Для того, чтобы *сложить или вычесть* два комплексных числа в алгебраической форме нужно соответственно сложить или вычесть их действительные и мнимые части.

Пример: Найти сумму и разность чисел: $z_1 = 1 - 2i$ $z_2 = 3 + i$

$$z_1 + z_2 = (1 - 2i) + (3 + i) = (1 + 3) + (-2 + 1)i = 4 - i$$

$$z_1 - z_2 = (1 - 2i) - (3 + i) = (1 - 3) + (-2 - 1)i = -2 - 3i$$

Для того, чтобы *умножить* два комплексных числа в алгебраической форме нужно перемножить их как многочлены и учесть при этом, что $i^2 = -1$.

Пример: Найти произведение чисел: $z_1 = 1 - 2i$ $z_2 = 3 + i$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i) \cdot (3 + i) = 3 + i - 6i - 2i^2 = 3 - 5i + 2 = 5 - 5i$$

Для нахождения частного комплексных чисел $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ и $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ сначала числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ умножают на сопряженное знаменателю число $\overline{z_2} = \alpha_2 - i\beta_2$, а затем производят остальные действия.

Пример: Найти частное чисел: $z_1 = 1 - 2i$ $z_2 = 3 + i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3+i} = \frac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-6i-i+2i^2}{9-i^2} = \frac{3-7i-2}{9+1} = \frac{1-7i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i = 0,1 - 0,7i$$

Запись комплексного числа в виде $z = a + ib$ называется алгебраической формой записи комплексного числа. Часто бывает удобна другая форма записи комплексного числа. Пусть $z = a + bi$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\varphi = \arg z$. Тогда по определению аргумента имеем:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{cases}$$

Отсюда получается $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Такая форма называется тригонометрической формой записи комплексного числа. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

Пример Записать число $z = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Найдём модуль этого числа: $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ Аргумент данного числа находится из системы
$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Значит, один из аргументов числа $z = 1 - \sqrt{3}i$ равен $-\frac{\pi}{3}$.

Получаем: $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$.

Умножение, деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме определяются следующим образом:

если $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то

$$1) z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \text{ если } r_2 \neq 0;$$

если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$3) z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi));$$

$$4) \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

В ответ записываются главные значения аргумента полученного результата, заключенные в промежутке $(-\pi; \pi]$.

Пример Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:

а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_2^6 , если $z_1 = 3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ и $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 \cdot z_2 &= 3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) \cdot 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) = \\ &= 6 (\cos(75^\circ + 15^\circ) + i \sin(75^\circ + 15^\circ)) = 6(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 6i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = \frac{3}{2} (\cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ)) = \\ &= \frac{3}{2} (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } z_2^6 &= (2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ))^6 = 2^6 (\cos(6 \cdot 15^\circ) + i \sin(6 \cdot 15^\circ)) = \\ &= 64(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 64i \end{aligned}$$

Пример Найти $\sqrt[4]{-16}$

Представим в тригонометрической форме – 16:

Найдём модуль этого числа: $|z| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16$ Аргумент данного числа находится из системы
$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{16}{16} = -1 \\ \sin \varphi = \frac{0}{16} = 0 \end{cases}$$

Значит, один из аргументов числа $z = -16$ равен π .

Получаем: $z = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Найдём корень: $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right)$

Найдём различные корни:

$$\begin{aligned} k = 0 \Rightarrow z_0 &= 2 \left(\cos \frac{\pi + 0}{4} + i \sin \frac{\pi + 0}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} + i\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 1 \Rightarrow z_1 &= 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2 \Rightarrow z_2 &= 2 \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 \Rightarrow z_3 &= 2 \left(\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Задания для практической работы.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел		

$z_1 = -2 - 3i$ $z_2 = 1 + 2i$	$z_1 = 3 - 2i$ $z_2 = 2 - i$	$z_1 = -3 + 4i$ $z_2 = 1 + 3i$
2. Вычислить		
$i^{14} - i^{15} - i^{16}$	$i^{18} + i^{19} - i^{20}$	$i^{16} - i^{17} + i^{18}$
3. Решить уравнение		
$x^2 + 2x + 2 = 0$	$x^2 - 4x + 13 = 0$	$x^2 + 18x + 82 = 0$
4. Выполнить действия над числами в тригонометрической форме: а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_2^n		
$z_1 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$ $z_2 = 3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ $n=3$	$z_1 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$ $z_2 = 10(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$ $n=3$	$z_1 = 5(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ)$ $z_2 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$ $n=6$
5. Выполнить действия в тригонометрической форме и представить результат в тригонометрической и алгебраической формах		
$\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-4}$	$\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$	$((\sqrt{3}-i)(-1+i))^6$
6. Найти значения корней		
$\sqrt[3]{-1}$	$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[3]{8i}$

Практическая работа № 11

Решение вероятностных задач

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять вероятности случайных событий.

Знания:

1. Понятие случайного события.
2. Классическое определение вероятности.

Умения:

1. Вычисление вероятности случайного события с применением комбинаторных формул.

Содержание работы:

1. Размещения

Рассмотрим простейшие понятия, связанные с выбором и расположением некоторого множества объектов.

Подсчет числа способов, которыми можно совершить эти действия, часто производится при решении вероятностных задач.

Определение. Размещением из n элементов по k ($k \leq n$) называется любое упорядоченное подмножество из k элементов множества, состоящего из различных элементов.

Пример. Следующие последовательности цифр являются размещениями по 2 элемента из 3 элементов множества $\{1;2;3\}$: 12, 13, 23, 21, 31, 32.

Заметим, что размещения отличаются порядком входящих в них элементов и их составом. Размещения 12 и 21 содержат одинаковые цифры, но порядок их расположения различен. Поэтому эти размещения считаются разными.

Число различных размещений из n элементов по k обозначается A_n^k и вычисляется по формуле: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ (читается « n -факториал»).

2. Перестановки

Определение. Перестановками из n элементов называются такие размещения из n элементов, которые различаются только расположением элементов.

Число перестановок из n элементов P_n вычисляется по формуле: $P_n = n!$

Пример. Сколькими способами могут встать в очередь 5 человек? Количество способов равно числу перестановок из 5 элементов, т.е. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

3. Сочетания

Определение. Сочетаниями из n элементов по k называются такие размещения из n элементов по k , которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число различных сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k и вычисляется по формуле: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

По определению $0! = 1$.

Для сочетаний справедливы следующие свойства:

1. $C_n^1 = n$
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. $C_n^n = C_n^0 = 1$
4. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Пример. Имеются 5 цветков разного цвета. Для букета выбирается 3 цветка.

Число различных букетов по 3 цветка из 5 равно: $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

4. События

Познание действительности в естественных науках происходит в результате испытаний (эксперимента, наблюдений, опыта).

Испытанием или *опытом* называется осуществление какого-нибудь определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).

Таким образом, событие рассматривается как результат испытания.

Пример. Бросание монеты – это испытание. Появление орла при бросании – событие.

Наблюдаемые нами события различаются по степени возможности их появления и по характеру их взаимосвязи.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.

Пример. Получение студентом положительной или отрицательной оценки на экзамене есть событие достоверное, если экзамен протекает согласно обычным правилам.

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в результате данного испытания.

Пример. Извлечение из урны белого шара, в которой находятся лишь цветные (небелые) шары, есть событие невозможное. Отметим, что при других условиях опыта появления белого шара не исключается; таким образом, это событие невозможно лишь в условиях нашего опыта.

Далее случайные события будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C... Достоверное событие обозначим буквой Ω , невозможное – \emptyset .

Два или несколько событий называются *равновозможными* в данном испытании, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным или менее возможным, чем другие.

Пример. При одном бросании игральной кости появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков – все это события равновозможные. Предполагается, конечно, что игральная кость изготовлена из однородного материала и имеет правильную форму.

Два события называются *несовместными* в данном испытании, если появление одного из них исключает появление другого, *исовместными* в противном случае.

Пример. В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Берем на удачу одну деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. Эти события несовместные.

Несколько событий образуют *полную группу событий* в данном испытании, если в результате этого испытания обязательно наступит хотя бы одно из них.

Пример. События из примера образуют полную группу равновозможных и попарно несовместных событий.

Два несовместных события, образующих полную группу событий в данном испытании, называются противоположными событиями.

Если одно из них обозначено через A , то другое принято обозначать через \bar{A} (читается «не A »).

Пример. Попадание и промах при одном выстреле по цели - события противоположные.

5. Классическое определение вероятности

Вероятность события – численная мера возможности его наступления.

Событие A называется *благоприятствующим* событию B , если всякий раз, когда наступает событие A , наступает и событие B .

События A_1, A_2, \dots, A_n образуют *схему случаев*, если они:

- 1) равновозможны;
- 2) попарно несовместны;
- 3) образуют полную группу.

В схеме случаев (и только в этой схеме) имеет место классическое определение вероятности $P(A)$ события A . Здесь случаем называют каждое из событий, принадлежащих выделенной полной группе равновозможных и попарно несовместных событий.

Если n – число всех случаев в схеме, m – число случаев, благоприятствующих событию A , то *вероятность события A* определяется равенством: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей $0 \leq P(A) \leq 1$.

6. Операции над событиями. Теорема сложения вероятностей

Суммой, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий (в одном и том же испытании).

Пример. Бросаются две игральные кости. Пусть событие A состоит в выпадении 4 очков на 1 кости, а событие B – в выпадении 5 очков на другой кости. События A и B совместны. Поэтому событие $A+B$ состоит в выпадении 4 очков на первой кости, или 5 очков на второй кости, или 4 очков на первой кости и 5 очков на второй одновременно.

Пример. Событие A – выигрыш по 1 займу, событие B – выигрыш по 2 займу. Тогда событие $A+B$ – выигрыш хотя бы по одному займу (возможно по двум сразу).

Произведением или пересечением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий (в одном и том же испытании).

Пример. События A и B состоят в успешном прохождении I и II туров соответственно при поступлении в институт. Тогда событие $A \times B$ состоит в успешном прохождении обоих туров.

Теорема. Если события $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ попарно несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Если события A_1 и A_2 совместны, то вероятность суммы двух совместных событий равна: $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \times A_2)$.

8. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Условной вероятностью $P(B/A)$ называется вероятность события B , вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого, т.е. $P(A) = P(A/B)$

Если события A и B независимы, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Задания для практической работы:

1. В коробке находятся $m+2$ синих, $n+3$ красных и $2n+1$ зеленых карандашей. Одновременно вынимают $m+3n+2$ карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет $m+1$ синих и $n+1$ красных.

2. В первой урне находятся $m+2$ шаров белого и n шаров черного цвета, во второй — $m+n$ белого и m синего, в третьей — $n+3$ белого и $m+1$ красного цвета. Из первой и второй урны наудачу извлекают по одному шару и кладут в третью. После этого из третьей вынимают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень при одном выстреле равна $\frac{m+n}{m+n+2}$. Производится $n+4$ выстрела. Найти вероятность того, что он промахнется не более двух раз.

4. Каждый избиратель независимо от остальных избирателей, отдаёт свой голос за кандидата A с вероятностью $0,1(m+n)$ и за кандидата B — с вероятностью $1-0,1(m+n)$. Оценить вероятность того, что в результате голосования на избирательном участке (5000 избирателей) один из

кандидатов опередит другого:

а) ровно на 1900 голосов; б) не менее, чем на 1900 голосов

Таблица 1 (выбор параметра m)

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

Таблица 2 (выбор параметра n)

B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	3	5	4	2	1	5	4	1	3	2

Практическая работа № 12

Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм

Цель работы:

Научиться строить статистический ряд выборки и гистограммы.

Знания:

1. Понятие о выборочном исследовании.
2. Понятие о представлении статистических данных.

Умения:

1. Построение статистического ряда и гистограммы.

Содержание работы:

Предмет математической статистики составляют разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения случайных явлений.

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных, т.е. результатов наблюдения.

В математической статистике рассматривают две основных задачи:

1) Первая задача состоит в том, чтобы указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате поставленных экспериментов

2) Состоит в разработке методов анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка параметров распределения, вид которого неизвестен; оценка зависимой случайной величины от одной или нескольких случайных величин

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого неизвестен.

Изучение тех или иных явлений методами математической статистики служат решение многих вопросов, выдвигаемых наукой и практикой правильная организация технологического процесса наиболее целесообразное планирование и прочее.

И так, основная задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Генеральная и выборочная совокупность.

Совокупность всех объектов, подчинённых данному признаку, называется **генеральной совокупностью**. Число таких объектов называется **объёмом генеральной совокупности**.

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторых качественных или количественных признаков, характеризующие эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественными признаками может служить стандартность деталей, а количественным - контролируемый размер детали.

Обычно из всей совокупности отбирают ограниченное число объектов, которое изучают такую случайно отобранную совокупность, называют **выборочной совокупностью** или **выборкой**.

Выборка, достаточно хорошо описывающая всю генеральную совокупность, называется **репрезентативной**. Для того, чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке, необходимо, чтобы

объекты выборки правильно его представляли, т. е. выборка должна быть репрезентативной (представительной).

Для получение репрезентативной выборки необходимо ,чтобы все отображённые элементы имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. В случае большого объёма генеральной совокупности используют таблицу случайных чисел. Например, чтобы выразить 20 объектов из пронумерованной генеральной совокупности можно записать 20 случайных чисел.

Элементы x_1, x_2, \dots, x_n случайно попавшие в выборку называются вариантами, а их кол-во n – объем выборки. Отобранные элементы располагают в порядке возрастания. Такая последовательность называется вариационным рядом.

Разность между максимальным и минимальными элементами называется **размахом выборки**.

Среди n -элементов выборки могут быть встречаться повторяющиеся.

Например $x_1 - n_1$ раз, $x_2 - n_2$ раз; $x_n - n_n$ раз. Числа n_1, n_2, n_n называются частотами вариант.

Расположенное в порядке возрастания вариант последовательность пар чисел, составленная из вариант и их частот $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$ называется статистическим рядом или статистическим распределением. При этом пользуются табличной записью:

x_i	x_1	x_2
n_i	n_1	n_2

Пример: записать вариационный ряд и статистическое распределение выборки из числа учебных дней в году, пропущенных по болезни студентами. Определить размах выборки:

5,0,3,7,0,1,0,5,0,5,2,10,2,0,7,2,4,7,7,4

1) Найдем объем выборки: $n=20$

2) Запишем вариационный ряд:

0,0,0,0,0,2,2,2,3,4,4,5,5,5,7,7,7,7,10,10

3) Запишем статистическое распределение:

x_i	0	2	3	4	5	7	10
n_i	5	3	1	2	3	4	2

4) Определим размах выборки: $Z=10-0=10$

При большом объеме выборки для упрощения ее вычисления ее элементы объединяют в разряды, представляя в выборку в виде группированного статистического ряда. Для этого все содержащиеся элементы разбивают на k интервалов равной длины.

Графические представления статистической совокупности

Полигон и гистограмма.

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения. Они позволяют лучше представить характер распределения элементов выборки, а иногда и сделать предположения о законе распределения генеральной совокупности.

Основные понятия.

Ряд распределения – это ряд чисел, в котором значение изучаемого признака (варианта) расположены в определенном порядке. Либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Наряду с вариантами ряд распределений включают в частоты (величины, показывающие сколько раз каждая из вариантов встречаются в данной совокупности). Сумма частот равна объему совокупности. Таким образом, ряд распределения состоит из вариант и частот.

В зависимости от прерывности и непрерывности варьирующего признака ряды распределения удобно представлять в виде двух разновидностей: **дискретного и вариационного (интервальных)**

Дискретный ряд представляет собой ряд прерывных чисел.

Например: распределение семей по числу членов.

При непрерывной вариации распределением признака называется интервальным.

Например: распределение совхозов области по % выполнению плана.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка. Наблюдаемые значения x_i - называют вариантами, n_i - числа наблюдения частотами, $n = \sum n_i$ - объем выборки, отношения частот к объему выборки называется **относительными частотами** $W_i = \frac{n_i}{n}$

Пример. Составить распределения относительных частот, если задано распределение частот выборки объема.

$n=20$

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Решение. Найдём относительные частоты.

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{20}$$

$$w_2 = \frac{10}{20}$$

$$w_3 = \frac{7}{20}$$

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,5	0,35

$$0,15+0,5+0,35=1 .$$

Сумма относительных частот равна единице.

В целях наглядности строят различные графики полигон и гистограмма.

Полигоном частот называется ломаная линия вершиной, которой являются точки $((x_1, n_1), (x_2, n_2) \dots (x_k, n_k))$ определяемые элементами статистического ряда. Для его построения по оси абсцисс откладывают варианты x_i , а по оси ординат соответствующая им частота n_i .

Построенные точки соединяют отрезками прямых.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура составленная из прямоугольников построенных на интервалах так что площадь каждого прямоугольника численно равна частоте варианты расположенной в середине i интервала. То есть площадь гистограммы частот равна объему выборки

Пример. Построить полигон и гистограмму частот.

Дано время недельной загрузки электрических духовых шкафов 50-ти обследованных предприятий общественного питания в часах.

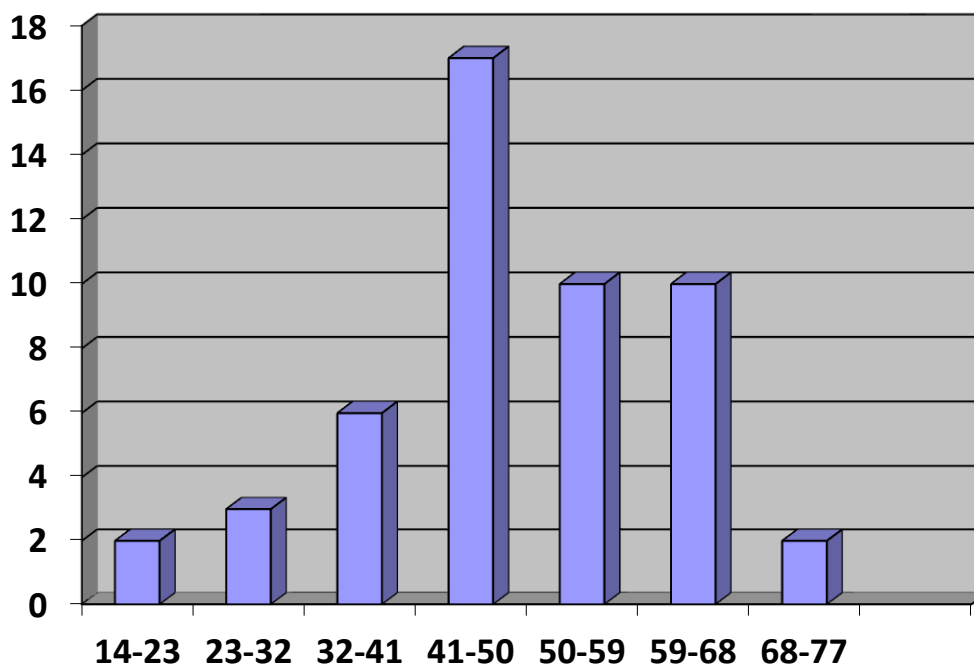
38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
60	52	47	46	49	49	14	57	54	59
77	47	28	48	58	32	42	58	61	30
61	35	47	72	41	45	44	56	30	40
67	65	39	48	43	60	54	42	59	50

Разобьем ряд распределения на 7 интервалов, определим размах выборки.
 $77-14=63$

Найдем длину интервала. $h = \frac{63}{7} = 9$

	Границы интервалов	Середина интервалов	x_i
1	14-23	18,5	2
2	23-32	27,5	3
3	32-41	36,5	6
4	41-50	45,5	17
5	50-59	54,5	10
6	59-68	63,5	10
7	68-77	72,5	2

Чтобы построить гистограмму найдём относительные частоты.



Задания для практической работы:

15,4	21,9	16,5	16,8	19,3	21,9	14,7	19,8	20,4	21,3	11,8
17,2	15,3	19,7	14,7	17,8	12,5	14,5	18,5	19,5	17,5	18,6
19,2	16,8	20,5	20,8	16,2	10,1	18,1	20,2	17,2	19,4	19,1
23,3	13,2	14,3	19,5	15,7	21,1	18,4	23,8	19,6	17,8	19,3

При изменении диаметра валика после шлифовки была получена следующая выборка:

Построить гистограмму частот, предварительно построив ряд статистического распределения, состоящий из семи интервалов.

Перечень используемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Юхно, Н. С. Математика : учебник / Н. С. Юхно. — Москва : ИНФРА-М, 2024. — 204 с. — (Среднее профессиональное образование). — DOI 10.12737/1002604. - ISBN 978-5-16-014744-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2136718> (дата обращения: 21.03.2024). — Режим доступа: по подписке.

2. Омельченко, В. П. Математика : учебник / В.П. Омельченко, Н.В. Карасенко. — Москва : ИНФРА-М, 2024. — 349 с. — (Среднее профессиональное образование). — DOI 10.12737/1855784. - ISBN 978-5-16-017462-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/2085068> (дата обращения: 21.03.2024). — Режим доступа: по подписке.

Интернет-ресурсы:

1. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.school-collection.edu.ru>

2. Математические олимпиады и олимпиадные задачи [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.zaba.ru>