Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине

«МАТЕМАТИКА»

для студентов 2 курса специальности

15.02.14 Оснащение средствами автоматизации (по отраслям)

ФП Профессионалитет

Челябинск, 2023

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для студентов 2 курса, обучающихся по специальности 15.02.12 Монтаж, техническое обслуживание и ремонт промышленного оборудования (по отраслям) (ТОП-50)

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Методические рекомендации предназначены для организации выполнения практических работ по учебной дисциплине «Математика».

Программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 20 практических работ, направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 3. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста

ПК 3.1. Определять оптимальные методы восстановления работоспособности промышленного оборудования

В результате изучения дисциплины обучающийся должен ***уметь:***

– Анализировать сложные функции и строить их графики;

- Выполнять действия над комплексными числами;
- Вычислять значения геометрических величин;
- Производить операции над матрицами и определителями;
- Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- Решать системы линейных уравнений различными методами

В результате освоения дисциплины студент должен **знать**:

– Основные математические методы решения прикладных задач;

– Основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;

– Основы интегрального и дифференциального исчисления;

– Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Описание каждой практической работы содержит номер, название и цель работы, формируемые в процессе выполнения работы знания, умения и элементы компетенций, теоретическое изложение необходимого материала (при необходимости примеры выполнения заданий), варианты заданий, описание алгоритма выполнения работы и контрольные вопросы (с целью выявить и устранить недочеты в освоении материала).

Для получения дополнительной, более подробной информации по основным вопросам учебной дисциплины в конце методических рекомендаций приведен перечень информационных источников.

Отчеты студентов по практическим работам должны выполняться в отдельных тетрадях, содержать номер, название и цель работы, выполненные задания и их результаты.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№п\п	Название практической работы	Часы
1.	Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований	4
2.	Вычисление пределов. Раскрытие неопределенности. Вычисление односторонних пределов	2
3.	Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов	2
4.	Вычисление производных элементарных функций	2
5.	Вычисление производных сложных функций	2
6.	Применение производной к решению практических задач	2
7.	Применение производной к исследованию функции	2
8.	Нахождение неопределенных интегралов различными и методами.	2
9.	Вычисление определенных интегралов.	2
10.	Применение определенного интеграла в практических задачах	2
11.	Действия с матрицами	2
12.	Вычисление определителя 3-го порядка с использованием свойств определителей	2
13.	Нахождение обратной матрицы	2
14.	Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными методом Крамера	2
15.	Решение систем линейных уравнений методами линейной алгебры	2
16.	Решение СЛАУ различными методами	2
17.	Комплексные числа и действия над ними	2
18.	Решение практических задач на определение вероятности события	2

19.	Решение задач с реальными дискретными случайными величинами	
20.	Решение задач на математическое ожидание, дисперсию	
	Итого:	**42**

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Название практической работы: ***Построение графиков реальных функций с помощью***
геометрических преобразований

Цель работы: научиться строить графики функций с помощью геометрических преобразований.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Анализировать сложные функции и строить их графики, решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений, вычислять значения геометрических величин

Теоретический материал:

Пусть задан график функции y = f(x). Чтобы построить график функции

1. $y = mf(x)$, где $m > 0$ и $m \neq 1$, нужно ординаты точек заданного графика умножить на m. Такое преобразование называется ***растяжением*** от оси x с коэффициентом m, если $m > 1$***, и сжатием*** к оси x, если $0 < m < 1$.
2. $y = -f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ ***преобразованием симметрии*** относительно оси x. (Преобразование симметрии - зеркальное отражение относительно прямой.)
3. $y = f(x) + n$, получается из графика функции $f(x)$ ***параллельным переносом*** последнего вдоль оси ординат на n единиц вверх, если $n > 0$ и, соответственно на $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$.

4. $y = f(kx)$, где $k > 0$ и $k \neq 1$. Искомый график функции получается из заданного <u>сжатием</u> с коэффициентом k к оси y (если $0 < k < 1$ указанное "сжатие" фактически является <u>растяжением</u> с коэффициентом $1/k$)
5. $y = f(-x)$ получается из графика функции $f(x)$ ***преобразованием симметрии*** относительно оси y
6. $y = f(x + l)$ получается из графика функции $f(x)$ ***параллельным переносом*** последнего на l единиц влево, если $l > 0$ и, соответственно на $|l|$ единиц вправо, если $m < 0$.

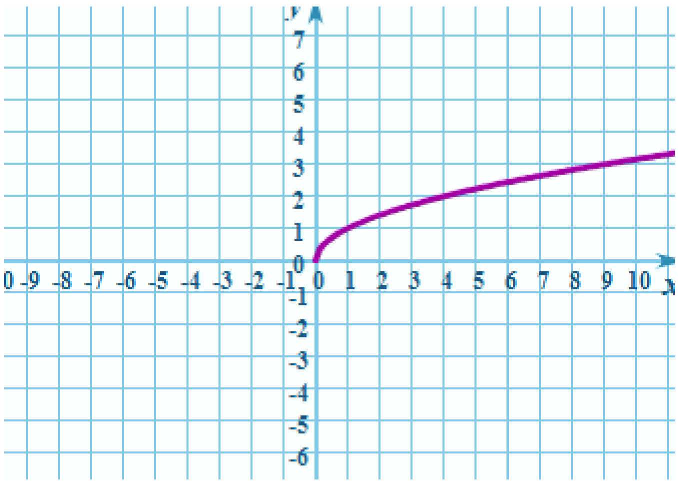
<u>Пример 1:</u>

Задан график функции $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$. Необходимо построить графики функций $\boldsymbol{y = 2\sqrt{x}}$, $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{x}}{2}}$, $\boldsymbol{y = \sqrt{x} + 2}$, $\boldsymbol{y = \sqrt{x} - 2}$, $\boldsymbol{y = \sqrt{x + 2}}$, $\boldsymbol{y = \sqrt{x - 2}}$, $\boldsymbol{= -\sqrt{x}}$, $\boldsymbol{y = \sqrt{-x}}$

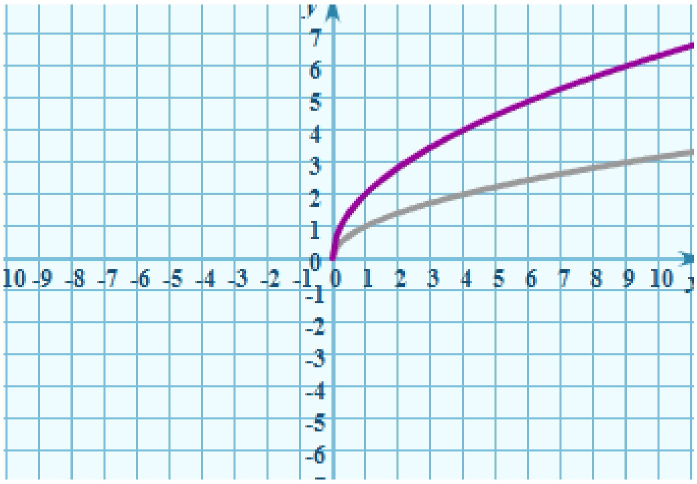
Решение:

Чтобы построить графики других функций, содержащих аргумент (x) под знаком квадратного корня, воспользуемся перечисленными выше правилами.

Дано: $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$.

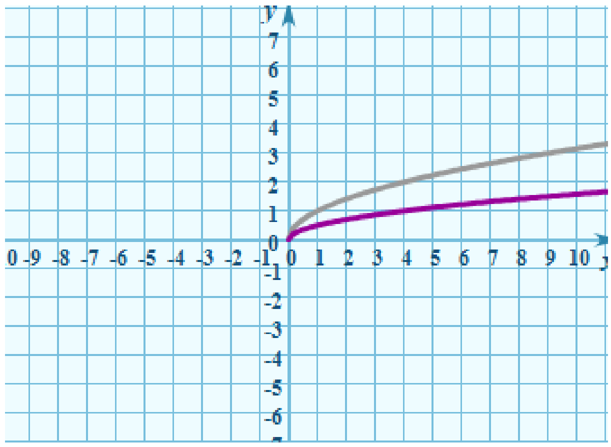


Построим график функции $\boldsymbol{y = 2\sqrt{x}}$



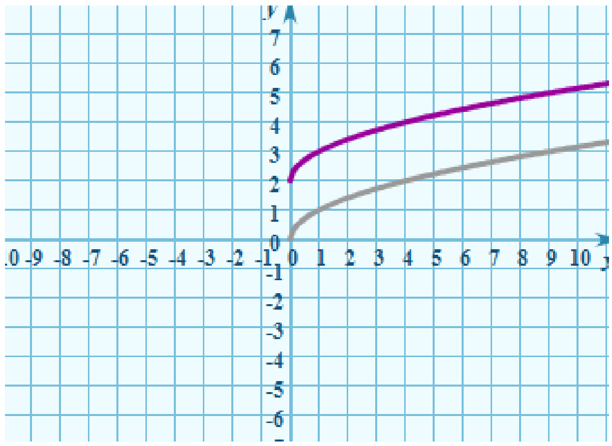
Растянули в 2 раза от оси x. Ордината каждой точки увеличилась в 2 раза.

Построим график функции $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{x}}{2}}$



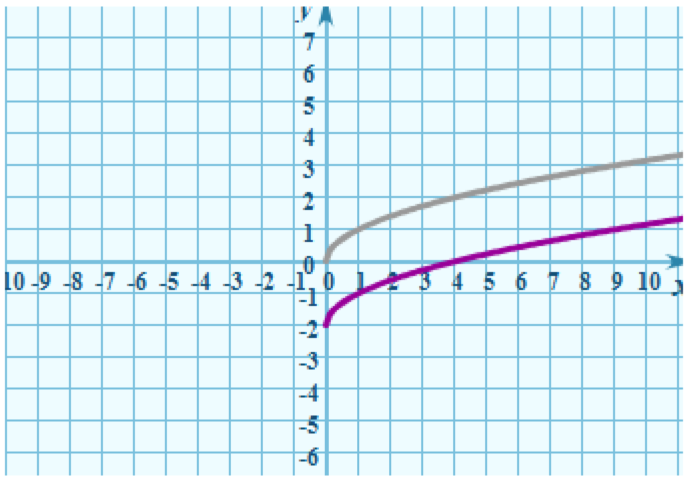
Сжали вдвое к оси x. Ордината каждой точки уменьшилась в 2 раза.

Построим график функции $\boldsymbol{y = \sqrt{x} + 2}$



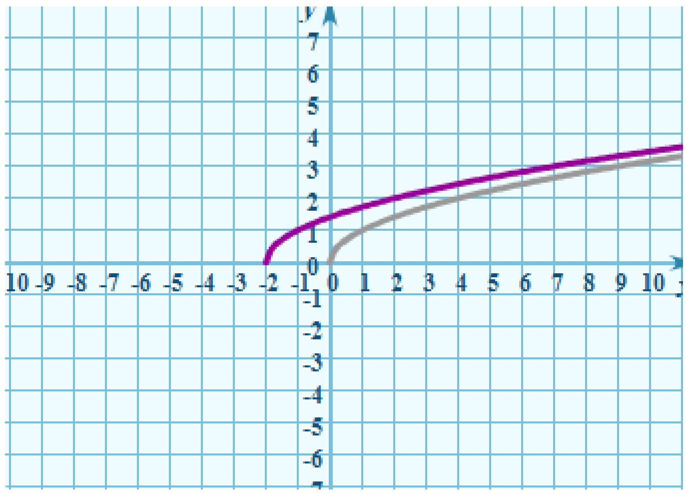
Параллельно перенесли на 2 единицы вверх вдоль оси y. Ордината каждой точки увеличилась на 2.

Построим график функции $\boldsymbol{y = \sqrt{x} - 2}$



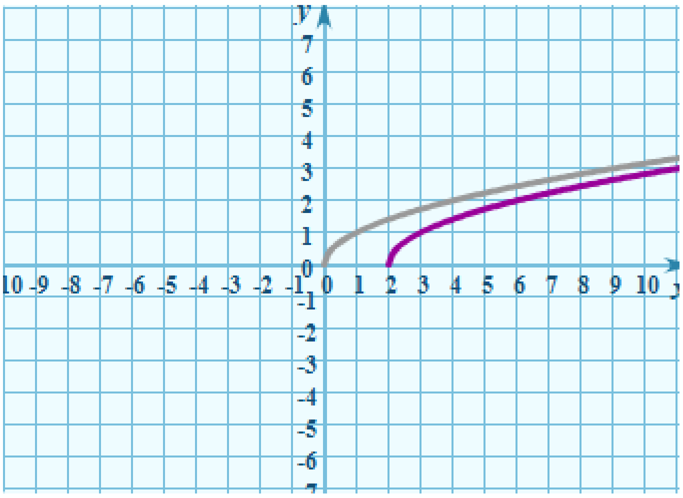
Параллельно перенесли на 2 единицы вниз вдоль оси *y*. Ордината каждой точки уменьшилась на 2 единицы.

Построим график функции $\boldsymbol{y = \sqrt{x + 2}}$



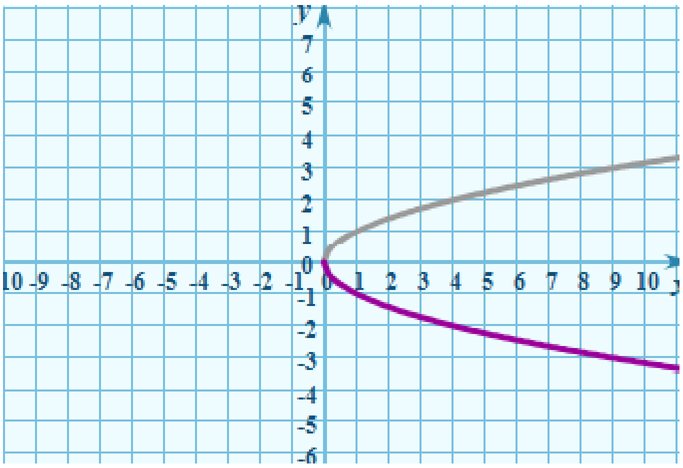
Параллельно перенесли на 2 единицы влево вдоль оси *x*. Абсцисса каждой точки уменьшилась на 2 единицы.

Построим график функции$\boldsymbol{y = \sqrt{x - 2}}$.



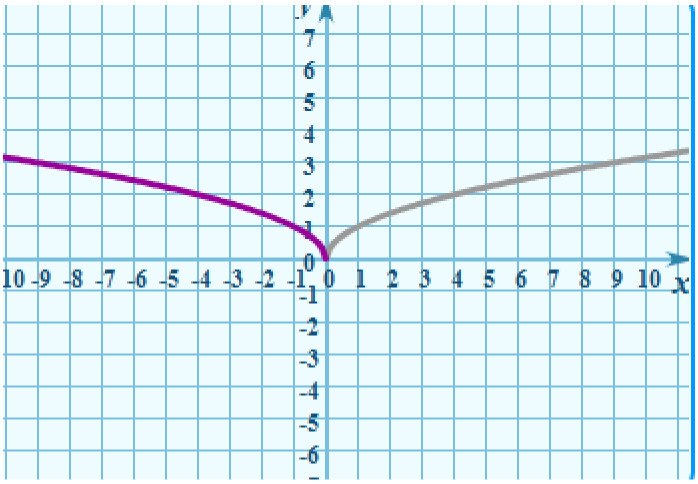
Параллельно перенесли на 2 единицы вправо вдоль оси x. Абсцисса каждой точки увеличилась на 2 единицы.

Построим график функции $y = -\sqrt{x}$



Применили преобразование симметрии – зеркально отразили относительно оси x.

Построим график функции $y = \sqrt{-x}$



Применили преобразование симметрии – зеркально отразили относительно оси y.

Параллельный перенос графика относительно одной из осей в какую-либо сторону равносилен переносу этой оси относительно графика в противоположную сторону. Поэтому 3-е и 6-е правила можно объединить следующим образом: чтобы построить график функции $y = f(x - m) + n$ нужно выполнить параллельный перенос всей плоскости координат так, чтобы началом новой системы координат $x'y'$ была точка $O'(m;n)$. Очевидно, что вместо того, чтобы дважды перерисовывать график, проще перечертить оси. Если нужно скомбинировать только параллельные переносы, чтобы построить график функции, то всё равно в каком порядке их выполнять, и всё равно, что переносить - оси или кривые. Но если нужно построить график сложной функции, используя и перенос, и растяжение-сжатие, и отражения, то следует тщательно соблюдать порядок выполнения операций.

Последовательность преобразований при построении графиков.

Пусть задан график функции $y = f(x)$ и нужно построить график функции $y = m \cdot f(kx + l) + n$, где k, l, m, n - числа.

Записываем формулу функции в виде $y = m \cdot f(k \cdot (x + l/k))$, т.е. выносим за скобки коэффициент при x в аргументе функции.

Производим сжатие с коэффициентом k вдоль оси Ox к оси Oy. (Если $k < 1$, то получится растяжение от оси Oy.)

Если $k < 0$, то симметрично отображаем график относительно относительно оси Oy.

Осуществляем параллельный перенос (сдвиг) полученного графика на l/k единиц влево или вправо (в зависимости от знака, для положительного числа влево).

Производим растяжение с коэффициентом m от оси Ox (вдоль оси Oy). (Если $m < 1$, то получится сжатие к оси Ox.)

Если $m < 0$, то симметрично отображаем график относительно оси Ox.

Осуществляем параллельный перенос (сдвиг) полученного графика на n единиц вверх или вниз (в зависимости от знака, при $n > 0$ вверх).

Задание: Построить в одной системе координат графики функций, выполнив предварительно цепочку преобразований:

1. $y = 2x^2 + 4x$
2. $y = 1 + 1{,}5\cos x$
3. $y = tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
4. $y = -\frac{1}{2}\cos x + 2$

Контрольные вопросы:

1) Какие преобразования графиков вы сегодня выполняли?
2) В чем особенность параллельного переноса вдоль осей координат? Растяжения и сжатия?
3) Какими знаниями необходимо обладать, чтобы выполнять построения графиков?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Название практической работы: ***Вычисление пределов. Раскрытие неопределенности. Вычисление односторонних пределов.***

Цель работы: научиться вычислять пределы.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Анализировать сложные функции и строить их графики, решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений, вычислять значения геометрических величин

Теоретический материал:

Определение (нахождение предела функции на бесконечности).

Число A называется пределом функции *f(x)* при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности аргументов функции (бесконечно большой положительной или отрицательной), последовательность значений этой функции сходится к A. Обозначается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Замечание.

Предел функции *f(x)* при $x \to \infty$ бесконечен, если для любой бесконечно большой последовательности аргументов функции (бесконечно большой положительной или отрицательной), последовательность значений этой функции является бесконечно большой положительной или бесконечно большой отрицательной. Обозначается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Основные неопределенности пределов и их раскрытие.

основные виды неопределенностей: ноль делить на ноль $\left(\frac{0}{0}\right)$, бесконечность делить на бесконечность$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, ноль умножить на бесконечность $(0 \cdot \infty)$, бесконечность минус бесконечность $(\infty - \infty)$, единица в степени бесконечность 1^{∞}, ноль в степени ноль 0^0, бесконечность в степени ноль ∞^0.

Раскрывать неопределенности позволяет:

- упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);
- использование замечательных пределов;
- применение правила Лопиталя;

* использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным(использование таблицы эквивалентных бесконечно малых).

Сгруппируем неопределенности в **таблицу неопределенностей**. Каждому виду неопределенности поставим в соответствие метод ее раскрытия (метод нахождения предела).

Таблица 1 - Методы нахождения предела

Виды неопределённостей	Методы нахождения предела
$\left(\frac{0}{0}\right)$	Необходимо преобразовать и упростить выражение. Если есть выражение вида $\frac{\sin(kx)}{kx}$ или $\frac{kx}{\sin(kx)}$, то применяется первый замечательный предел.
$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Необходимо преобразовать и упростить выражение. Если не помогает, то использовать правило Лопиталя.
$(0 \cdot \infty)$,$(\infty - \infty)$	Необходимо преобразовать неопределённость к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, за тем применить правило Лопиталя
1^{∞},	Применяем второй замечательный предел

<u>Пример1:</u>

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2}$

Решение.

Подставляем значение:$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2} = \frac{1^2+2\cdot 1-3}{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Пришли к неопределенности. Смотрим в таблицу неопределенностей для выбора метода решения и пробуем упростить выражение. Так как и числитель и знаменатель обращаются в ноль при x=1, то если разложить на множители эти выражения, можно будет сократить (x-1) и неопределенность исчезнет.

Разложим числитель на множители:

$$x^2+2x-3=0$$
$$D=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=16\Rightarrow$$
$$x_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3$$
$$x_2=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=1\Rightarrow$$
$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

Разложим знаменатель на множители:

$$3x^2-5x+2=0$$
$$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot2=1\Rightarrow$$
$$x_1=\frac{5-\sqrt{1}}{2\cdot3}=\frac{2}{3}$$
$$x_2=\frac{5+\sqrt{1}}{2\cdot3}=1\Rightarrow$$
$$3x^2-5x+2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)$$

Наш предел примет вид:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+3}{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}=\frac{1+3}{3\left(1-\frac{2}{3}\right)}=4$$

После преобразования неопределенность раскрылась.

Ответ: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2}=4$

Рассмотрим пределы на бесконечности от степенных выражений. Если показатели степенного выражения положительны, то предел на бесконечности бесконечен. Причем основное значение имеет наибольшая степень, остальные можно отбрасывать.

<u>Пример2:.</u>

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^5-4}{3x^7+12}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^5-4}{3x^7+12}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle$$

Степень числителя равна семи, то есть $m=7$. Степень знаменателя также равна семи $n=7$. Разделим и числитель и знаменатель на x^7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^5-4}{3x^7+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^7+2x^5-4}{x^7}}{\frac{3x^7+12}{x^7}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^7}}{3+\frac{12}{x^7}}=\frac{1+\frac{2}{\infty^2}-\frac{4}{\infty^7}}{3+\frac{12}{\infty^7}}=\frac{1+0-0}{3+0}=\frac{1}{3}$$

Ответ: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^5-4}{3x^7+12}=\frac{1}{3}$

Задание: Вычислить предел функций:

Вариант 1.

1. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$
2. $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2-1}$
4. $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x}+1}{x}$
5. $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-25}{x+5}$
6. $\lim_{x\to-1}\frac{2x+x^2}{x^2+5x+6}$
7. $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-25}{x^2-8}$
8. $\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{\sqrt{x+2-2}}$
9. $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$
10. $\lim_{x\to3}\frac{4x^3-11x-3}{3x^2-8x-3}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x+x^3}{10x^3+x^{2-80}}$

12. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$

Контрольные вопросы:

1) Что называется пределом функции?

2) Какая связь существует между бесконечно малой и бесконечно большой функцией?

3) Назовите виды неопределенностей.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Название практической работы: ***Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов***

Цель работы: научиться вычислять замечательные пределы.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Анализировать сложные функции и строить их графики, решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений, вычислять значения геометрических величин

Теоретический материал:

Первый замечательный предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

На практике чаще встречаются **модификации первого замечательного предела** в виде: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(kx)}{kx}=1$

где, k – коэффициент.

Следствия первого замечательного предела:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{kx}{\sin kx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin kx}{kx}}=\frac{1}{1}=1$

<u>**Пример 1:**</u>

Найти предел: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{2x}$

Решение:

Подставляем значение:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{2x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

Пришли к неопределенности ноль делить на ноль. Смотрим в <u>таблицу неопределенностей</u> для определения метода решения. Комбинация синуса и его аргумента подсказывает нам о применении первого замечательного предела, но для этого сначала нужно немного преобразовать выражение. Домножим на 3x и числитель и знаменатель дроби.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{3x\sin(3x)}{3x\cdot(2x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\right)$$

В силу следствия из первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=1$, поэтому приходим к результату:

$$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

Второй замечательный предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

или в другой записи $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

В случае второго замечательного предела имеем дело с неопределенностью вида единица в степени бесконечность(1^{∞}) .

Пример 2:

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}$

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}=\left(1-\frac{2}{\infty^2+1}\right)^{\frac{\infty^2+1}{4}}=(1-0)^{\infty}=(1^{\infty})$$

Пришли к неопределенности единица в степени бесконечность. Смотрим в таблицу неопределенностей для определения метода решения и останавливаемся на применении второго замечательного предела.

Сделаем замену переменных. Пусть$t=-\frac{x^2+1}{2}\Rightarrow\frac{x^2+1}{4}=-\frac{t}{2}$

Если $x\to\infty$, то $t\to-\infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}=\left\langle 1^{\infty}\right\rangle=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}\cdot t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

<u>Пример 3:</u>

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

Решение:

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x}=\left(\frac{1-0}{1+0}\right)^{\infty}=\left\langle 1^{\infty}\right\rangle$$

Пришли к неопределенности единица в степени бесконечность, которая указывает на применение второго замечательного предела. Выделим целую часть в основании показательно степенной функции:

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$$

Тогда предел запишется в виде:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\left\langle 1^{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}$$

Сделаем замену переменных. Пусть

$$t=-\frac{x+1}{2}\Rightarrow 2t=-x-1\Rightarrow x=-2t-1$$

Если $x\to\infty$, то $t\to\infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = (1^{\infty}) = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}$$

$$\cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-2}\cdot\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{-1} = e^{-2}\cdot(1+0)^{-1} = e^{-2}$$

В преобразованиях были использованы свойства степени и свойства пределов

Задание: Вычислить предел функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{5x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x})^{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Контрольные вопросы:

1) Сформулируйте первый замечательный предел.
2) Сформулируйте второй замечательный предел.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Название практической работы: ***Вычисление производных элементарных функций***

Цель работы: научиться находить производные функций по формулам дифференцирования.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Анализировать сложные функции и строить их графики, решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений, вычислять значения геометрических величин

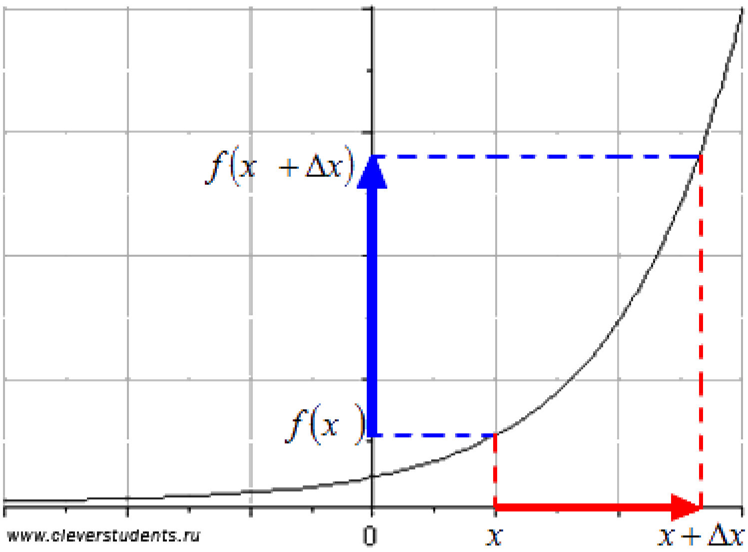
Теоретический материал

Путь x – аргумент функции $f(x)$ и Δx - малое число, отличное от нуля.

Δx (читается «дельта икс») называют **приращением аргумента функции**. На рисунке по оси абсцисс показано изменение аргумента от значения x до значения $x+\Delta x$ (отсюда видна суть названия «приращение» аргумента).

При переходе от значения аргумента x_0 к $x_0+\Delta x$ значения функции изменяются соответственно от $f(x_0)$ до $f(x_0+\Delta x)$ при условии монотонности функции на отрезке

$[x_0; x_0 + \triangle x]$. Разность $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \triangle f(x)$ называют **приращением функции *f(x)***, соответствующем данному приращению аргумента. На рисунке приращение функции показано по оси ординат.



Определение производной функции в точке.

Пусть функция *f(x)* определена на промежутке *(a; b)*, x_0 и $x_0+\Delta x$ - точки этого промежутка. **Производной функции *f(x)* в точке** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$.

Обозначается $f^{/}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Правила дифференцирования. Производные элементарных функций

1. $(\mathbf{c})^{/} = 0$	11. $(\mathbf{a}^{x})^{/} = \mathbf{a}^{x}\ln \mathbf{a}$
2. $(x)^{/} = 1$	12. $(\sin \mathbf{x})^{/} = \cos \mathbf{x}$
3. $(u+v)^{/} = u^{/} + v^{/}$	13. $(\cos \mathbf{x})^{/} = -\sin \mathbf{x}$
4. $(\mathbf{uv})^{/} = \mathbf{u}^{/}\mathbf{v} + \mathbf{v}^{/}\mathbf{u}$	14. $(\mathbf{tgx})^{/} = \dfrac{1}{\cos^2 \mathbf{x}}$
5. $\left(\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)^{/} = \dfrac{\mathbf{u}^{/}\mathbf{v} + \mathbf{v}^{/}\mathbf{u}}{\mathbf{v}^2}$	15. $(\mathbf{ctgx})^{/} = \dfrac{-1}{\sin^2 \mathbf{x}}$
6. $(\mathbf{cu})^{/} = \mathbf{uc}^{/}$	16. $(\arcsin \mathbf{x})^{/} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}$
7. $(x^n)^{/} = nx^{n-1}$	17. $(\arccos \mathbf{x})^{/} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}$

8. $(\ln \mathbf{x})' = \dfrac{1}{\mathbf{x}}$	18. $(\mathbf{arctgx})' = \dfrac{1}{1+\mathbf{x}^2}$
9. $(\log \mathbf{x})' = \dfrac{1}{\mathbf{x}} \log \mathbf{e}$	19. $(\mathbf{arctgx})' = \dfrac{-1}{1+\mathbf{x}^2}$
10. $(\mathbf{e}^x)' = \mathbf{e}^x$	

Найти производные следующих функций:

<u>Пример 1</u>

$y=x^2-4x+3$.

Решение:

$y' = (x^2-4x+3)' = (x^2)' - (4x)' + 3'$.

<u>Пример 2</u>

$$\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{\mathbf{x}}} - \frac{1}{\mathbf{x}^2} + \frac{1}{3\mathbf{x}^3} \quad .$$

Решение:

Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\frac{1}{2}} + 5\mathbf{x}^{\frac{-1}{3}} - \mathbf{x}^{-2} + \frac{1}{3}\mathbf{x}^{-3} \quad .$$

Применяя формулы (6 и 7), получим:

$$\mathbf{y}' = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\frac{1}{2}-1} + 5\left(-\frac{1}{3}\right)\mathbf{x}^{-\frac{1}{3}-1} - (-2)\mathbf{x}^{-2-1} + \frac{(-3)}{3}\mathbf{x}^{-3-1} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}\mathbf{x}^{-\frac{4}{3}} + 2\mathbf{x}^{-3} - \mathbf{x}^{-4}$$

$$\mathbf{y}' = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{\mathbf{x}^4}} + \frac{2}{\mathbf{x}^3} - \frac{1}{\mathbf{x}^4} \quad .$$

<u>Пример 3</u>

$f'(\mathbf{x}) = \dfrac{\sqrt{\mathbf{x}}}{1+\sqrt{\mathbf{x}}}$. Вычислить $f'(1)$.

Решение:

По формулам (5 и 7) получим:

$$f'(\mathbf{x}) = \frac{(\sqrt{\mathbf{x}})'(1+\sqrt{\mathbf{x}}) - (1+\sqrt{\mathbf{x}})' \cdot \sqrt{\mathbf{x}}}{(1+\sqrt{\mathbf{x}})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}}(1+\sqrt{\mathbf{x}}) - \frac{\sqrt{\mathbf{x}}}{2\sqrt{\mathbf{x}}}}{(1+\sqrt{\mathbf{x}})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(1+\sqrt{\mathbf{x}})^2};$$

$$\oint{}^{/}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^2};$$

$$\oint{}^{/}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\sqrt{1}\left(1+\sqrt{1}\right)^2} = \frac{1}{2\cdot 2^2} = \frac{1}{8} \quad .$$

Пример 4

$$\mathbf{y} = \frac{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^2}{\mathbf{x}}$$

Решение:

Раскрываем скобки и производим деление:

$$\mathbf{y} = \frac{\left(1+\sqrt{\mathbf{x}}\right)^2}{\mathbf{x}} = \frac{1+2\sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \frac{1}{\mathbf{x}} + \frac{2}{\sqrt{\mathbf{x}}} + 1 \quad .$$

Используем дробные и отрицательные показатели, приводя данное выражение к виду (7) таблицы 2.1:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{-1} + 2\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} + 1 \quad .$$

Находим производную y $^{/}$:

$$\mathbf{y}^{/} = -\mathbf{x}^{-2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{x}^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\mathbf{x}^2} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^3}} \quad .$$

Пример 5

Найти производную 2-го порядка от функции $\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\sin\mathbf{x}$.

Решение:

Используя формулы 4,2 и 12 таблицы 2.1, получим:

$$\mathbf{y}^{/} = (\mathbf{x})^{/}\sin\mathbf{x} + \mathbf{x}(\sin\mathbf{x})^{/} = \sin\mathbf{x} + \mathbf{x}\cos\mathbf{x} \quad .$$

Дифференцируя производную y $^{/}$, имеем:

$$\mathbf{y}^{//} = (\sin\mathbf{x})^{/} + (\mathbf{x})^{/}\cos\mathbf{x} + \mathbf{x}(\cos\mathbf{x})^{/} = \cos\mathbf{x} + \cos\mathbf{x} - \mathbf{x}\sin\mathbf{x} =$$

$$= 2\cos\mathbf{x} - \mathbf{x}\sin\mathbf{x}.$$

Пример 6

Движение летчика при катапультировании из реактивного самолета можно приблизительно описать формулой $\mathbf{S} = 3{,}7\mathbf{t}^3 + \ln\mathbf{t} - 19\mathbf{t}$ (м). Определить скорость и ускорение летчика через 2 с после катапультирования.

Решение:

По формулам 3, 6,7 и 8 таблицы 2.1:

$v = \frac{ds}{dt}, v = (3{,}7^3 + \ln t - 19t)'$,

Тогда v=3,7•3t^2 $+\frac{1}{\mathbf{t}} - 19 = 25{,}9$ м/с; $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}$; $\mathbf{a} = 11{,}1\mathbf{t}^2 + \frac{1}{\mathbf{t}} - 19$;

$\mathbf{a} = 22{,}2\mathbf{t} - \frac{1}{\mathbf{t}^2}\left(\frac{\mathbf{м}}{\mathbf{c}^2}\right); \mathbf{a}_{t=2} = 22{,}2 \cdot 2 - \frac{1}{4} = 44{,}15\,\mathbf{м}/\mathbf{c}^2$.

Задание: Найдите производную функций при данном значении аргумента

Вариант 1

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5;\ f'(2)$
2. $f(x) = (x-1)\sqrt{x+1}\ ;\ f'(3)$
3. $f(z) = \frac{\sqrt{z-1}}{z}\ ; f'(2)$
4. $f(t) = t^2 + e^{2t};\ f'(0)$
5. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}\ ; f'(\sqrt{3})$
6. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 3;\ f'(2)$
7. $f(x) = (x-1)\sqrt{x+1};\ f'(3)$
8. $f(z) = \frac{z-1}{z};\ f'(2)$
9. $f(t) = 3t^2 - e^{3t} + 1;\ f'(2)$
10. $f(x) = 1 - \frac{x+1}{x-1};\ f'(\sqrt{3})$
11. $f(x) = 4x \quad + 10 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x};\ f'(1)$
12. $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2-1};\ f'(2)$
13. $f(z) = \frac{\sqrt{z^2+1}}{z};\ f'(\sqrt{3})$

Контрольные вопросы:

1) Запишите определение производной

2) Чем отличается производная сложной функции от производной элементарной функции?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Название практической работы: ***Вычисление производных сложных функций***

Цель работы: научиться находить производные сложных функций по формулам дифференцирования.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

Теоретический материал

Если $\mathbf{y} = f(\mathbf{u})$, где $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x})$, т.е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y называется сложной функцией от x.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной: $\mathbf{y}' = f'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x})$.

Производные сложных функций

1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
5. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
9. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
11. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

. Найти производные следующих функций:

Пример 1.

$\mathbf{y} = (1 + 5\mathbf{x})^3$.

Решение:

Полагая 1+5x = u и y = u^3, применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\mathbf{y} = 3\mathbf{u}^2(1 + 5\mathbf{x})' = 3(1 + 5\mathbf{x})^2 \cdot 5 = 15(1 + 5\mathbf{x})^2.$$

Пример 2

$\mathbf{y} = \sin 3\mathbf{x}$.

Решение:

Полагая 3x= u, найдем, используя соответствующие формулы:

$$y' = (\sin x^3)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos 3x^3 \cdot 3$$

$$y' = 3\cos 3x.$$

Пример 3

$\mathbf{y} = \sin \mathbf{x}^3$.

Решение:

Полагая x^3= u, найдем:

$$\mathbf{y}' = (\sin \mathbf{x}^3)' = (\sin \mathbf{u})' = \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}' = 3\mathbf{x}^2 \cos \mathbf{x}^3.$$

Задание: Найдите производную функций при данном значении аргумента

1. $f(x) = 3\sqrt{e^{4x+3}};\ f'(0)$
2. $(x) = 1 - \frac{x-1}{x^2+1};\ f'(2)$
3. $f(x) = sin^2 x;\ f'(\pi/4)$
4. $F(x) = \ln\cos x\,;\ F'(-\pi/3)$
5. $f(t) = \sin t - cos^2 t;\ f'(0)$
6. $f(x) = e^{\sin x}; f'(0)$
7. $f(x) = cos^2 x;\ f'(-\pi/4)$
8. $f(z) = ln\sin z\,;\ f'(\pi/6)$
9. $F(x) = \cos x + sin^2 x;\ F'(0)$
10. $f(x) = \ln ctg\, x;\ f'(-\pi/4)$
11. $f(y) = e^{\cos 2y};\ f'(\pi/4)$
12. $f(z) = \ln sin^2 4z;\ f'(\pi/16)$
13. $f(x) = cos^2 x^2;\ f'(\pi/4)$
14. $f(x) = 2sin^2 x\cos x\,;\ f'(\pi/2)$
15. $\varphi(x) = e^{\sin 2x} - 3e^{\cos 2x}; f'(0)$
16. $F(y) = tg^2 3y; F'(0)$

Контрольные вопросы:

1) Запишите определение производной

2) Чем отличается производная сложной функции от производной элементарной функции?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Название практической работы: ***Применение производной к решению практических задач***

Цель работы: научиться применять производные функций к решению задач

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Анализировать сложные функции и строить их графики, решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений, вычислять значения геометрических величин

Теоретический материал:

Производную применяют не только в математике, но и в экономике, физике.

Производная функции используется всюду, где есть неравномерное протекание процесса: это и неравномерное механическое движение, и переменный ток, и химические реакции и радиоактивный распад вещества и т.д., так как механический смысл производной - это мгновенная скорость $v_{мгн.} = s'(t)$.

При решении различных задач геометрии, механики, физики и других отраслей знания возникла необходимость с помощью одного и того же аналитического процесса из данной функции y=f(x) получать новую функцию, которую называют производной функцией (или просто производной) данной функции f(x) и обозначают символом $y' = f'(x) \quad или \quad \frac{dy}{dx}$

<u>Пример 1</u>

В какой момент времени скорость тела, движущегося по закону $\mathbf{S} = 3\mathbf{t}^2 - 15\mathbf{t} + 2$, равна 0? Найти ускорение тела.

Решение:

Скорость тела v - это первая производная от перемещения $\vec{\mathbf{S}}$ по времени:

$\vec{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}}}{\mathbf{dt}}$; закону $\mathbf{v} = \left(3\mathbf{t}^2 - 15\mathbf{t} + 2\right)' = 16\mathbf{t} - 15.$

Если v=0, то 0=16t-15 $\Rightarrow \mathbf{t} = \dfrac{15}{6} = 2{,}5(\mathbf{c})$

Ускорение $\vec{\mathbf{a}}$ – это первая производная от скорости $\vec{\mathbf{v}}$ по времени: $\vec{\mathbf{a}} = \dfrac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{dt}}$;

$\mathbf{a} = (6\mathbf{t} - 15)' = 6\left(\mathbf{м}/\mathbf{c}^2\right)$

Пример 2

Точка совершает колебательные движения по оси абсцисс по закону $\mathbf{x} = \cos\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}$. Найти момент времени, когда скорость равна нулю. Чему в это время равно x?

Решение:

$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = -\boldsymbol{\omega}\sin\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}$; $0 = \boldsymbol{\omega}\sin\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}$;

$\boldsymbol{\kappa\pi} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{t}\,\dfrac{\boldsymbol{\kappa\pi}}{\boldsymbol{\omega}}$; $\mathbf{x} = \cos\dfrac{\boldsymbol{\omega\kappa\pi}}{\boldsymbol{\omega}} = \pm 1$.

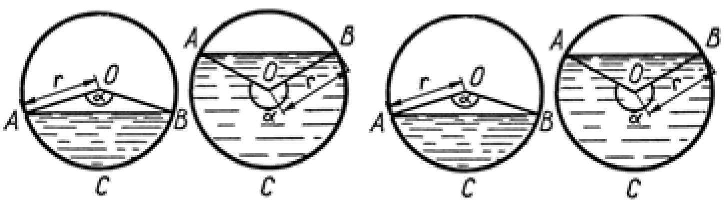
Пример 3

Задача о скорости течения воды в трубе. [1]

По трубе, сечение которой круг с радиусом r, течет вода. Известно, что скорость течения пропорциональна так называемому гидравлическому радиусу профиля сечения (заполненного водой).

Гидравлическим же радиусом профиля называется отношение площади профиля к длине смоченного (подводного) периметра профиля.

При каком заполнении трубы водой скорость течения (при неизменных других условиях) будет наибольшей?



Решение

$$\alpha\frac{1}{2}r^2\alpha\frac{1}{2}r^2\sin\alpha R=\frac{r}{2}\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\pi\alpha\frac{1}{2}r^2\alpha\frac{1}{2}r^2\sin\alpha R=\frac{r}{2}\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\pi$$

Воспользуемся обозначениями: - центральный угол сегмента заполнения трубы водой (в радианах) (рис 24). F-площадь этого сегмента и R- гидравлический радиус. Тогда площадь сектора OACB равна , а площадь треугольника AOB равна , или . Смоченный периметр равен , а значит, . Эта формула будет верна и в том случае, если будет больше . Вообще, может изменяться от 0 до .

$$\frac{1}{2}2r\sin\frac{\alpha}{2}r\cos\frac{\alpha}{2}r\alpha 2\pi\frac{1}{2}2r\sin\frac{\alpha}{2}r\cos\frac{\alpha}{2}r\alpha 2\pi$$

Найдем R' и составим уравнение для нахождения критических значений . Получаем

$$\frac{r}{2}\cdot\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}=0\alpha\neq 0\ \sin\alpha-\alpha\cos\alpha=0\ \mathrm{tg}\alpha=\alpha\alpha\approx 4{,}5\text{ или }\alpha\approx 258^0$$

$$\frac{r}{2}\cdot\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}=0\alpha\neq 0\ \sin\alpha-\alpha\cos\alpha=0\ \mathrm{tg}\alpha=\alpha\alpha\approx 4{,}5\text{ или }\alpha\approx 258^0$$

Полученное уравнение может быть решено графически. Единственный корень его .

$$\frac{r\cos\alpha}{2\alpha^2}(\mathrm{tg}\alpha-\alpha)\alpha\approx 4{,}5\alpha\approx 258^0\frac{r\cos\alpha}{2\alpha^2}(\mathrm{tg}\alpha-\alpha)\alpha\approx 4{,}5\alpha\approx 258^0$$

Нетрудно сообразить, что производная от R ,равнаяпри переходе через , меняет знак с + на - .Значит, при скорость течения будет наибольшей.

Задание: Решите задачи с помощью производной

1. Вращение тела вокруг оси осуществляется по закону $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$. Найти угловую скорость точки при t = 4с (ω измеряется в радианах).
2. Необходимо построить открытый желоб прямоугольного сечения для стока воды. Длина периметра поперечного сечения желоба должна равняться 6 м. Какой высоты должны быть стенки желоба, чтобы получился максимальный слив?
3. Заготовленной плиткой нужно облицевать 6000 кв. м боковых стенок и дна желоба прямоугольного поперечного сечения длиной 1000 м. Каковы должны быть размеры сечения, чтобы пропускная способность желоба была наибольшей?

Контрольные вопросы:

1) Сформулируйте механический смысл производной.
2) Сформулируйте геометрический смысл производной.
3) Где применяются вычисления с помощью производной

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

Название практической работы: ***Применение производной к исследованию функции***

Цель работы: Научиться находить с помощью первой производной точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции; с помощью второй производной точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функции; с помощью пределов вычислять асимптоты графика функции; строить график по полному исследованию функции

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Анализировать сложные функции и строить их графики, решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений, вычислять значения геометрических величин

Теоретический материал:

Полное исследование функции и построение графика.

Стоит задача: провести полное исследование функции и построить ее график $f(x) = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$.

Алгоритм исследования функции состоит из следующих шагов.

1. **Нахождение области определения функции.**

   Это очень важный шаг исследования функции, так как все дальнейшие действия будут проводиться на области определения.

   В нашем примере нужно найти нули знаменателя и исключить их из области действительных чисел.

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

   (В других примерах могут быть корни, логарифмы и т.п.Напомним, что в этих случаях область определения ищется следующим образом:

   для корня четной степени, например, $\sqrt[4]{g(x)}$ - область определения находится из неравенства $g(x) \geq 0$;

   для логарифма $\log_a g(x)$ - область определения находится из неравенства $g(x) > 0$).

2. **Исследование функции на четность или нечетность.**

   Функция является **четной**, если $y(-x) = y(x)$. Четность функции указывает на симметрию графика относительно оси ординат.

   Функция является **нечетной**, если $y(-x) = -y(x)$. Нечетность функции указывает на симметрию графика относительно начала координат.

   Если же ни одно из равенств не выполняется, то перед нами функция общего вида.

В нашем примере выполняется равенство $y(-x)=y(x)$, следовательно, наша функция четная. Будем учитывать это при построении графика - он будет симметричен относительно оси *oy*.

3. **Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точек экстремума.**

Промежутки возрастания и убывания являются решениями неравенств $f'(x)\geq 0$ и $f'(x)\leq 0$ соответственно.

Точки, в которых производная обращается в ноль, называют **стационарными**.

Критическими точками функции называют внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ (включать ли критические точки в промежутки возрастания и убывания).

1. Полагают, что промежутки возрастания и убывания являются решениями неравенств $f'(x)>0$ и $f'(x)>0$. В этом случае критические точки не включаются в промежутки.
2. Полагают, что точки, в которых функция определена, а конечной производной не имеет, нужно включать в промежутки возрастания и убывания (например, функция $y=\sqrt[3]{x}$ в точке *x=0* определена, а производная в этой точке бесконечна $y'=\frac{1}{3\cdot x^{\frac{2}{3}}},\quad y'(0)=\frac{1}{0}=\infty$, *x=0* следует включить в промежуток возрастания функции).

Мы будем включать критические точки в промежутки возрастания и убывания, если они принадлежат области определения функции.

Таким образом, **чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции**

- во-первых, находим производную;
- во-вторых, находим критические точки;
- в-третьих, разбиваем область определения критическими точками на интервалы;
- в-четвертых, определяем знак производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку возрастания, знак «минус» - промежутку убывания.

Находим производную на области определения

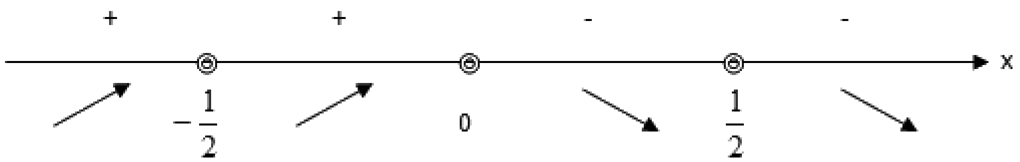
$$f'(x)=\frac{(x^2)'(4x^2-1)-x^2(4x^2-1)'}{(4x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(4x^2-1)^2}$$

Находим критические точки, для этого:

3. Находим стационарные точки (они же нули числителя): в нашем примере $x=0$;

4. Находим нули знаменателя: $x=\pm\frac{1}{2}$.

Наносим эти точки на числовую ось и определяем знак производной внутри каждого полученного промежутка. Как вариант, можно взять любую точку из промежутка и вычислить значение производной в этой точке. Если значение положительное, то ставим плюсик над этим промежутком и переходим к следующему, если отрицательное, то ставим минус и т.д. К примеру, $f'(-1)=\frac{-2\cdot(-1)}{(4(-1)^2-1)^2}=\frac{2}{9}>0$, следовательно, над первым слева интервалом ставим плюс.



1. Делаем вывод:

- функция возрастает на промежутке $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ и на промежутке $\left(-\frac{1}{2};0\right]$;
- функция убывает на промежутке $\left[0;\frac{1}{2}\right)$ и на промежутке $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Схематично плюсами / минусами отмечены промежутки где производная положительна / отрицательна. Возрастающие / убывающие стрелочки показывают направление возрастания / убывания.

Точками экстремума функции являются точки, в которых функция определена и проходя через которые производная меняет знак.

В нашем примере точкой экстремума является точка $x=0$. Значение функции в этой точке равно $f(0)=\frac{0^2}{4\cdot 0^2-1}=0$. Так как производная меняет знак с плюса на минус при прохождении через точку $x=0$, то $(0;\ 0)$ является точкой локального максимума. (Если бы производная меняла знак с минуса на плюс, то мы имели бы точку локального минимума).

4. **Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба.**

Промежутки вогнутости и выпуклости функции находятся при решениями неравенств $f''(x)\geq 0$ и $f''(x)\leq 0$ соответственно.

Иногда вогнутость называют выпуклостью вниз, а выпуклость – выпуклостью вверх.

Здесь также справедливы замечания, подобные замечаниям из пункта про промежутки возрастания и убывания.

Таким образом, **чтобы определить промежутки вогнутости и выпуклости функции** :

- во-первых, находим вторую производную;
- во-вторых, находим нули числителя и знаменателя второй производной;

- в-третьих, разбиваем область определения полученными точками на интервалы;
- в-четвертых, определяем знак второй производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку вогнутости, знак «минус» - промежутку выпуклости.

Находим вторую производную на области определения.

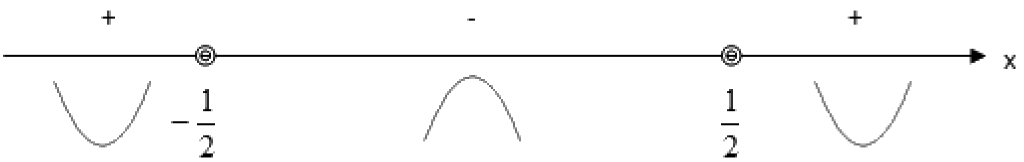
$$f''(x)=\left(\frac{-2x}{\left(4x^2-1\right)^2}\right)'=$$

$$=\frac{(-2x)'\left(4x^2-1\right)^2-(-2x)\left(\left(4x^2-1\right)^2\right)'}{\left(4x^2-1\right)^4}=\frac{24x^2+2}{\left(4x^2-1\right)^3}$$

Далее ищем нули числителя и знаменателя.

В нашем примере нулей числителя нет, нули знаменателя $x=\pm\frac{1}{2}$.

Наносим эти точки на числовую ось и определяем знак второй производной внутри каждого полученного промежутка.



1. Делаем вывод:

- функция выпуклая на промежутке $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;
- функция вогнутая на промежутке $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ и на промежутке $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Точка $\left(x_0;f(x_0)\right)$ называется *точкой перегиба*, если в данной точке существует касательная к графику функции и вторая производная функции меняет знак при прохождении через x_0.

Другими словами, точками перегиба могут являться точки, проходя через которые вторая производная меняет знак, в самих точках либо равна нулю, либо не существует, но эти точки входят в область определения функции.

В нашем примере точек перегиба нет, так как вторая производная меняет знак проходя через точки $x = \pm\frac{1}{2}$, а они не входят в область определения функции.

5. **Нахождение горизонтальных, вертикальных и наклонных асимптот.**

Горизонтальные или наклонные асимптоты следует искать лишь тогда, когда функция определена на бесконечности. На границах области определения функция имеет *вертикальные асимптоты*, если односторонние пределы функции в этих граничных точках бесконечны.

В нашем примере граничными точками области определения являются $x = \pm\frac{1}{2}$.

Исследуем поведение функции при приближении к этим точкам слева и справа, для чего найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1/4}{(-2)(-0)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{-1}{2}+0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1/4}{(-2)(+0)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to+\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1/4}{(+2)(-0)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1/4}{(+2)(+0)} = +\infty$$

Так как односторонние пределы бесконечны, то прямые $x = \pm\frac{1}{2}$ являются вертикальными асимптотами графика.

Наклонные асимптоты ищутся в виде прямых $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

и $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Если $k=0$ и b не равно бесконечности, то наклонная асимптота станет *горизонтальной*.

Что такое вообще эти асимптоты?

Это такие линии, к которым приближается график функции на бесконечности. Таким образом, они очень помогают при построении графика функции.

Если горизонтальных или наклонных асимптот нет, но функция определена на плюс бесконечности и (или) минус бесконечности, то следует вычислить предел функции на плюс бесконечности и (или) минус бесконечности, чтобы иметь представление о поведении графика функции.

Для нашего примера

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{4x^2-1}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x^2-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$y = \frac{1}{4}$ - горизонтальная асимптота.

На этом с исследование функции завершается, переходим к построению графика.

6. **Вычисляем значения функции в промежуточных точках.**

Для более точного построения графика рекомендуем найти несколько значений функции в промежуточных точках (то есть в любых точках из области определения функции).

Для нашего примера найдем значения функции в точках $x=-2$, $x=-1$, $x=-3/4$, $x=-1/4$. В силу четности функции, эти значения будут совпадать со значениями в точках *x=2* , *x=1* , *x=3/4* , *x=1/4*.

$$f(-2)=f(2)=\frac{2^2}{4\cdot 2^2-1}=\frac{4}{15}\approx 0{,}27$$

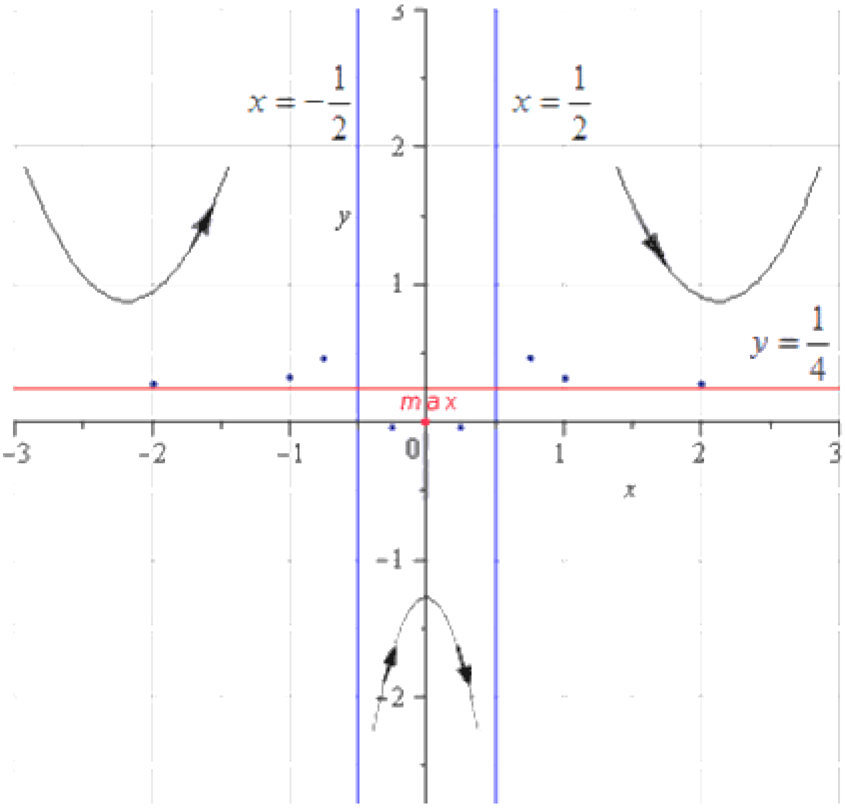
$$f(-1)=f(1)=\frac{1^2}{4\cdot 1^2-1}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{4\left(\frac{3}{4}\right)^2-1}=\frac{9}{20}=0{,}45$$

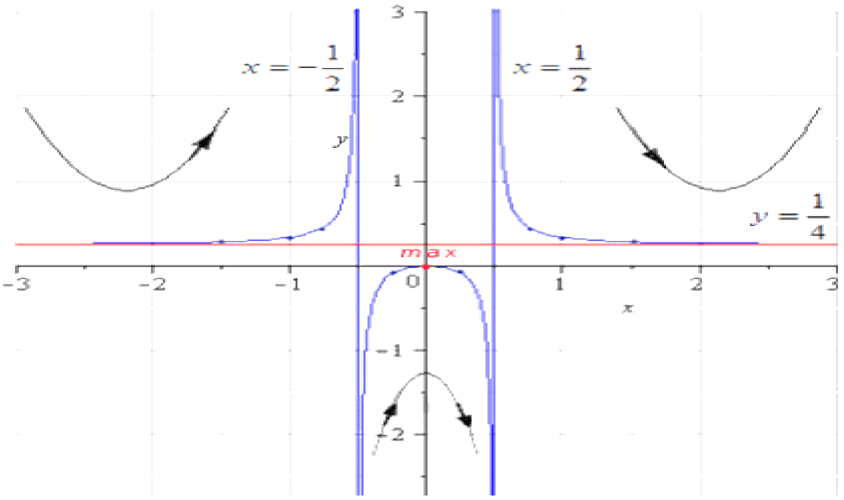
$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\left(\frac{1}{4}\right)^2-1}=-\frac{1}{12}\approx -0{,}08$$

7. **Построение графика.**

Сначала строим асимптоты, наносим точки локальных максимумов и минимумов функции, точки перегиба и промежуточные точки. Для удобства построения графика можно нанести и схематическое обозначение промежутков возрастания, убывания, выпуклости и вогнутости, не зря же мы проводили исследование функции =).



Осталось провести линии графика через отмеченные точки, приближая к асимптотам и следуя стрелочкам.



Задание: Исследуйте функцию и постройте её график

а) $f(x)=x^2-2x+8$.

b) $f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3}$.

c) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$.

d) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$.

Контрольные вопросы:

1) Назовите алгоритм анализа функции.
2) Назовите виды асимптот.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Название практической работы: ***Нахождение неопределенных интегралов различными и методами.***

Цель работы:научиться вычислять неопределённый интегралы с помощью таблицы основных интегралов

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

Теоретический материал:

Определение первообразной.

Первообразной функции *f(x)* на промежутке *(a; b)* называется такая функция *F(x)*, что выполняется равенство $F'(x)=f(x)$ для любого *x* из заданного промежутка.

Если принять во внимание тот факт, что производная от константы C равна нулю, то справедливо равенство$(F(x)+C)^{/}=f(x)$. Таким образом, функция *f(x)* имеет множество первообразных *F(x)+C*, для произвольной константы *C*, причем эти первообразные отличаются друг от друга на произвольную постоянную величину.

Определение неопределенного интеграла.

Все множество первообразных функции *f(x)* называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Выражение $f(x)dx$ называют *подынтегральным выражением*, а *f(x)* – *подынтегральной функцией*. Подынтегральное выражение представляет собой дифференциал функции *f(x)*.

Действие нахождения неизвестной функции по заданному ее дифференциалу называется *неопределенным* интегрированием, потому что результатом интегрирования является не одна функция *F(x)*, а множество ее первообразных *F(x)+C*.

На основании свойств производной можно сформулировать и доказать ***свойства неопределенного интеграла*** (свойства первообразной)

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=f(x)$

   Производная результата интегрирования равна подынтегральной функции.

2. $\int d(F(x))=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$

   Неопределенный интеграл дифференциала функции равен сумме самой функции и произвольной константы.

3. $\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx$, где *k* – произвольная константа.

   Коэффициент можно выносить за знак неопределенного интеграла.

4. $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

Неопределенный интеграл суммы/разности функций равен сумме/разности неопределенных интегралов функций.

Задача интегрирования является обратной задаче дифференцирования, причем между этими задачами очень тесная связь:

- первое свойство позволяет проводить проверку интегрирования. Чтобы проверить правильность выполненного интегрирования достаточно вычислить производную полученного результата. Если полученная в результате дифференцирования функция окажется равной подынтегральной функции, то это будет означать, что интегрирование проведено верно;
- второе свойство неопределенного интеграла позволяет по известному дифференциалу функции найти ее первообразную. На этом свойстве основано непосредственное вычисление неопределенных интегралов.

Несомненно, основным методом нахождения первообразной функции является непосредственное интегрирование с использованием таблицы первообразных и свойств неопределенного интеграла. Все другие методы используются лишь для приведения исходного интеграла к табличному виду.

Таблица первообразных (неопределенных интегралов).

$\int x^{p} \cdot dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$	
$\int 0 \cdot dx = C$	
$\int a^{x} \cdot dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \quad a \neq 1$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
$\int e^{x} \cdot dx = e^{x} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a} \right\rvert + C$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left\lvert \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left\lvert \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$	
$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$	

Формулы из левого столбца таблицы называют основными первообразными. Формулы из правого столбца основными не являются, но очень часто используются при нахождении неопределенных интегралов. Их можно проверить дифференцированием.

Пример 1:

Найдите множество первообразных функции $f(x) = 2^x + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{5x+4}$.

Решение.

Запишем функцию в виде $f(x) = 2^x + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{5x} = 2^x + \frac{3}{2} \cdot (5x+4)^{\frac{1}{3}}$.

Так как интеграл суммы функций равен сумме интегралов, то

$$\int f(x)dx = \int \left(2^x + \frac{3}{2} \cdot (5x+4)^{\frac{1}{3}} \right) dx = \int 2^x dx + \int \frac{3}{2} \cdot (5x+4)^{\frac{1}{3}} dx$$

Числовой коэффициент можно вынести за знак интеграла:

$$\int f(x)dx = \int 2^x dx + \int \frac{3}{2} \cdot (5x+4)^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \int 2^x dx + \frac{3}{2} \cdot \int (5x+4)^{\frac{1}{3}} dx$$

Первый из интегралов приведен к табличному виду, поэтому из таблицы первообразных для показательной функции имеем $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C_1$.

Для нахождения второго интеграла $\int (5x+4)^{\frac{1}{3}}\,dx$ воспользуемся таблицей первообразных для степенной функции $\int x^p \cdot dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ и правилом $\int f(k\cdot x+b)dx = \frac{1}{k}\cdot F(k\cdot x+b) + C$. То есть

$$\int (5x+4)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}\cdot(5x+4)^{\frac{1}{3}-1} + C_2 = \frac{3}{20}\cdot(5x+4)^{\frac{4}{3}} + C_2$$

.

Следовательно,

$$\int f(x)dx = \int 2^x\,dx + \frac{3}{2}\cdot\int (5x+4)^{\frac{1}{3}}\,dx =$$
$$= \frac{2^x}{\ln 2} + C_1 + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{20}\cdot(5x+4)^{\frac{4}{3}} + C_2\right) =$$
$$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{9}{40}\cdot(5x+4)^{\frac{4}{3}} + C$$

где $C = C_1 + \frac{3}{2}C_2$

Задание: Вычислите неопределённые интегралы

a. $\int (\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8)dx;$
b. $\int sin^2 x \cos x\,dx;$
c. $\int (e^{2x} + 2)dx$
d. $\int x2^{-x}dx$
e. $\int (x^4 - 8x^3 + 4x)dx$;б) $\int cos^2 x \sin x\,dx;$
f. $\int (e^{3x} + 1)dx$
g. $\int x^2 e^{3x}dx$

Контрольные вопросы:

1) Какой интеграл называется неопределённым?
2) Назовите основные методы интегрирования.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Название практической работы: ***Вычисление определенных интегралов***

Цель работы: научиться вычислять определённый интегралы с помощью таблицы основных интегралов и формулы Ньютона-Лейбница

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений, вычислять значения геометрических величин

Теоретический материал:

Определенный интеграл Ньютона-Лейбница.

Покажем, как дается понятие определенного интеграла Ньютона-Лейбница.

Пусть функция *y=f(x)* имеет первообразную *F(x)* на отрезке *[a; b]*, причем значение первообразной в точке *x=a* равно нулю: *F(a)=0*. *Определенным интегралом Ньютона-Лейбница* называется значение этой первообразной в точке *b*, то есть, $\int_a^b f(x)dx = F(b)$ при *F(a)=0*.

Это определение тесно связано с <u>формулой Ньютона-Лейбница</u> $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. В формуле Ньютона-Лейбница *F(x)* – любая первообразная из их множества, а в понятии определенного интеграла

Ньютона-Лейбница фигурирует именно та первообразная, которая обращается в ноль при $x=a$.

Формулу Ньютона-Лейбница называют *основной формулой интегрального исчисления*.

Пример1:

Вычислить значение определенного интеграла $\int_1^3 x^2 dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение.

Для начала отметим, что подынтегральная функция $y = x^2$ непрерывна на отрезке *[1;3]*, следовательно, интегрируема на нем.

Из таблицы неопределенных интегралов видно, что для функции $y = x^2$ множество первообразных для всех действительных значений аргумента (следовательно, и для $x \in [1; 3]$) записывается как $F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Возьмем первообразную при *C = 0*: $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Теперь осталось воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла: $\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$.

Пример 2:

Вычислить определенные интегралы $\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2} dx$ и $\int_{-1}^{1} \frac{4x^3+2}{x^2} dx$.

Решение.

На отрезке $\left[-4; -\frac{1}{2}\right]$ подынтегральная функция непрерывна, следовательно, интегрируема.

Найдем множество первообразных функции $y=\frac{4x^3+2}{x^2}$

: $\int\frac{4x^3+2}{x^2}dx=4\int xdx+2\int x^{-2}dx=2x^2-\frac{2}{x}+C$.

Возьмем первообразную $F(x)=2x^2-\frac{2}{x}$ и по формуле Ньютона-Лейбница вычислим требуемый определенный интеграл:

$$\int_{-4}^{-\frac{1}{2}}\frac{4x^3+2}{x^2}dx=\left(2x^2-\frac{2}{x}\right)\Big|_{-4}^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=2\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{-\frac{1}{2}}-\left(2(-4)^2-\frac{2}{-4}\right)=\frac{1}{2}+4-32-\frac{1}{2}=-28$$

Переходим ко второму определенному интегралу.

На отрезке *[-1;1]* подынтегральная функция не ограничена, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3+2}{x^2}=+\infty$, то есть, не выполняется необходимое условие интегрируемости функции на отрезке. Более того, $F(x)=2x^2-\frac{2}{x}$ не является первообразной функции $y=\frac{4x^3+2}{x^2}$ на отрезке *[-1;1]*, поскольку точка *0*, принадлежащая отрезку, не входит в область определения функции. Следовательно, не существует определенный интеграл Римана и Ньютона-Лейбница для функции $y=\frac{4x^3+2}{x^2}$ на отрезке *[-1;1]*.

Задание: Вычислите определённый интеграл

a. $\int_0^{2\pi}\sin x dx$;

b. $\int_0^{03}(2x+5)dx$

b) $\int_0^3 3\,xdx$;

c) $\int_{-\pi}^{0}\cos(2x)dx$

Контрольные вопросы:

1) Какой интеграл называется определённым?
2) Запишите формулу Ньютона-Лейбница

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Название практической работы*: Применение определенного интеграла в практических задачах*

Цель работы: научиться применять определённый интегралы к решению практических задач

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений, вычислять значения геометрических величин

Теоретический материал:

Все процессы в природе, в которых постоянно меняются какие-то параметры, например время, температура, давление, координаты, изучаются и вычисляются только с помощью дифференциального и интегрального исчисления. Большинство интегралов получены как мат. модели каких-либо естественных процессов в рамках медицины, биологии, химии, экономики, технике

1. Пусть материальная точка движется с ускорением *a* (*t*). Тогда ее скорость равна

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt + v_0,$$

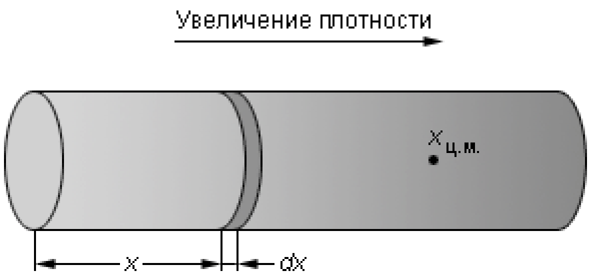
а перемещение –

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt + x_0,$$

где v_0, x_0 – постоянные, определяемые из начальных условий, t_0 и t – начальный и конечный моменты времени.

2. Пусть плотность ρ (*x*) стержня с постоянным сечением *S* зависит от расстояния до начала стержня. Тогда масса стержня равна

$$M = S\int_{0}^{L} \rho(x)dx,$$



Центр масс

где *L* – длина стержня, а центр масс стержня находится на расстоянии

$$x_0 = \frac{\int\limits_M xdm}{M} = \frac{\int_0^L x\rho(x)dx}{\int_0^L \rho(x)dx}.$$

3. Работа газа при его расширении от объема V_1 до объема V_2 равна

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV,$$

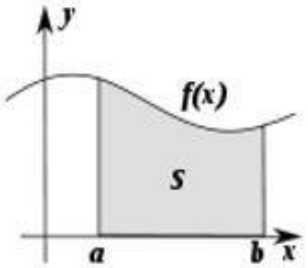
где *P* (*V*) – давление газа в этом процессе.

4. Работа, произведенная переменной силой f(x) при перемещении по оси *Ox* материальной точки от x = *a* до *x*=*b,* находится по формуле $A = \int_a^b f(x)dx.$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Г у к а: $F=kx$, где F — сила Н; x—абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F, а k —коэффициент пропорциональности, Н/м

5. Чтобы найти площадь фигуры, которая ограничена с двух сторон пределами интегрирования и с одной стороны графиком функции, то необходимо найти интеграл данной функции:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



.

Пример 1: Итак, предположим, что некоторое тело двигается со скоростью, заданной функцией:

$V(t) = t^2 + 1$.

Решение:

По условию задачи мы должны определить путь, который пройдет тело за промежуток времени [0;1].

Итак, найдем определенный интеграл данной функции:

$$S = \int_0^1 (t^2+1)\,dt = \left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3}+1-\left(\frac{0^3}{3}+0\right) = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

Это означает, что за данный промежуток времени, тело прошло 1,3(3) м.

Точно так же можно найти скорость по заданной функции ускорения

Пример 2:

Предположим, что к некоторому телу для его передвижения прикладывают силу, которая изменяется по закону F(x) = x +3. Необходимо найти работу, которую при этом совершает сила для перемещения тела с 1 м до 2 м.

Решение:

Для нахождения работы следует найти определенный интеграл заданной функции по известным пределам интегрирования:

$$A = \int_1^2 (x+3)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} + 3\cdot 2 - \left(\frac{1^2}{2} + 3\cdot 1\right) = 2 + 6 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{9}{2}$$

Это значит, что для передвижения тела потребовалось совершить работу, равную 4,5 Дж энергии.

Задание: Решите задачи:

1. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,22 до 0,32 м.
2. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны
3. Вычислите работу за промежуток времени [4;9], если мощность вычисляется по формуле $N(t) = 6\sqrt{t} + t^2$
4. Вычислите количество электричества, протекшего по проводнику за промежуток времени [2;3], если сила тока задается формулой $I(t) = 3t^2 - 2t + 5.$

Контрольные вопросы:

1) Где применяются определённые интегралы
2) По каким формулам вычисляются скорость движения и перемещение?
3) По какой формуле вычисляется масса стержня с постоянным сечением?

4) По какой формуле вычисляется работа произведённая переменной силой при перемещении материальной точки?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11

Название практической работы: ***Действия с матрицами.***

Цель работы: научиться выполнять действия над матрицами.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Производить операции над матрицами и определителями.

Теоретический материал:

Матрицей $A=A_{mn}$ порядка m*n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m - строк и n - столбцов

$$A = A_{mn} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = B_{mn} = (b_{ij}),\ C = C_{mn} = (c_{ij})$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами.

1. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового порядка называют матрицу

$C = (c_{ij})$ такого же порядка, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В то есть $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

2. Аналогично, разностью двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ и одинакового порядка называют матрицу $C = (c_{ij})$ такого же порядка, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц А и В то есть $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Пример 1

Найдите сумму и разность матриц А и В, если $A = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 6 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: Найдём сумму двух заданных матриц

$$A + B = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & 2 + 8 \\ -3 + (-3) & 4 + 6 \\ 0 + 10 & 7 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix};$$

Найдём разность двух заданных матриц

$$A - B = \begin{pmatrix} 12 - (-4) & 2 - 8 \\ -3 - (-3) & 4 - 6 \\ 0 - 10 & 7 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ 0 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матрицы на число

$1 \cdot A = A$ $\quad$ $0 \cdot A = 0$

$m \cdot (k \cdot A) = (m \cdot k) \cdot A$ $(m + k) \cdot A = m \cdot A + k \cdot A$ $\quad$ $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

Пример 2

Найдите произведение $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Решение: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. Умножение матриц

Произведение матрицы$A_{m\cdot n}$ на матрицу $B_{n\cdot k}$ называется матрица $C_{m\cdot k}$ такая, что элемент матрицы С, стоящий i–ой строке и j-ом столбце, т.е. элемент C_{ij}, равен сумме произведений элементов i –ой строки матрицы А на соответствующие элементы i –ого столбца матрицы В.

Пример 3

Найдите произведение матриц А и В, если $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B_{33} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

$$A_{23} \cdot B_{33} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} \cdot B_{33} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Задание: Выполните по ходу работы

1. Найдите произведение матриц А и В, если А=$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$, В=$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 0 \end{vmatrix}$;

2. Найдите обратную матрицу A^{-1}: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. Дано: $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и$B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) 3А+В б) АВ в)A^{-1} г)$A^{-1}A$

Контрольные вопросы:

1. Какие операции можно производить с матрицами?
2. Алгоритм нахождения обратной матрицы?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №12

Название практической работы: ***Вычисление определителя 3-го порядка с использованием свойств определителей***

Цель работы: научиться вычислять определители разными способами.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Производить операции над матрицами и определителями

Теоретический материал:

1. Определитель2-го порядка

Определителем .второго порядка называется выражение вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Числа $a_{11}, a_{22}, a_{21,} a_{12}$ называют элементами определителя.

Диагональ, образованная элементами $a_{11}a_{22}$, называется главной, а диагональ, образованная элементами $a_{21}a_{12}$ - побочной.

Таким образом, определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Заметим, что в ответе получается число.

Пример 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -6.$$

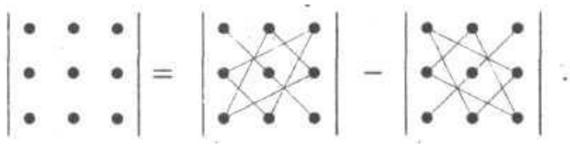
2. Определитель3-го порядка

Определителем третьего порядка называется выражение вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Элементы a_{11}; a_{22}; a_{33} – образуют главную диагональ.Числа a_{13}; a_{22}; a_{31} – образуют побочную диагональ.

Изобразим, схематически, как образуются слагаемые с плюсом и с минусом:



С плюсом входят: произведение элементов на главной диагонали, остальные два слагаемых являются произведением элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали.

Слагаемые с минусом образуются по той же схеме относительно побочной диагонали.

Это правило вычисления определителя третьего порядка называют**правилом треугольника или правилом Саррюса:**

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot8\cdot2+2\cdot1\cdot2+3\cdot1\cdot1-1\cdot8\cdot2-1\cdot1\cdot(-1)-2\cdot3\cdot2=-16+4+3-16+1-12=-36$$

3. Вычисление определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Вычисление определителя третьего порядка сводится к вычислению трех определителей второго порядка.

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 38.$$

Задание: Вычислить определители:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}. \qquad A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -8 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}.. \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -6 & -3 & -2 \end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Контрольные вопросы:

1) Что называется определителем 2-го порядка

2) Назовите два способа вычисления 3-го порядка.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №13

Название практической работы: ***Нахождение обратной матрицы.***

Цель работы: научиться находить обратную матрицу.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Производить операции над матрицами и определителями.

Теоретический материал:

На множестве матриц не определена операция деления, она заменена умножением на обратную матрицу.

Невырожденной называется квадратная матрица, определитель которой не равен нулю. Квадратная матрица называется вырожденной, если ее определитель равен нулю.Обратная матрица обозначается надстрочным индексом $^{-1}$

Квадратная матрица A^{-1} называется обратной к невырожденной матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E - это единичная матрица соответствующего порядка.

Обратная матрица существует только для квадратных матриц с не равными нулю определителями.

Свойства обратной матрицы:

1° $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

2° $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$

3° $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

4° $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Для матрицы второго порядка можно немного облегчить нахождение обратной, используя следующий алгоритм:

Шаг 1. Находим определитель Δ заданной матрицы, если он равен нулю, то делаем вывод, что обратной матрицы не существует, иначе переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Элементы, стоящие на главной диагонали меняем местами, а у элементов побочной диагонали меняем знак на противоположный.

Шаг 3. Делим все элементы на Δ и получаем обратную матрицу.

Пример 1

Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Решение.

Шаг 1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, тогда обратной матрицы не существует.

Ответ. Так как определитель матрицы A равен нулю, то она не имеет обратной.

Пмер 2

Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение.

Шаг 1. Находим определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$

Шаг 2. $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Шаг 3. $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} \cdot A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Нахождение обратной матрицы с помощью матрицы из алгебраических дополнений.

1. Потребуются понятия *транспонированной матрицы*, минора матрицы и алгебраического дополнения элемента матрицы.

Минор k-ого порядка матрицы A порядка m на n – это определитель матрицы порядка k на k, которая получается из элементов матрицы A, находящихся в выбранных k строках и k столбцах. (k не превосходит наименьшего из чисел m или n).

Минор M_{ij} получается из квадратной матрицы *A* порядка *n* на *n* вычеркиванием элементов *i-ой* строки и *j-ого* столбца.

Для примера запишем, минор *2-ого* порядка, который получается из

матрицы $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ выбором элементов ее второй, третьей строк и первого, третьего столбцов $M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -6$. Также покажем минор, который получается из матрицы $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ вычеркиванием второй строки и третьего столбца $M_{23} = \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 - 8 \cdot 3 = -6$. Проиллюстрируем построение этих миноров: $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} *квадратной матрицы* $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ называют минор (n-1)-ого порядка, который получается из матрицы А, вычеркиванием элементов ее i-ой строки и j-ого столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается как A_{ij}. Таким обрзом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ алгебраическое дополнение элемента a_{12} есть $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (6 \cdot 1 - 4 \cdot 3) = 6$.

2. Нам пригодятся два свойства определителя

На основании свойств определителя, определения операции умножения матрицы на число и понятия обратной матрицы справедливо равенство $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T}$, где $\|A_{ij}\|^T$ - транспонированная матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения A_{ij}.

Матрица $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T$ действительно является обратной для матрицы A, так как выполняются равенства $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Алгоритм нахождения обратной матрицы

с использованием равенства $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T$.

1. Вычисляем определитель матрицы A и убеждаемся, что он отличен от нуля (в противном случае матрица A необратима).
2. Строим $\|A_{ij}\|$ - матрицу из алгебраических дополнений элементов a_{ij}.
3. Транспонируем матрицу $\|A_{ij}\|$, тем самым получаем $\|A_{ij}\|^T$.
4. Умножаем каждый элемент матрицы $\|A_{ij}\|^T$ на число $\frac{1}{|A|}$. Этой операцией завершается нахождение обратной матрицы A^{-1}.
5. Проводим проверку результата, вычисляя произведения $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$. Если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, то обратная матрица найдена верно, в противном случае где-то была допущена ошибка.

<u>**Пример 3**</u>

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите обратную матрицу.

Решение:

Вычислим определитель матрицы А, разложив его по элементам третьего столбца:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot((-2)\cdot 3 - 1\cdot 2) = 16$$

Определитель отличен от нуля, так что матрица А обратима.

Найдем матрицу из алгебраических дополнений:

$$\|A_{i,j}\| = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 0\cdot 3 = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot((-2)\cdot 0 - 0\cdot 2) = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 1\cdot 2 = -8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(4\cdot 0 - (-2)\cdot 3) = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 0 - (-2)\cdot 2 = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(3\cdot 3 - 4\cdot 2) = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot 0 - (-2)\cdot 1 = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(3\cdot 0 - (-2)\cdot(-2)) = 4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 4\cdot(-2) = 11$$

Поэтому

$$\|A_{i\,j}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Выполним транспонирование матрицы из алгебраических дополнений:

$$\left\|A_{ij}\right\|^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Теперь находим обратную матрицу как $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left\|A_{ij}\right\|^T$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left\|A_{ij}\right\|^T = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \cdot 0 & \frac{1}{16} \cdot (-6) & \frac{1}{16} \cdot 2 \\ \frac{1}{16} \cdot 0 & \frac{1}{16} \cdot 4 & \frac{1}{16} \cdot 4 \\ \frac{1}{16} \cdot (-8) & \frac{1}{16} \cdot (-1) & \frac{1}{16} \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

Задание: Выполните по ходу работы

1. Найдите обратную матрицу A^{-1}: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. Дано: $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите: а) A^{-1} б) $A^{-1}A$

Контрольные вопросы:

1) Какая матрица называется обратной?
2) Что называется минором матрицы
3) Что называется алгебраическим дополнением?
4) Алгоритм нахождения обратной матрицы?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

Название практической работы: ***Решение систем плинейных уравнений сп неизвестными методом Крамера***

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Производить операции над матрицами и определителями, решать системы линейных уравнений различными методами

Теоретический материал:

1.Формулы Крамера для системы из двух уравнений

Системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases},$$

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы и обозначается Δ (дельта):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определители Δx, Δy получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2; \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

Найти значенияхиувозможно только при условии, если $\Delta \neq 0$.

Этот вывод следует из следующей теоремы.

2. Теорема Крамера: *Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка.*

Таким образом, ф*ормулы Крамера для системы из двух уравнений:* x= $\frac{\Delta x}{\Delta}$, y= $\frac{\Delta y}{\Delta}$.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = -3 \end{cases}.$$

Согласно формулам получаем:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1 \bullet 4 - 2 \bullet (-3)}{3 \bullet 4 - 1 \bullet 2} = \frac{4+6}{12-2} = \frac{10}{10} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3 \bullet (-3) - 1 \bullet 1}{3 \bullet 4 - 2 \bullet 1} = \frac{-9-1}{12-2} = \frac{-10}{10} = -1.$$

Итак, решение системы $x_1 = 1, x_2 = -1.$

2. Частные случаи

Три случая при решении систем линейных уравнений:

1) система линейных уравнений имеет единственное решение(система совместна и определённа)

Условия: $\Delta \neq 0, \frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$.

2) система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений(система совместна и неопределённа)

Условия: $\Delta = 0$, $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$, т.е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны.

3) система линейных уравнений решений не имеет(система несовместна)

Условия: $\Delta = 0,\ \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$,

Итак, система *m* линейных уравнений с *n* переменными называется *несовместной*, если у неё нет ни одного решения, и *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система уравнений, имеющая только одно решение, называется*определённой*, а более одного –*неопределённой*.

3.Формулы Крамера для системы из трех уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}\mathrm{z} = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta};\ \ y=\frac{\Delta y}{\Delta};\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Где Δ (дельта) составлен из коэффициентов при неизвестных:

$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ А определители Δx, Δy, Δz получаются путём замены

коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\Delta y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};\Delta z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Найти значениях, y и zвозможно только при условии, если $\Delta \neq 0$.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ 3 & 4 & -5\\ 0 & 2 & 7\end{vmatrix}=79,$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}3 & -1 & -3\\ -8 & 4 & -5\\ 17 & 2 & 7\end{vmatrix}=395,$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}2 & 3 & -3\\ 3 & -8 & -5\\ 0 & 17 & 7\end{vmatrix}=-158,$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 4 & -8\\ 0 & 2 & 17\end{vmatrix}=237,$$

$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=5$; $y=\frac{\Delta y}{\Delta}=-2$; $z=\frac{\Delta z}{\Delta}=3$.

Ответ: (5; -2; 3)

Задание:Решить систему методом Крамера

1. $\begin{cases} x-y=3\\ 3x-2y=1\end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-4y=5\\ 6x-8y=10\end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+y+z=-2\\ 5x-y-z=10\\ x-y+5z=-12\end{cases}$

4. $\begin{cases} x+3y-z=0\\ 2x-y+3z=1\\ 7x+7y+3z=2\end{cases}$

5. $\begin{cases} x-2y+z=3\\ 2x-4y+2z=5\\ 3x-6y+3z=9\end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y=8\\ 3x-y=3\end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+3y=5\\ 4x+6y=7\end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y-z=-3\\ 2x+3y+z=-1\\ x-y-z=3\end{cases}$

9. $\begin{cases} x-4y+3z=5\\ 2x-8y+6z=10\\ 3x-12y+9z=15\end{cases}$

Контрольные вопросы:

1) Что называется системой линейных уравнений?

2) Какая система называется совместной, какая несовместной?

3) Какая система называется определенной и неопределенной?

4) При каком условии можно использовать формулы Крамера для решения системы уравнений?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №15

Название практической работы: ***Решение систем линейных уравнений методами линейной алгебры***

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Производить операции над матрицами и определителями, решать системы линейных уравнений различными методами

Теоретический материал:

Метод Гаусса

Метод Гаусса прекрасно подходит для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Он обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами:

1. Нет необходимости предварительно исследовать систему уравнений на совместность;
2. Методом Гаусса можно решать не только СЛАУ, в которых число уравнений совпадает с количеством неизвестных переменных и основная матрица системы невырожденная, но и системы уравнений, в которых число уравнений не совпадает с количеством неизвестных переменных или определитель основной матрицы равен нулю;

3. Метод Гаусса приводит к результату при сравнительно небольшом количестве вычислительных операций.

При решении систем уравнений методом Гаусса необходимо знать:

Матрица системы – это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных

Расширенная матрица системы – это та же матрица системы плюс столбец свободных членов

элементарные преобразования:

a) **Строки** матрицы **можно переставлять** местами. Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует **удалить** из матрицы все эти строки кроме одной.

b) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует **удалить**. Нулевая строка – это строка, в которой *одни нули*.

c) Строку матрицы можно **умножить (разделить)** на любое число, отличное от нуля. Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

d) К строке матрицы можно **прибавить другую строку, умноженную на число**, отличное от нуля.

Пример 1

$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ Решить систему методом Гаусса

Решение:

1. Нужно записать *расширенную матрицу системы*:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right).$$

Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчёркивание для удобства оформления.

2. После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются *элементарными преобразованиями*.

3. Умножим <u>первую строку</u> на -2. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

4. Ко <u>второй строке</u> прибавляем первую строку, умноженную на -2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

5. Теперь первую строку можно разделить «обратно» на –2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Строка, которую ПРИБАВЛЯЛИ – <u>не изменилась</u>. Всегда меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯЮТ.

Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчётов примерно такой:

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ * & * & * \end{array}\right)$»

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу вверху умножаю на –2: $1 \cdot (-2) = -2$, и ко второй строке прибавляю первую: 2 + (–2) = 0. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & * & * \end{array}\right)$»

«Теперь второй столбец. Вверху –1 умножаю на –2: $-1\cdot(-2)=2$. Ко второй строке прибавляю первую: 1 + 2 = 3. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & * \end{array}\right)$»

«И третий столбец. Вверху –5 умножаю на –2: $-5\cdot(-2)=10$. Ко второй строке прибавляю первую: –7 + 10 = 3. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$»

Цель элементарных преобразований – привести матрицу к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется *трапециевидный вид* или *треугольный вид*.

__**Пример 2:**__

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Результат, к которому необходимо прийдти в ходе решения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду.

Смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Устроит и –1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть!

Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Теперь первая строка останется неизменной до конца решения. Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно **ко второй строке прибавить первую**

строку, умноженную на –2. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2**:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \| & \| & \| & \| \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И **к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3**:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \| & \| & \| & \| \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов **последователен**

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ *&*&*&*\\ *&*&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&*&*&*\\ *&*&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&*&*\\ *&*&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&*\\ *&*&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ *&*&*&*\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&*&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&*&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&-2&*\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&-2&-28\end{array}\right)$$

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&-2&-28\end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-5&-1\\ 2&-1&3&13\\ 1&2&-1&9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 2&-1&3&13\\ 3&2&-5&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&-5&5&-5\\ 0&-4&-2&-28\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&1&-1&1\\ 0&2&1&14\end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&9\\ 0&1&-1&1\\ 0&2&1&14\end{array}\right)$$

Для этого **к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & -5 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 13\\ 1 & 2 & -1 & 9\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 2 & -1 & 3 & 13\\ 3 & 2 & -5 & -1\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & -5 & 5 & -5\\ 0 & -4 & -2 & -28\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 14\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 12\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)$$

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на –2 и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ \quad\quad y - z = 1 \\ \quad\quad\quad z = 4 \end{cases}$$

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z = 4$

Смотрим на второе уравнение: $y - z = 1$. Значение «зет» уже известно, таким образом:

$y - 4 = 1$

$y = 5$

И, наконец, первое уравнение: $x + 2y - z = 9$. «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:

$x + 2 \cdot 5 - 4 = 9$

$x + 6 = 9$

$x = 3$

Ответ: $x = 3, y = 5, z = 4$

Задание: Решить систему методом Гаусса

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1) Какая матрица называется расширенной?
2) Назовите элементы преобразований при решении СЛАУ методом Гаусса

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

Название практической работы: ***Решение СЛАУ различными методами***

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом линейной алгебры

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Производить операции над матрицами и определителями, решать системы линейных уравнений различными методами

Теоретический материал:

Матричный метод решения СЛАУ: пример решения с помощью обратной матрицы

Метод обратной матрицы — это метод, использующийся при решении СЛАУ в том случае, если число неизвестных равняется числу уравнений.

Если матрица A невырождена, то тогда с помощью операций над матрицами выразим неизвестную матрицу X . Операция деления на множестве матриц заменена умножением на обратную матрицу, поэтому до множим последнее равенство на матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow \ EX = A^{-1}B \Rightarrow$$

$$X = A^{-1}B$$

Поэтому, чтобы найти неизвестную матрицу X надо найти обратную матрицу к матрице системы и умножить ее справа на вектор-столбец свободных коэффициентов.

Пример 1

Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ матричным методом.

Решение.

Выпишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицу правых частей $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу для матрицы системы. Для матрицы второго порядка обратную можно находить по следующему алгоритму:

1) матрица должна быть невырождена, то есть ее определитель не должен равняться нулю: $|A| = 1$;

2) элементы, стоящие на главной диагонали меняем местами, а у элементов побочной диагонали меняем знак на противоположный и делим полученные элементы на определитель матрицы. Итак, получаем, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Две матрицы одного размера равны, если равны их соответствующие элементы, то есть в итоге имеем, что $x_1 = -11$, $x_2 = 31$

Ответ. $x_1 = -11$, $x_2 = 31$

Пример 2:

Решить с помощью обратной матрицы систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Решение. Запишем данную систему в матричной форме:

$AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ - столбец правых частей. Тогда

$X = A^{-1}B$

Найдем обратную матрицу A^{-1} к матрице A с помощью союзной матрицы:

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \widetilde{A}^T$

Здесь $\Delta = |A|$ - определитель матрицы A; матрица $\widetilde{A}$ - союзная матрица, она получена из исходной матрицы A заменой ее элементов их алгебраическими дополнениями. Найдем $\widetilde{A}$, для этого вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Таким образом,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \neq 0$$

А тогда

$$\tilde{A} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Отсюда искомая матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Задание: Решите СЛАУ матричным способом

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = \dfrac{5}{6} \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2y + x + z = -1 \\ -z - y + 3x = -1 \\ -2x + 3z + 2y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1) В чём заключается матричный метод решения СЛАУ?
2) Назовите алгоритм решения однородной системы линейных уравнений методом обратной матрицы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

Название практической работы: ***Комплексные числа и действия над ними***

Цель работы: научится выполнять действия над комплексными числами заданными в алгебраической форме.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Выполнять действия над комплексными числами

Теоретический материал:

Определение. Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b - действительные числа. При этом выполняются условия:

а) Два комплексных числа $a_1 + b_1i$ и $a_2 + b_2i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

б) Сложение комплексных чисел определяется правилом:

$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\ i.$

в) Умножение комплексных чисел определяется правилом:

$(a_1 + b_1i)\ (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)\ i.$

Алгебраическая форма комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называют алгебраической формой комплексного числа, где a – действительная часть, bi – мнимая часть, причем b – действительное число.

Комплексное число $a + bi$ считается равным нулю, если его действительная и мнимая части равны нулю: $a = b = 0$

Комплексное число $a + bi$ при $b = 0$ считается совпадающим с действительным числом a: $a + 0i = a$.

Комплексное число $a + bi$ при $a = 0$ называется чисто мнимым и обозначается bi: $0 + bi = bi$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Над комплексными числами в алгебраической форме можно выполнять следующие действия.

1) Сложение.

Определение. Суммой комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число z, действительная часть которого равна сумме действительных частей z_1 и z_2, а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел z_1 и z_2, то есть $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Числа z_1 и z_2 называются слагаемыми.

Сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1°. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2°. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3°. Комплексное число $–a –bi$ называется противоположным комплексному числу $z = a + bi$. Комплексное число, противоположное комплексному числу z, обозначается $-z$. Сумма комплексных чисел z и $-z$ равна нулю: $z + (-z) = 0$

<u>Пример 1</u>. Выполните сложение $(3 – i) + (-1 + 2i)$.

$(3 – i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2) i = 2 + 1i$.

2) Вычитание.

Определение. Вычесть из комплексного числа z_1 комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z + z_2 = z_1$.

Теорема. Разность комплексных чисел существует и притом единственна.

<u>Пример 2</u>. Выполните вычитание $(4 – 2i) - (-3 + 2i)$.

$(4 – 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2) i = 7 – 4i$.

3) Умножение.

Определение. Произведением комплексных

чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называется комплексное число z, определяемое равенством: $z = (a_1a_2 – b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.

Числа z_1 и z_2 называются сомножителями.

Умножение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1°. Коммутативность: $z_1z_2 = z_2z_1$.

2°. Ассоциативность: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

3°. Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$(z_1 + z_2) z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

4°. $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a – bi) = a^2 + b^2$ - действительное число.

На практике умножение комплексных чисел производят по правилу умножения суммы на сумму и выделения действительной и мнимой части.

В следующем примере рассмотрим умножение комплексных чисел двумя способами: по правилу и умножением суммы на сумму.

<u>Пример 3</u>. Выполните умножение $(2 + 3i) (5 – 7i)$.

1 способ. $(2 + 3i) (5 – 7i) = (2\times 5 – 3\times (- 7)) + (2\times (- 7) + 3\times 5)i = = (10 + 21) + (- 14 + 15)i = 31 + i$.

2 способ. $(2 + 3i) (5 – 7i) = 2\times 5 + 2\times (- 7i) + 3i\times 5 + 3i\times (- 7i) = = 10 – 14i + 15i + 21 = 31 + i$.

4) Деление.

Определение. Разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z \cdot z_2 = z_1$.

Теорема. Частное комплексных чисел существует и единственно, если $z_2 \neq 0 + 0i$.

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \quad + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

5) Возведение в целую положительную степень.

а) Степени мнимой единицы.

Пользуясь равенством $i^2 = -1$, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

$i^3 = i^2 i = -i$,

$i^4 = i^2 i^2 = 1$,

$i^5 = i^4 i = i$,

$i^6 = i^4 i^2 = -1$,

$i^7 = i^5 i^2 = -i$,

$i^8 = i^6 i^2 = 1$ и т. д.

Это показывает, что значения степени i^n, где n – целое положительное число, периодически повторяется при увеличении показателя на 4 .

Поэтому, чтобы возвести число i в целую положительную степень, надо показатель степени разделить на 4 и возвести i в степень, показатель которой равен остатку от деления.

Пример 5. Вычислите: $(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23}$.

$i^{36} = (i^4)^9 = 1^9 = 1$,

$i^{17} = i^{4 \times 4+1} = (i^4)^4 \times i = 1 \cdot i = i$.

$i^{23} = i^{4 \times 5+3} = (i^4)^5 \times i^3 = 1 \cdot i^3 = - i$.

$(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23} = (1 + i)(- i) = - i + 1 = 1 - i$.

б) Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных сомножителей.

Пример 6. Вычислите: $(4 + 2i)^3$

$(4 + 2i)^3 = 4^3 + 3 \times 4^2 \times 2i + 3 \times 4 \times (2i)^2 + (2i)^3 = 64 + 96i - 48 - 8i = 16 + 88i.$

Задание: Выполните задания по ходу работы:

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 7i$

   Найдите:

   a) $z_1 + z_2$

   b) $z_1 \cdot z_2$

2. Произведите умножение комплексных чисел: $(2 + 3i) \cdot (5 - 7i)$
3. Вычислите: $\frac{8+2i}{5-3i}$
4. Решите уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$

Контрольные вопросы:

1. Как обозначается комплексное число?
2. Формы комплексного числа?
3. Какие действия производятся над комплексными числами?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18

Название практической работы: ***Решение практических задач на вычисление вероятности события***.

Цель работы: Научиться вычислять вероятности событий.

знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Теоретическая часть:

1. Случайное событие

Случайное событие – это любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти. Случайное событие – это результат испытания.

Испытание (опыт, эксперимент) – в этом определении понимается определение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат. Испытание может проводиться человеком, но может осуществляться и независимо от человека. Человек в этом случае выступает в роли наблюдателя.

Событие обозначаются начальными прописными (заглавными) буквами латинского алфавита**A, B, C**.

1. Достоверное событие – это событие, которое в результате испытания обязательно должно произойти.
2. Невозможное событие – это событие, которое в результате испытания вообще не может произойти.

События называются несовместимыми, если наступление одного из них исключает появление другого. В противном случае события – совместные.

Противоположные события: два события A и $\bar{A}$ называются противоположными, если не появлени~~е~~ одного из них в результате данного испытания влечет появление другого. ($\bar{A}$ читается «не A»).

2. Вероятность случайного события

Численная мера степени объективности возможности наступления события называется *вероятностью случайного события*.

Классическое определение вероятности события A:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность события А равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию А (m), к общему числу случаев (n).

Пример 1

Лабораторная крыса, помещенная в лабиринт, должна избрать один из пяти возможных путей. Лишь один из них ведет к поощрению в виде пище. В предположении, что крыса с одинаковой вероятностью изберет любой путь, какова вероятность выбранного пути, ведущего к пище?

Решение: $\frac{1}{5}$

Пример 2

При бросании игральной кости, возможно, шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Какова вероятность появления четного числа очков?

Решение: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Событие А – «появление четного числа очков» благоприятствуют 3 исхода (2, 4 и 6 очков).

Пример 3

Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение:

Обозначим через А событие, состоящее в том, что число на взятой карточке кратно 5. В данном испытании имеется 30 равновозможных исходов, из которых событию А благоприятствуют 6 исходов 5, 10, 15, 20, 25, 30).

Следовательно, $P(A) = \frac{6}{30} = 0{,}2$

Пример 4

Подбрасывают 2 монеты. Какова вероятность, что обе упадут «гербом» кверху?

Решение:

4 исхода бросания монет: ГГ, ГР, РГ, РР.

Пусть событие А – «выпали 2 герба» - этому событию благоприятствует один исход.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Пример 5

Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 7 или 8?

Решение:

Обозначим события: А – «выпало 7 очков», В –«выпало 8 очков».

Событию А благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1).

События В благоприятствует 5 исходов: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2).

Всех равновозможных исходов $n=6^2=36$.

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}167, \qquad P(B) = \frac{5}{36} = 0{,}139$$

Итак, P(A) > P(B) получить в сумме 7 очков более вероятное событие, чем в сумме 8 очков.

3. Статистическое определения вероятности

Относительная частота события – это доля тех фактически проведенных испытаний, в которых событие А появилось $W = P^*(A) = \frac{m}{n}$. Это опытная экспериментальная характеристика, где m – число опытов, в которых появилось событие А; n – число всех поведенных опытов.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний $P(A) = \lim\limits_{n-\infty} \frac{m}{n}$

Пример 6

Из 982 больных, поступивших в хирургическую больницу за месяц, 275 человек имели травмы. Какова относительная частота поступления больных с этим видом заболевания?

Решение: $P^*(A) = \frac{275}{982}$

Пример 7

При стрельбе по мишени частота w=0,75. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

Решение: $W = \frac{m}{n} \Rightarrow m = Wn$; $m = 0{,}75 \cdot 40 = 30$.

Ответ: было получено 30 попаданий.

4. Закон сложения вероятностей

Сумма двух событий – это такое событие, при котором появляется хотя бы одно из этих событий (A или B).

Если A и B совместные события, то их сумма A+B обозначает наступление события A или события B, или обоих событий вместе.

Если A и B несовместимые события, то сумма A+B означает наступление или события A или события B.

Пример 8

Победитель соревнования награждается призом (событие A), денежной премией (событие B), медалью (событие C). Что представляют собой события A+B?

Решение:

События A+B состоит в награждении победителя или призом денежной премией, или тем и другим.

Пример 9

Турист имеет возможность посетить 3 города: A, B и C. Обозначаем события: A – турист посетил город A; B- турист посетил город B;

C-турист посетил город C. В чем заключается событие A+C?

Решение:

Турист посетил только один из городов A или C, или он посетил их оба.

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+(B).$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+(B) – P(AB).$$

Сумма вероятностей дискретный событий, образующих полную группу, равна единице

$$P(A_1)+ P(A_2)+…= P(A_n)=1$$

Или

$$\sum_{i=1}^{n} P(Ai) = 1$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Пример 10

Пусть вероятность того, что забег выигрывает Джим, равна $\frac{1}{3}$, а вероятность того, что забег выиграет Том, равна $\frac{1}{5}$. Какова вероятность того, что забег выиграет один из них?

Решение: $P(A +B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

Пример 11

Вероятность того, что у взрослого пациента все зубы сохранились равна 0,67. Вероятность того, что некоторые зубы отсутствуют равна 0,24. Вероятность того, что он беззубый равно 0,09. Вычислить вероятность того, что у пациента несколько зубов.

Решение: $P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}67+0{,}24=0{,}91$.

Пример 12

Вероятность попадания в опухолевую клетку «мишень» первого радионуклида равна P =0,7, а второго –P =0,8. Найти вероятность попадания в клетку - «мишень», если бы одновременно использовались оба препарата.

Решение:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(A \cdot B)=0{,}7+0{,}8 - 0{,}56=0{,}94.$$

Для непрерывных случайный величин условие нормировки имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Пример 13

В большой популяции плодовой мушки 25% мух имеют мутацию глаз, 50% - мутацию крыльев, а 40% мух с мутацией глаз и крыльев. Какова вероятность того, что у мухи, наудачу выбранной из этой популяции, окажется хотя бы одна из этих мутаций?

Решение:

А – Событие, состоящее в том, что случайно выбранная мха имеет мутации глаз. В есть событие, состоящее в том, что случайно выбранная муха имеет мутацию крыльев. Вероятность того, что муха имеет одну или обе мутации:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(AB).$$

Тогда $P(A+B)=0{,}25+0{,}5 - 0{,}4\cdot 0{,}25=0{,}65.$

4. Условная вероятность

Условная вероятность события В – это вероятность события В, найденная при условии, что событие А произошло. Обозначается Р(А/В).

Пример 14

В коробке содержатся 3 белых и 3 желтых таблетки. Из коробки дважды вынимают наугад по одной таблетке, не возвращая их в коробку. Найти вероятность появления белых таблеток при втором испытании (событие В), если при первом испытании была извлечена желтая таблетка (событие А).

Решение:

После первого испытания в коробке осталось 5 таблеток, из них 3 белых.

Искомое условие вероятности: $P(B/A)= 3/5 =0{,}6$.

Пример 15

В коробке находится 8 красных и 6 белых таблеток. Из коробки последовательно без возвращения извлекают 3 таблетки. Найти вероятность того, что все 3 таблетки белые.

Решение:

Обозначим; A_1 - первая таблетка белая, A_2 - вторая таблетка белая, A_3 - третья таблетка белая.

$$P(A_1A_2\,A_3)=P(A_1)P(A_2\,/A_1)\cdot P(A_3\,/A_1\,A_2);$$

$$P(A_1\,)=\ \frac{6}{14};\quad P(A_2\,/A_1)=\ \frac{5}{13};\quad P(A_3\,/A_1\,A_2)=\frac{4}{12};$$

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}=\frac{5}{91}=0{,}055.$$

Пример 16

Предположим, что в некоторой семье имеются 2 ребенка.

1. Какова вероятность, что оба ребенка – мальчики?
2. Если известно, что, по крайней мере, один из детей – мальчик, то какова вероятность того, что об ребенка – мальчики?
3. Если известно, что старший ребенок – мальчик, то вероятность того, что оба ребенка – мальчики?

Решение:

1. Четыре равновероятных события ММ, МД, ДМ ДД; Р(ММ)= 1/4 .

2. Исключается вариант ДД: Р(ММ)= 1/3.

3. Варианты только: ММ, МД: Р(ММ)= 1/2.

5.Закон умножения вероятностей

Произведение двух событий – это событие, состоящее в совместном появлении этих событий (А и В).

Пример 17

Пусть имеются следующие события: А – «из колоды карт вынута дама»; В – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Что представляет собой событие АВ?

Решение: АВ есть событие «вынута дама пик».

Событие В называются независимыми от события А, если появление события А не изменяет вероятности появления события В.

Вероятность появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B).$$

Для зависимых событий:

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B/A).$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло.

<u>Пример 18</u>

Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение: $P(A/B)=P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

<u>Пример 19</u>

Вероятность того, что у взрослого пациента все зубы сохранились равна 0,67. Какова вероятность того, что у двух не имеющих отношения друг к другу больных, ожидающих приема в кабинете стоматолога, есть все зубы?

Решение: $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)=0,67 \cdot 0,67=0,45$.

<u>Пример 20</u>

Найти вероятность того, что в семье из двух детей:

1) оба ребенка – мальчики; 2) оба ребенка – девочки; 3) старший ребенок

мальчик, а младший – девочка. Вероятность рождения мальчика – 0,515.

Решение:

P(ММ)=P(М) ·P(М)=0,515 ·0,515=0,265;

P(ДД)=0,485· 0,485=0,235;

P(МД)=0,515· 0,485=0,25

<u>Пример 21</u>

Известно, что в 3 случаях из 250 на свет появляются близнецы, причем в одном случае – это истинные (монозиготные) близнецы. Какова вероятность, что у определенной беременной женщины родятся близнецы мальчик и девочка. Учтите, что однояйцовые близнецы никогда не бывают разных полов – это обязательно либо 2 мальчика, либо 2 девочки.

Решение:

Вероятность иметь дизиготных близнецов равна:

$$P(A)=\frac{3}{250};\quad 1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Искомая вероятность:

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{250}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ \frac{1}{125}\cdot\ \frac{1}{2}=\frac{1}{250}.$$

Пример 22

Вероятность того, что студент в летнюю сессию сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы 1)только второй экзамен; 2)все три экзамена.

Решение:

1) $P(B)=P(A_1\ A_2\ A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}1\ \ 0{,}9\ \ 0{,}2=0{,}018$

2) $P(A_1A_2\ A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}9\ \ 0{,}9\ \ 0{,}8=0{,}648.$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1 , A_2 ,…, A_n , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, …, $\bar{A}_n$.

Пример 23

Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий такова: P_1 = 0,75; P_2 = 0,8; P_3 = 0,85. Какова вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех этих орудий?

Решение:

$g_1= 1 – P_1 = 1 – 0{,}75= 0{,}25$;

$g_2= 1 – P_2 = 1 – 0{,}8 = 0{,}2$;

$g_3= 1 – P_3 = 1 – 0{,}85= 0{,}15$;

$P(A) = 1 – g_1g_2g_3$;

$P(A)= 1 – 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15=0{,}9925$.

Пример 24

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

Решение:

Вероятность того, что в мишень попадет первый стрелок и не попадет второй, равна:

$$P(A_1 \bar{A}_2)=0{,}7\cdot (1-0{,}8)=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14$$

Вероятность того, что попадает второй стрелок в мишень и не попадет первый, равна:

$$P(\bar{A}_1 A_2)=(1-0{,}7)\cdot 0{,}8=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24.$$

Вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок, равна сумме этих вероятностей:

$$P(A_1 \bar{A}_2)+P(A_1 \bar{A}_2)=0{,}14+0{,}24=0{,}38.$$

Пример 25

Сколько должна планировать пара иметь детей, что бы вероятность хотя бы одного мальчика была выше 90% (вероятность рождения мальчика и девочки – 0,5).

Решение:

Пусть вероятность того, что все девочки:

$$P(Д) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dots\frac{1}{2}n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}9$$

Вероятность того, что не все девочки:

$P(\text{хотя бы один мальчик}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}9.$

$$0{,}1=\left(\frac{1}{2}\right)^n;\ \frac{1}{10} = 1/2^n;\ \ 2^n = 10 \Rightarrow n\approx 4.$$

6.Формула Байеса

Формула Байеса применяется, когда событие *A,* которое может появиться только с одной из гипотез $H_1, H_2 \dots H_n$, произошло и необходимо произвести количественную переоценку *априорных* вероятностей этих гипотез $P(H_1)$,

$P(H_2),\ldots,\ P(H_n)$, известных до испытания, т.е. найти *апостериорные* (получаемые после проведения испытания) условные вероятности гипотез $P(H_1/A), P(H_2/A), \ldots, P(H_n/A)$:

$$P(H_i/A) = \frac{P(Hi)\cdot P(A/Hi)}{P(A)}$$

Или вместо $P(A)$ используем ее значение, вычисленное по формуле полной вероятности:

$$P(H_i/A) = \frac{P(Hi)\cdot P(A/Hi)}{P(Hi)\cdot P(A/Hi)+\ldots+P(Hп)\cdot P(A/Hп)}$$

Итак, пусть до опыта имеются гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$. После опыта становится известной информация о результатах опыта, но не полная, а именно: результаты наблюдений показывают, что наступило некоторое событие А.

Считается, что до опыта были известны *(априорные)* вероятности гипотез $P(H_1),P(H_2), \ldots,P(H_n)$ и *условные* вероятности $P(A/H_1)$, $P(A/H_2),\ldots$, $P(A/H_n)$. Необходимо определить *апостериорные* вероятности гипотез $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$, $\ldots$, $P(H_n/A)$.

Значение формулы Байеса состоит в том, что при наступлении события*A,* т.е. по мере получения новой информации, мы можем проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы. Такой подход называется байесовским.

<u>Пример 26</u>

Два охотника одновременно стреляют одинаковыми пулями в медведя. В результате медведь был убит одной пулей (событие *А).* Как охотники должны поделить шкуру убитого медведя, если известно, что вероятность попадания у первого охотника 0,3,а у второго 0,6?

Решение:

Воспользуемся формулой Байеса. Определим предварительно гипотезы.

Гипотеза H_1 :попал первый охотник, второй промахнулся.

Гипотеза H_2: попал второй, первый промахнулся.

Гипотеза H_3: попали оба охотника.

Гипотеза H_4: оба промахнулись.

СобытиеAможет произойти только тогда, когда произошла либо гипотеза H_1, либо гипотеза H_2, т. е.:

$$P(A/H_1)=1, \qquad P(A/H_3)=0$$
$$P(A/H_2)=1, \qquad P(A/H_4)=0$$

Предполагаем, что попадания охотников в медведя не зависят друг от друга. И получаем:

$P()$ = 0,3·(1 – 0,6) = 0,12;

$P(H_2)$ = 0,6·(1 – 0,3) = 0,42;

$P(H_3)$ = 0,3·0,6 = 0,18;

$P(H_4)$ = (1 – 0,3)(1 – 0,6) = 0,28.

Применяем формулу Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H1)\cdot P(A/H1)}{P(H1)\cdot P(A/H1) + P(H2)\cdot P(A/H2) + P(H3)\cdot P(A/H3) + P(H4)\cdot P(A/H4)}$$

$$P(H_1/A) = \frac{0{,}12\cdot 1}{0{,}12\cdot 1+0{,}42\cdot 1+0{,}18\cdot 0+0{,}28\cdot 0} = \frac{2}{9}$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H2)\cdot P(A/H2)}{P(H1)\cdot P(A/H1) + P(H2)\cdot P(A/H2) + P(H3)\cdot P(A/H3) + P(H4)\cdot P(A/H4)}$$

$$P(H_2/A) = \frac{0{,}42\cdot 1}{0{,}12\cdot 1+0{,}42\cdot 1+0{,}18\cdot 0+0{,}28\cdot 0} = \frac{7}{9}.$$

Таким образом, при справедливом делении первый охотник должен получить$\frac{2}{9}$ шкуры, т.е. меньше четвертой части шкуры, в то время как, на первый взгляд, казалось, что ему причитается $\frac{1}{3}$ шкуры (0,3).

Задание: Решите задачи

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6?
2. Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты она три раза упадет гербом кверху?
3. Консультационный пункт университета получает пакеты с контрольными работами из городов А, В и С. Вероятность получения пакета из города А равна 0,6, а из города В – 0,1. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города С.

4. Вероятность того, что в летнюю сессию студент сдаст первый экзамен, равна 0,8; второй — 0,9; третий — 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст хотя бы один экзамен.
5. Имеется два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, а во втором — 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один ящик и вынимают из него шар. Какова вероятность того, что оставшийся шар является белым?

ПРАКТИЧЕСКАЯРАБОТА № 19

Название практической работы: ***Решение задач с реальными дискретными случайными величинами***

Цель работы: Научиться решать задачи с использованием дискретных случайных величин

Знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Теоретический материал:

1. Случайные величины

Случайная величина — это величина, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно — заранее неизвестно).

Дискретная случайная величина — это случайная величина, когда принимает отдельное изолированное, счетное множество значений.

Непрерывная случайная величина — это случайная величина, принимающая любые значения из некоторого интервала. Понятие непрерывной случайной величины возникает при измерениях.

Случайные величины обозначаются конечными заглавными буквами латинского алфавита X, Y, Z, а их значения — соответствующими строчными буквами x, y, z.

2.Закон распределения случайной величины

Это всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

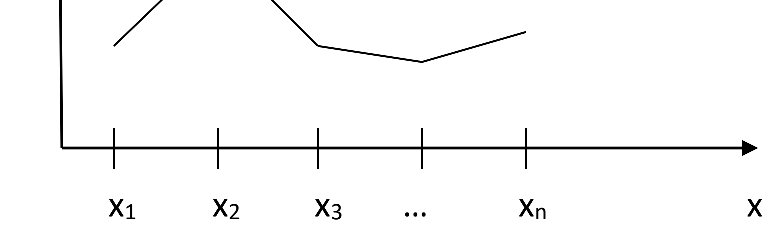
Для *дискретной* случайной величины закон распределения может быть задан в виде *таблицы,* аналитически (в виде *формулы) и графически.*

Таблица — это простейшая форма задания закона распределения. В ней перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины X и соответствующие вероятности. Эта таблица называется *рядом распределения.*

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} pi = 1$$

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат — соответствующие их вероятности. Соединение образует ломаную линию. Это многоугольник или полигон распределения вероятностей.



Полигон распределения вероятностей

Пример 1

Задают ли законы распределения дискретной случайнойвеличины следующие таблицы?

А)

x_i	1	2	3	4
P_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Б)

x_i	1	2	3	4
P_i	0,1	0,2	0,3	0,5

Решение

А) Да, так как выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} pi = 1$: 0,1+0,4+0,3+0,2=1

Б) Нет: 0,1+0,2+0,3+0,5 $\neq$ 1.

Пример 2

В денежной лотереи выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 рублю. Найти закон распределения случайной величины *X* — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

*Решение: в*озможные значения X:

P x_i	50	1	0
p_i	0,01	0,1	0,89

$_1 = \frac{1}{100}$;

$P_2 = \frac{10}{100}$; $P_3 = 1 - (P_2 + P_1)$

Контроль: 0,01 + 0,1 + 0,89 = 1

Пример 3

Вероятность того, что студент сдаст семестровый экзамен по биофизике равна 0,7, а по биохимии — 0,9. Составьте закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент. Построить многоугольник распределения вероятностей.

Решение

Возможные значения *X* — число сданных экзаменов: 0,1,2.

Считаем вероятности:

$P(X=0) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = (1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$

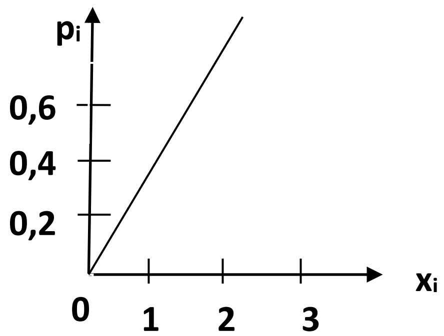
$P(X=1) = P(A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2) = P(A_1)\cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2) = 0{,}7\cdot 0{,}1 + 0{,}3\cdot 0{,}9 = 0{,}34$

$P(X=0) = P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) = (1 – 0{,}7)\cdot(1 – 0{,}9) = 0{,}7\cdot 0{,}9 = 0{,}63$.

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

Контроль: 0,03 + 0,34 + 0,63 = 1.



Многоугольник распределения вероятностей

3.Функция распределения случайных величин

Функция *F(x),* выражающая для каждого *x* вероятность того, что случайная величина *X*примет значение меньше некоторого фиксированного *x*, *называется функцией распределения* случайной величины *X: P(x) = P(X< x)*. Ее также называют *интегральной функцией распределения* дискретных и непрерывных случайных величин.

<u>Пример 4</u>

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Дан ряд распределения случайных величины:

Найти и изобразить график ее функции распределения.

Решение

Будем задавать различные значения x_iи находить для F(x):

1. Если $x \le 1$, F(x) = 0

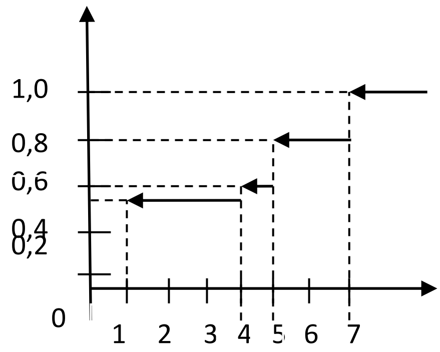
2. Пусть $1< x \leq 4$, (например, x = 2), F(x) = P(x = 1) = 0,4.

3. Пусть $4< x \leq 5$, (например, x = 4,25),

F(x) = P(X < x) = P(x=1) + P(x=4) = 0,5 + 0,4 = 0,5

4. Пусть $5< x \leq 7$, F(x) =(P(x=1)) + P(x=4) + P(x=5) = 0,5 + 0,3 = 0,8.

5. Пусть x>7



Функция распределения дискретной случайности величин

F(x) = (P(x=1) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=7) = 0,8 + 0,2 =1

Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

4. Числовые характеристики дискретной случайной величины

1. *Математическим ожиданием* M(X); дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее значений не соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} xipi$$

<u>Пример 5</u>

Известны значения распределения случайных величин X и Y — число очков выбиваемых первым и вторым стрелками.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Необходимо выявить, какой из двух стрелков стреляет лучше. Построить многоугольники распределения.

Решение:

Очевидно, что из двух стрелков лучше стреляет тот, кто в среднем выбивает большее количество очков.

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 0{,}04 + \ldots + 9 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}2 = 5{,}36$$

$$M(Y) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}05 + \ldots + 9 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}02 = 5{,}36$$

То есть среднее число выбиваемых очков у двух стрелков одинаково.

Пример 6

Случайная величина X задана законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

Решение: $M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3$

2. *Дисперсия* дискретнойслучайности величины. Слово «дисперсия» означает «рассеяние»:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

*Дисперсией D(x)*случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания.

Среднее квадратическое отклонение σ (стандартное отклонение или стандарт) случайной величины X — это арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Пример 7.

В задаче 1 о стрелках вычислить дисперсию числа выбитых очков для каждого стрелка.

Решение:

Очевидно, что лучше стрелял тот стрелок, у которого при равенстве средних значений числа выбитых очков меньше отклонение этого числа относительно среднего значения (дисперсия).

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \ldots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}2 = 13{,}6$$

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \ldots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17$$

Ответ: Дисперсия меньше у второго стрелка.

Пример 8

В задаче 2 вычислить дисперсию.

Решение:

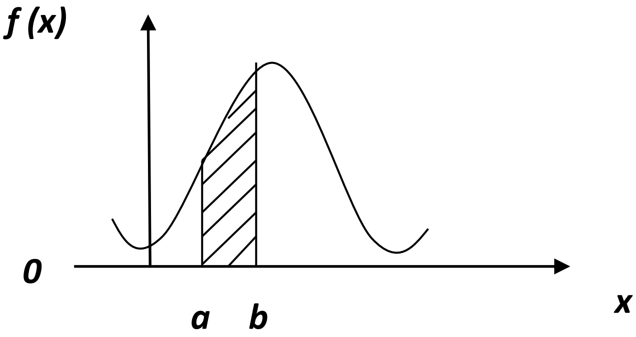
$$D(x) = (1 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + (2 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}5 + (5 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}2 = 2{,}01$$

5. Плотность вероятности непрерывных случайных величин

Плотностью вероятности, или плотностью распределения f(x) непрерывной случайной величины X, называется производная ее функции распределения:

$$f(x) = F'(x)$$

Ее *также называют дифференциальной* функцией распределения.



Свойство плотности вероятности:

1. Неотрицательная функция $f(x) > 0$.

2. Площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

3. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал [a, *b*]равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от *a* до *b*.

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)d$$

Геометрическая интерпретация:

Полученная вероятность равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения и опирающейся наотрезок[a, b].

Непрерывная случайная величина описывается следующими числовыми характеристиками:

1. Математическое ожидание: M(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

2. Дисперсия D(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x)dx$

Или D(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (\mathrm{M(x)})^2$

6.Нормальный закон распределения

Этот закон наиболее часто встречается на практике. Он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения. Нормальное распределение является одним из самых важных распределений в статистике. Обычно всё сравнивают с нормальным законом распределения.

Непрерывная случайная величина *X*имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами μ и σ^2, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{2\sigma^2}}$$

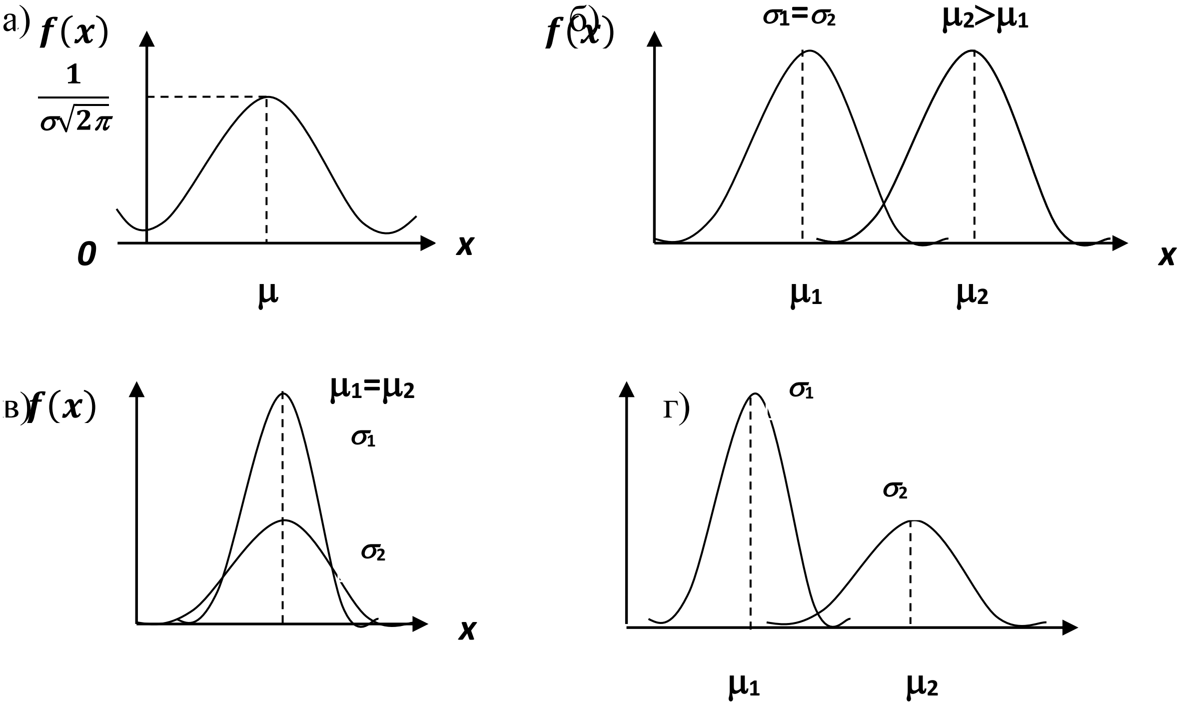
Свойства плотности распределения вероятностей:

- Она колокообразная («колокол Гаусса»), иначе унимодальная.
- Плотность определяется двумя параметрами: математическим ожиданием (μ) и средним квадратическим отклонением (σ).
- Симметричная относительно среднего.
- Среднее и медиана нормального распределения равны.

➢ Кривая сдвигается вправо, если среднее увеличивается при постоянном квадратическом отклонении (рис. б), и сдвигается влево, если среднее уменьшается.

➢ Кривая расширяется, если среднее квадратическоеотклонение а увеличивается (если среднее постоянно).

➢ Кривая становится более остроконечной с меньшей шириной основания колокола, если а уменьшается при среднем постоянном (площадь под графиком всегда равна 1)(рис. в).



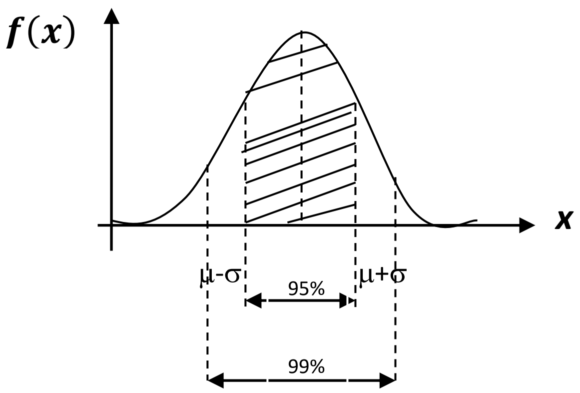
Кривая нормального закона распределения и ее изменения при изменении параметров

Дополнительные свойства:

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина *x* со средним μ и средним квадратическим отклонением σ (стандартное отклонение) находится между (μ - σ) и (μ + σ), равна 0,68, т.е. 68% случайной величины *x* отличается от среднего не более чем на одно стандартное отклонение ± σ.

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина x находится между (μ - 2σ) и (μ + 2σ), равна 0,95, т.е. примерно 95% случайной величины x отличается от среднего на два стандартных отклонения $\pm 2\sigma$.

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина x находится между (μ - 3σ) и (μ+ 3σ), равна 0,99, т.е. 99% (практически достоверно). Это свойство носит название правило трех сигм.



Правило трех сигм

Задание: Выполните действия по ходу работы

1. Дискретная случайная величина Xимеет закон распределения.

x_i	*0,2*	*0,4*	*0,6*	*0,8*	*1*
p_i	*0,1*	*0,2*	*0,4*	P_4	*0,1*

Чему равна вероятность $P_4(X = 0{,}8)$? Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2. Дискретная случайная величина Xимеет закон распределения.

x_i	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
p_i	P_1	*0,15*	P_3	*0,25*	*0,35*

Найти вероятность $P_1(x = 3)$ и $P_3(x = 5)$, если известно, что P_3в 4 раза больше P_1. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Контрольные вопросы:

3. Какая величина называется случайной?

4. Закон распределения случайных величин?

5. Что называется плотностью вероятности?

ПРАКТИЧЕСКАЯРАБОТА № 20

Название практической работы: ***Решение задач на математическое ожидание, дисперсию***

Цель работы: Научиться решать задачи на математическое ожидание и дисперсию

Знания:

Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

умения:

Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики**Теоретическийматериал:**

Математическое ожидание случайной величины XX (обозначается M(X)M(X) или реже E(X)E(X)) характеризует среднее значение случайной величины (дискретной или непрерывной). Мат. ожидание - это первый начальный момент заданной СВ.

Математическое ожидание относят к так называемым *характеристикам положения* распределения (к которым также принадлежат мода и медиана). Эта характеристика описывает некое усредненное положение случайной величины на числовой оси. Скажем, если мат. ожидание случайной величины - срока службы лампы, равно 100 часов, то считается, что значения срока службы сосредоточены (с обеих сторон) от этого значения (с тем или иным разбросом, о котором уже говорит дисперсия).

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Если дискретная случайная величина принимает только значения $x_1, x_2, ..., x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, ..., p_n$. Тогда математическим ожидание определяется равенством:

$$M (X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ...+ x_np_n.$$

Пример 1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, зная закон ее распределения:

X	5	4	3
p	0,2	0,5	0,3

Решение. По формуле (3.1) находим математическое ожидание:

$M (X) = 5*0,2 + 4*0,5 + 3*0,3 = 3,3.$

Если дискретная случайная величина принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

На практике часто приходится оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D (X) = M [X - M (X)]^2.$$

Пример 2

Известны значения распределения случайных величин X и Y — число очков выбиваемых первым и вторым стрелками.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Необходимо выявить, какой из двух стрелков стреляет лучше. Построить многоугольники распределения.

Решение:

Очевидно, что из двух стрелков лучше стреляет тот, кто в среднем выбивает большее количество очков.

$$M(X) = 0 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,10 + 2 \cdot 0,04 + \dots + 9 \cdot 0,12 + 10 \cdot 0,2 = 5,36$$

$$M(Y) = 0 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0,03 \cdot 0,05 + \dots + 9 \cdot 0,04 + 10 \cdot 0,02 = 5,36$$

То есть среднее число выбиваемых очков у двух стрелков одинаково.

Пример 3

Случайная величина X задана законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

Решение: $M(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,2 = 2,3$

*Дисперсией D(x)*случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания.

Среднее квадратическое отклонение σ (стандартное отклонение или стандарт) случайной величины X — это арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Пример 4.

В задаче 1 о стрелках вычислить дисперсию числа выбитых очков для каждого стрелка.

Решение:

Очевидно, что лучше стрелял тот стрелок, у которого при равенстве средних значений числа выбитых очков меньше отклонение этого числа относительно среднего значения (дисперсия).

$$D(X) = (0 – 5,36)^2 \cdot 0,15 + (1 – 5,36)^2 \cdot 0,11 + \ldots + (10 – 5,36)^2 \cdot 0,2 = 13,6$$

$$D(X) = (0 – 5,36)^2 \cdot 0,01 + (1 – 5,36)^2 \cdot 0,03 + \ldots + (10 – 5,36)^2 \cdot 0,02 = 4,17$$

Ответ: Дисперсия меньше у второго стрелка.

Пример 5

В задаче 2 вычислить дисперсию.

Решение:

$$D(x) = (1 – 2,3)^2 \cdot 0,3 + (2 – 2,3)^2 \cdot 0,5 + (5 – 2,3)^2 \cdot 0,2 = 2,01$$

Задание: Выполнить задания по вариантам

Вариант 1

1. Случайная величина X задана законом распределения:

x_i	*2*	*3*	*10*
p_i	*0,1*	*0,4*	*0,5*

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.

2. Найти дисперсию случайной величины *X*, зная закон ее распределения. Построить многоугольник распределения.

x_i	*0,1*	*2*	*10*	*20*
p_i	*0,4*	*0,2*	*0,15*	*0,25*

Вариант2.

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*,

x_i	*3*	*5*	*2*
p_i	*0,1*	*0,6*	*0,3*

зная закон ее распределения.

2. Найти дисперсию случайной величины *X*, которая задана законом распределения.

x_i	*2*	*3*	*5*

p_i	0,1	0,6	0,3

Контрольные вопросы:

1. Что называется математическим ожиданием?
2. По какой формуле вычисляется математическое ожидание?
3. Что такое дисперсия?

Список литературы

1. Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. Учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 2-е изд., стер.-М.: Издательский центр «Академия», 2018. – 368 с

2. Пехлецкий И.Д. Математика [Текст] : учеб.пособие для студ. Учреждений сред. проф. образования /И.Д. Пехлецкий. - 12-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2017 . - 320с.

Интернет-ресурсы:

1. www.ru.Wikipedia.org
2. www.ru.matformula.ru
3. www.reshebnik.ru
4. www.exponenta.ru

Приложение А

Некоторые сведения из элементарной математики

Алгебра

Законы действий над числами

Переместительный закон сложения: $a + b = b + a$.

Сочетательный закон сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Переместительный закон умножения: $ab = ba$.

Сочетательный закон умножения: $(ab)c = a(bc)$.

Распределительный закон умножения относительно сложения: $(a + b)c = ac + bc$.

Распределительный закон умножения относительно вычитания: $(a - b)c = ac - bc$.

Дробные выражения

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},\ b \neq 0,\ c \neq 0.$

Действия с дробями (предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля):

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b},$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Степени и корни

Степень с целым показателем

$a^n = a \cdot a \cdots a$ (n раз, $n \in N,\ n \neq 1$),

$$a^1 = a,\ a^0 = 1 \quad (a \neq 0),\quad a^{-n} = 1/a^n \quad (a \neq 0).$$

Свойства:

$$a^m a^n = a^{m+n},\quad a^m/a^n = a^{m-n},\quad \left(a^m\right)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n,\quad (a/b)^n = a^n/b^n.$$

Корень n-й степени

$\sqrt[n]{a}$ - арифметический корень n-й степени из числа $a,\ \ a \geq 0,$ $\sqrt[n]{a} \geq 0,\ \ n \in N,\ \ n > 1.$

Свойства:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b} \quad (b > 0),\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

В частности, $\sqrt{a}$ - арифметический квадратный корень: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\quad \sqrt{a^2} = |a|$

Степень с дробным (рациональным) показателем

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},\quad m \in Z,\ n \in N,\ n \geq 2,\ a > 0.$$

Свойства степени с действительным показателем

$$(a > 0,\ b > 0,\ x \in R,\ y \in R)$$

$$a^x a^y = a^{x+y},\quad \left(a^x\right)^y = a^{xy},\ (ab)^x = a^x b^x,$$

$$(a/b)^n = a^x/b^x,\quad a^x = b^{x \log_b a},$$

$$a^x = e^{x \ln a} = \exp(x \ln a),\quad a^x = 10^{x \lg a}.$$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия - числовая последовательность (a_n), определяемая условиями: 1) $a_1 = a$; 2) $a_{n+1} = a_n + d$, $n = 1, 2, \dots$ (d - разность арифметической прогрессии).

Свойства арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

Формула n-го члена: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия - числовая последовательность (b_n), определяемая условиями: 1) $b_1 = b \quad (b \neq 0)$; 2) $b_{n+1} = b_n q \quad (q \neq 0)$, *n = 1, 2,* ... ($q$ - знаменатель геометрической прогрессии).

Свойства геометрической прогрессии:

$$b_{n+1}/b_n = b_{n+2}/b_{n+1}, \quad b_{n+1}^2 = b_n b_{n+2}.$$

Формула n-го члена: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Формулы суммы n первых членов $(q \neq 1)$:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$b + bq + bq^2 + \dots = b/(1-q), \quad |q| < 1.$$

Формулы сокращенного умножения

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2),$$
$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4),$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4),$$
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$
$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}),$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$
$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc,$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd,$$
$$(a+b-c-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd,$$
$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2+bx+c,$$

где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c.

Свойства числовых неравенств

1) Если $a<b$, то при любом c: $a+c<b+c$.

2) Если $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$.

3) Если $a<b$ и $c<0$, то $ac>bc$.

4) Если $a<b$, a и b одного знака, то $1/a>1/b$.

5) Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$, $a - d < b - c$.

6) Если $a < b$, $c < d$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то $ac < bd$.

7) Если $a < b$, $a > 0$, $b > 0$, то $a^2 < b^2, \quad a^n < b^n \quad (n \in N)$.

8) Если $|a| < |b|$, то $a^2 < b^2$.

Логарифмы

$\log_a b \quad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0)$ - логарифм числа *b* по основанию *a*.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

$\lg b$ - десятичный логарифм (логарифм по основанию 10): $10^{\lg b} = b$.

$\ln b$ - натуральный логарифм (логарифм по основанию *e*): $e^{\ln b} = b$.

Переход от одного основания к другому:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

В частности, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}, \; \ln b = \frac{\lg b}{\lg e} = \frac{\lg b}{M}$ ($M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343$ - модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным).

Свойства логарифмов (u, $v > 0$):

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a (uv) = \log_a u + \log_a v,$$

$$\log_c \frac{1}{v} = -\log_c v, \quad \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v,$$

$$\log_a u^\alpha = \alpha \log_a u, \quad \log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u, \quad n \in N, \quad n \neq 1.$$

Тригонометрические формулы

Тригонометрические функции

$$\sin \alpha, \quad \cos \alpha,$$

$$tg\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha, \quad \alpha \neq \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$ctg\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\sec\alpha = 1/\cos\alpha, \quad \alpha \neq \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Знаки тригонометрических функций

Четверть	Величина угла	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
I	$0 < \alpha < \pi/2$	+	+	+	+
II	$\pi/2 < \alpha < \pi$	+	–	–	–
III	$\pi < \alpha < 3\pi/2$	–	–	+	+
IV	$3\pi/2 < \alpha < 2\pi$	–	+	–	–

Формулы приведения

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$tg\beta$	$ctg\beta$
$\pi/2+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$3\pi/2+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi/2-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$3\pi/2-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1, \quad \alpha \neq \pi n/2, \quad n \in Z,$$

$$1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha, \quad \alpha \neq \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2\alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Выражение тригонометрических функций через одну из них того же аргумента

(выбор знака перед корнем зависит от того, в какой четверти находится угол α)

Через $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \quad ctg\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Через $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},$$

$$tg\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Через $tg\alpha$:

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha},$$

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Через $ctg\alpha$:

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}.$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta},\ tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

(в последних двух формулах $\alpha\neq\pi/2+\pi n,\quad \beta\neq\pi/2+\pi n$ и соответственно $\alpha+\beta\neq\pi/2+\pi n,\quad \alpha-\beta\neq\pi/2+\pi n,\quad n\in Z$);

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha},\ ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

(в последних двух формулах $\alpha\neq\pi n,\quad \beta\neq\pi n$ и соответственно $\alpha+\beta\neq\pi n,\quad \alpha-\beta\neq\pi n,\quad n\in Z$).

Преобразование суммы тригонометрических функций

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z,$$

$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z,$$

$$ctg\alpha+ctg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\quad n\in Z,$$

$$ctg\alpha-ctg\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\quad n\in Z,$$

$$A\sin x+B\cos x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi_0),$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right].$$

Тригонометрические функции двойного и тройного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}, \quad tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}.$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

(выбор знака зависит от того, в какой четверти находится угол $\alpha/2$)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Выражение тригонометрической функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)}, \quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)},$$
$$tg\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1-tg^2(\alpha/2)}, \quad ctg\alpha = \frac{1-tg^2(\alpha/2)}{2tg(\alpha/2)}.$$

Числовые функции

Основные понятия

Область определения (множество задания) функции *f*: $X \to R$: $X = D(f)$.

Множество значений функции *f*: $E(f) = \{f(x) | x \in X\} = f(X)$

График функции: $\Gamma_f = \{(x,\ y) \in R^2 \mid x \in X,\ y = f(x)\}$

Четная функция: $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = f(x)$

Нечетная функция: $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ и $f(-x) = -f(x)$

Периодическая функция (периода ω): $\forall x \in X \Rightarrow x + \omega \in X,\ x - \omega \in X$ и $f(x + \omega) = f(x)$.

Монотонные функции

Функция *f* строго возрастает (возрастает) на множестве *X*:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Функция *f* возрастает (не убывает) на множестве *X*:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Функция *f* строго убывает (убывает) на множестве *X*:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Функция *f* убывает (не возрастает) на множестве *X*:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

тепенная функция $y = x^{\alpha},\ \alpha \in R$

1. $\alpha = 2n,\ n \in N$:

$$y = x^{2n},\ D(f) = R,\ E(f) = [0,\ +\infty\ [.$$

Функция четная, строго убывает на $]-\infty;\ 0]$ и строго возрастает на $[0;\ +\infty\ [$ (рис. 2.1).

2. $\alpha = 2n - 1,\ n \in N$:

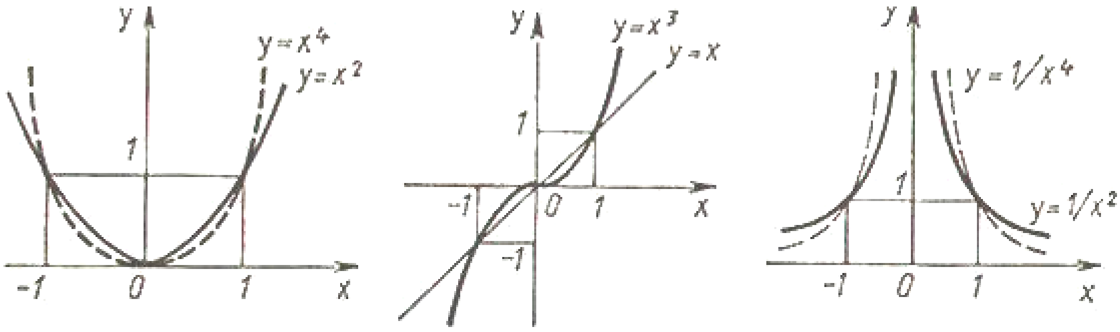
$$y = x^{2n-1},\ D(f) = R,\ E(f) = R.$$

Функция нечетная, строго возрастает (рис. 2.2).

3. $\alpha = -2n,\ n \in N$:

$$y=\frac{1}{x^{2n}},\quad D(f)=R\setminus\{0\},\ \ E(f)=\,]\,0;\ +\infty\,[.$$

Функция четная, строго возрастает на $]-\infty;0[$ и строго убывает на $]0;+\infty[$



4. $\alpha=-2n+1,\ n\in N$:

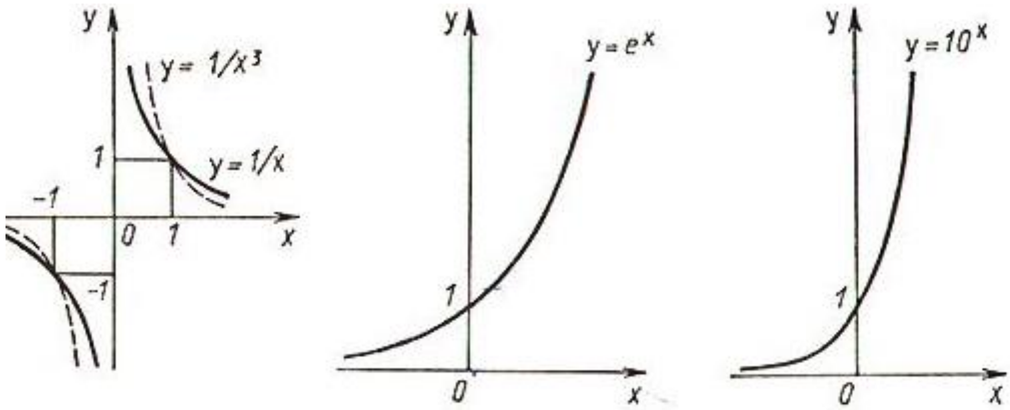
$$y=\frac{1}{x^{2n-1}},\ D(f)=R\setminus\{0\},\ E(f)=R\setminus\{0\}$$

Функция нечетная, строго убывает на $]-\infty;0[$ и $]0;+\infty[$ (рис. 2.4).

5. $\alpha\notin Z$:

$$y=x^{\alpha},\ \ D(f)=\,]\,0;\ +\infty\,[,\ \ E(f)=\,]\,0;\ +\infty\,[.$$

При некоторых α *D(f)* и *E(f)* могут быть шире.



Экспонента

$$y=e^{x}=\exp(x),\ \ D(f)=R,\ \ E(f)=\,]\,0;\ +\infty[.$$

Функция строго возрастает.

Показательная функция (рис. 2.6)

$$y = a^x = e^{x\ln a},\ a > 0,\ a \neq 1;$$
$$D(f) = R,\ E(f) = \left]\,0;\ +\infty\right[.$$

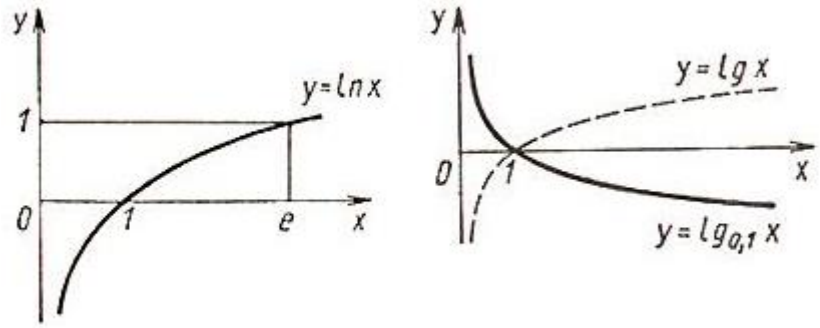
При $0 < a < 1$ функция строго убывает, при $a > 1$ строго возрастает.

Логарифмическая функция

Логарифм натуральный

$$y = \ln x,\ D(f) = \left]\,0;\ +\infty\right[,\ \ E(f) = R.$$

Функция строго возрастает.



Логарифм с основанием *a*

$$y = \log_a x,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,$$
$$D(f) = \left]\,0;\ +\infty\right[,\ \ E(f) = R.$$

При $0 < a < 1$ ф. строго убывает, при $a > 1$ строго возрастает.

Тригонометрические функции

1. $y = \sin x$ (рис. 2.9):

$$D(f) = R,\ E(f) = \left]\,-1;\ 1\,\right[.$$

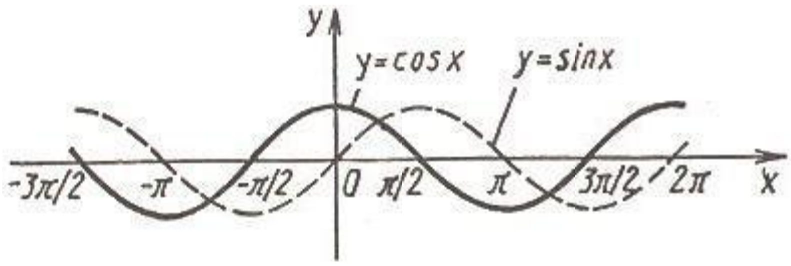


Рис. 2.9

Функция нечетная. Период $\omega = 2\pi.$ На каждом из промежутков $\left[-\pi/2+2\pi k;\ \pi/2+2\pi k\ \right],\ k \in Z,$ ф. строго возрастает, на $\left[\pi/2+2\pi k;\ 3\pi/2+2\pi k\ \right],\ k \in Z,$ строго убывает.

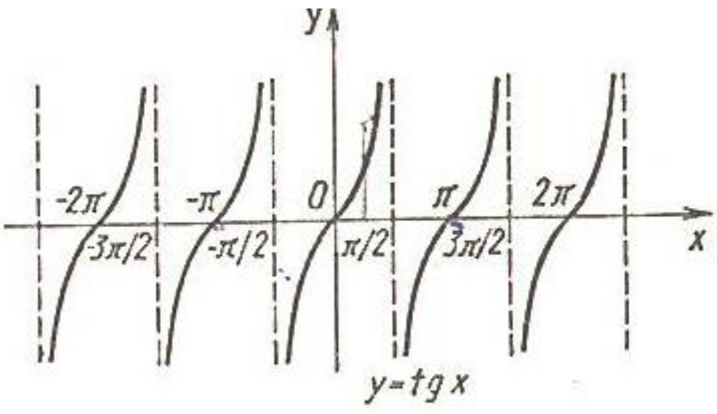
2. $y = \cos x$ (рис. 2.9):

$$D(f) = R,\ E(f) = \left]-1;\ 1\right[.$$

Функция четная. Период $\omega = 2\pi.$ На каждом из промежутков $\left[2\pi k;\ \pi+2\pi k\right],\ k \in Z,$ ф. строго убывает, на $\left[\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k\right],\ k \in Z,$ строго возрастает.

3. $y = tgx$ (рис. 2.10):

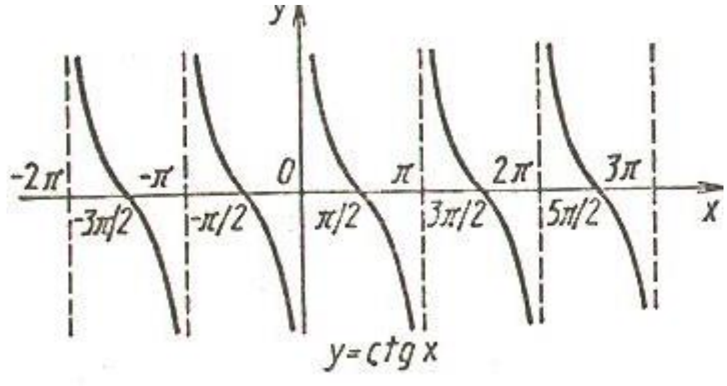
$$D(f) = R \setminus \{\pi/2+\pi k \mid k \in Z\},\quad E(f) = R.$$



Функция нечетная. Период $\omega = \pi.$ Функция строго возрастает на каждом из промежутков $\left]-\pi/2+\pi k;\ \pi/2+\pi k\right[,\ k \in Z.$

4. $y = ctgx$ (рис. 2.11):

$$D(f) = R \setminus \{\pi k \mid k \in Z\},\quad E(f) = R.$$



Функция нечетная. Период $\omega = \pi$. Функция строго убывает на каждом из промежутков $[\pi k;\ \pi + \pi k],\ k \in Z$.

Обратные тригонометрические функции

1. $y = \arcsin x$ (рис. 2.12):

$$D(f) = [-1;\ 1],\quad E(f) = [-\pi/2;\ \pi/2].$$

Функция нечетная, строго возрастает.

$$\arcsin 0 = 0,\quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},\quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},\ \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. $y = \arccos x$ (рис. 2.13):

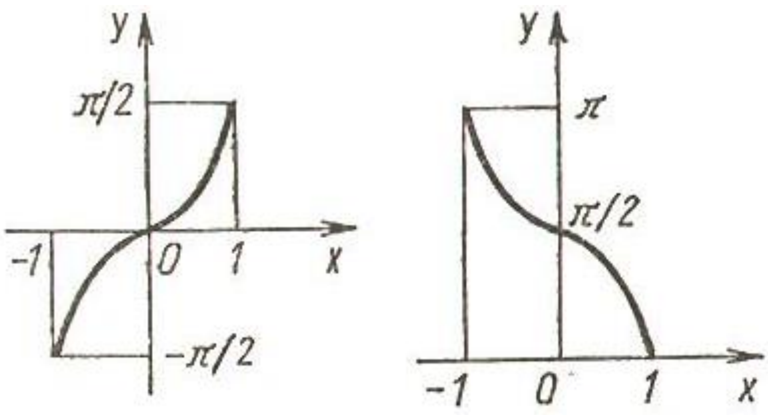
$$D(f) = [-1;\ 1],\quad E(f) = [0,\ \pi]$$

Функция строго убывает

$$\arccos(-1) = \pi,\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6},\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},\quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2},\quad \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},\quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},\quad \arccos 1 = 0.$$



Пределы

Свойства пределов

1. Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\left(\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0\right).$$

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ и $a_n\le b_n\quad \forall n,$ то $a\le b.$

3. Если $a_n\le c_n\le b_n\quad \forall n,$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a.$

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|.$

Некоторые пределы

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, \quad \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{shx}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{chx-1}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{thx}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha, \quad \lim_{x\to +0} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha > 0),$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0), \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0, \quad \lim_{x\to +0} x^x = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1), \quad \lim_{n\to\infty} nq^n = 0 \quad (|q| < 1),$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(n^\alpha/a^n\right) = 0 \quad (|a| > 1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^n/n!\right)^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(\ln n/n) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln^q n/n^\alpha\right) = 0 \quad (\alpha > 0), \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1/\sqrt[n]{n!}\right) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(n/\sqrt[n]{n!}\right) = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_n}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \quad (b_0 \neq 0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 3\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \quad (\textit{формула Валлиса}),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1,$$

Производные и дифференциалы

Определение производной

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Односторонние производные

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$
$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция, дифференцируемая в точке x_0

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+o(\Delta x)$$ при $\Delta x\to 0$

$$A=f'(x_0).$$

Дифференциал

$$dy=f'(x)dx,\quad f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Дифференцирование арифметических комбинаций

(u, v, w - дифференцируемые функции, $\alpha,\ \beta$ - постоянные

$$(\alpha u+\beta v)'=\alpha u'+\beta v',\quad d(\alpha u+\beta v)=\alpha du+\beta dv,$$
$$(uv)'=u'v+uv',\quad d(uv)=udv+vdu,$$
$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw',$$
$$d(uvw)=vwdu+uwdv+vudw,$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq0),\quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},$$
$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}(v\neq0),\quad d\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{dv}{v^2}.$$

Производные основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	a^x	$a^x\ln a$
x	1	$\ln x$	$1/x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$
x^2	$2x$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$	$\sin x$	$\cos x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x\rvert>1$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$1(x)$	$\delta(x)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$		

Производная степенно-показательной функции

$$\left(u^{v}\right)' = \left(e^{v\ln u}\right)' = vu^{v-1}u' + u^{v}\ln u\cdot v'.$$

Производные высших порядков некоторых функций

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
c	0
x^{α}	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\,(0!=1)$
e^{x}	e^{x}
a^{x}	$a^{x}\ln^{n}a$
$\sin x$	$\sin(x+\pi n/2)$
$\cos x$	$\cos(x+\pi n/2)$
$\mathrm{sh}\,x$	$\begin{cases} shx & npu \quad n=2k, \\ chx & npu \quad n=2k-1 \end{cases}$
$\mathrm{ch}\,x$	$\begin{cases} chx & npu \quad n=2k, \\ shx & npu \quad n=2k-1 \end{cases}$
$y=\mathrm{arctg}\,x$	$y^{(n)}=(n-1)!\cos^{n}y\sin n(y+\pi/2)$

Локальный экстремум дифференцируемой функции

Необходимое условие локального экстремума

Если x_0 - точка локального экстремума функции f, то $f'(x_0)=0.$

Достаточные условия локального экстремума

I Правило. Пусть $f'(x_0)=0.$

Если f' при переходе через точку x_0 меняет знак с "+" на "-", то x_0 - точка локального максимума.

Если f' при переходе через точку x_0 меняет знак с "-" на "+", то x_0 - точка локального минимума.

Если f' при переходе через точку x_0 не меняет знака, то точка x_0 не является точкой локального экстремума.

II Правило. Пусть f дважды дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0.$

Если $f''(x_0) < 0,$ то x_0 - точка локального максимума.

Если $f''(x_0) > 0,$ то x_0 - точка локального минимума.

III Правило. Пусть f n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$

Если n - четное и $f^{(n)}(x_0) < 0,$ то x_0 - точка локального максимума.

Если n - четное и $f^{(n)}(x_0) > 0,$ то x_0 - точка локального минимума.

Если n - нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Точки перегиба

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную. Если при переходе через точку x_0 функция f меняет направление выпуклости, то x_0 называют точкой перегиба функции f, а точку (x_0; $f(x_0)$) - точкой перегиба графика функции f. График функции переходит с одной стороны касательной, проведенной в точке (x_0; $f(x_0)$), на другую сторону. Точки перегиба f - точки экстремума для f'.

Необходимые условия наличия перегиба

$f''(x_0)=0$ либо $f''(x_0)$ не существует.

Достаточные условия наличия перегиба

1. Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 - точка перегиба.

2. Если $f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0,$ то при n четном x_0 - точка перегиба, при n нечетном x_0 не является точкой перегиб

Неопределенный интеграл

Первообразная

Первообразной функции f на промежутке I называется функция F, такая, что $F'(x)=f(x)\quad \forall x\in I.$

Неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где F - первообразная функции f (на промежутке); C - произвольная постоянная.

Основные свойства

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x),\quad d\int f(x)dx=f(x)dx.$

2. $\int F'(x)dx=F(x)+C,\quad \int dF(x)=F(x)+C.$

3. Если $\int f(x)dx=F(x)+C,$ то

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,\quad a\neq 0.$$

4. $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx, \quad \alpha^2+\beta^2\neq 0.$

Замена переменных в неопределенном интеграле

1. $\int f(u(x))u'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C=F(u(x))+C.$

2. Если $x=\varphi(t), \ \varphi'(t)\neq 0, \ F$ - первообразная для $(g\circ\varphi)\varphi'$, то

$$\int g(x)dx=\int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C=F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C.$$

Формула интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu,$$

(u, v - дифференцируемые функции).

Простейшие интегралы

$$\int 0\cdot dx=C, \quad \int 1\cdot dx=\int dx=x+C,$$

$$\int xdx=\frac{x^2}{2}+C, \quad \int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C, \quad \int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}+C, \quad \int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq -1,$$

$$\int\frac{dx}{x^\beta}=\frac{1}{-\beta+1}\frac{1}{x^{\beta-1}}+C, \quad \beta\neq 1, \quad \int\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C, \quad a\neq 0,$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C, \quad a\neq 0,$$

$$\int\frac{xdx}{x^2+\alpha}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\alpha\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin\,x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\,\frac{x}{a}+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx+C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx+C,$$

Элементы комбинаторики, формула Ньютона

Перестановки. Размещения. Сочетания.

Число перестановок из *n* элементов:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!.$$

Число размещений из *n* по $m(n \ge m)$:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (0!=1,\ \ 1!=1,)$$

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1), \quad A_n^0 = 1,$$

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m,$$

$$A_n^n = P_n = n!, \quad A_n^{n-1} = A_n^n = n!.$$

Число сочетаний из *n* по $m(n \ge m)$:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}.$$

Свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad 0 \le m \le n, \quad C_n^0 = C_n^n = 1,$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Рекурентная формула для числа сочетаний:

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}, \quad 0 \le m \le n.$$

Формула бинома Ньютона

$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$
$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n, \quad n \in N.$$

Если *k*-й член ((*k+1*)-е слагаемое) разложения степени бинома обозначать через T_k, то

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Треугольник Паскаля

0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

(*n*-я строка состоит из чисел $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$).

Возведение многочлена в степень

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc,$$

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc,$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c +$$

$$+ c^2a + c^2b) + 6abc,$$

$$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3a +$$

$$+ b^3c + c^3a + c^3b) + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) +$$

$$+ 12(a^2bc + b^2ac + c^2ab),$$