Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

по учебной дисциплине

«Математика»

15.02.14 Оснащение средствами автоматизации технологических процессов и производств (по отраслям)

ФП «ПРОФЕССИОНАЛИТЕТ»

г. Челябинск, 2023

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов – это учебная деятельность студента, выполняемая во внеаудиторное время без непосредственного участия преподавателя, но по его заданию и под его руководством, направленная на формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствование и самореализацию.

Целью самостоятельной работы студентов является:

-систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практическое их применение;

-развитие аналитических способностей и логического мышления;

-овладение навыками работы с нормативной и справочной литературой;

-развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

-овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;

Для успешности организации самостоятельной работы необходимы следующие условия:

– мотивация получения знаний и готовность студентов к самостоятельной деятельности;

– наличие и доступность всего необходимого учебно-методического и справочного материала;

– система регулярного контроля качества выполненной самостоятельной работы;

– консультационная помощь преподавателя.

Для внеаудиторной работы студентов по учебной дисциплине «Математика» следующие формы самостоятельной работы:

- самостоятельная работа с учебной литературой и интернет ресурсами;

- заполнение таблиц и составление схем;

- решение расчетных задач;

- подготовка рефератов;

-выполнение презентаций

В результате выполнения самостоятельной работы студент должен сформировать: *элементы следующих компетенций*:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

ОК 10 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

ПК 1.3 Проводить виртуальное тестирование разработанной модели элементов систем автоматизации для оценки функциональности компонентов.

ПК 1.4 Формировать пакет технической документации на разработанную модель элементов систем автоматизации.

ПК 2.3 Проводить испытания модели элементов систем автоматизации в реальных условиях с целью подтверждения работоспособности и возможной оптимизации

ПК 4.3 Организовывать работы по устранению неполадок, отказов оборудования и ремонту систем в рамках своей компетенции

умения:

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- производить действия над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием

элементов комбинаторики;

- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- решать системы линейных уравнений различными методами;

знания:

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- производить действия над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- решать системы линейных уравнений различными методами

Общий объём времени, отведённого на самостоятельную работу составляет 21 час.

Отчеты по внеаудиторной самостоятельной работе выполняются в тетрадях.

Критерии оценивания:

- оценка «отлично» выставляется обучающемуся за работу, выполненную безошибочно, в полном объеме с учетом рациональности выбранных решений;
- оценка «хорошо» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в полном объеме с недочетами;
- оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (не менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы);

- оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся за работу, выполненную в не полном объеме (менее 50% правильно выполненных заданий от общего объема работы).

Тематический план

Номер темы	Название ВСР	Количество часов
1.1.	Выполнение расчетной работы по теме: «Вычисление определителя 2-го и 3-го порядка с использованием свойств определителей»	2
1.2.	Подготовка реферата по теме: « Методы решения систем линейных уравнений с n неизвестными». Выполнить расчётную работу по теме: «Решение СЛАУ различными методами»	3
2.1.	Выполнение расчётной работы по темам: « Раскрытие неопределённостей» «Различные варианты использования первого и второго замечательных пределов для решения профессиональных задач»	2
2.2.	Выполнение расчётных заданий по теме: «Вычисление производных элементарных и сложных функций». Выполнение расчётной работы по теме « Применение производной функции к построению графика» Выполнение расчётно-графических заданий по теме: «Исследование и построение графиков функций»	6
3.1.	Выполнение расчетной работы по теме: «Выполнение операций над комплексными числами».	2
4.1.	Выполнение расчетной работы по теме «Применение комбинаторики для решения профессиональных задач».	3
ИТОГО:		21

РАЗДЕЛ 1 ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1.1 Определители и их свойства

Цель работы: Совершенствование умений выполнять действия над матрицами, вычислять определители разными способами

Краткие теоретические сведения

Сложение матриц

Суммой матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковых размеров называется матрица $C=(c_{ij})$ тех же размеров, у которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \forall \; i,\; j.$ Обозначение: $C = A + B$.

Свойства сложения матриц: $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + 0 = A$, $A + (-A) = 0$, $\forall$ A, B, C.

Вычитание матриц

$$A - B = A + (-B).$$

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число α называется матрица $C=(c_{ij})$ тех же размеров, у которой $c_{ij}=\alpha a_{ij} \quad \forall \; i,\; j.$ Обозначение: $C=\alpha A.$

Свойства $1\cdot A = A,$ $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A,\; \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,\; (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A \quad \forall \; A,\; B$, и $\forall \; \alpha,\; \beta\in R.$

Умножение матриц

Произведением матрицы $A=(a_{ik})$ размером $m\times n$ на матрицу $B=(b_{ik})$ размером $n\times p$ назвается матрица $C = (c_{ij})$ размером $m \times p$, у которой $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \forall\ i,\ j.$ Обозначение: *C* = *AB*.

Свойства *AE = EA = A*, *AO = OA = O*, *(AB)D = A(BD)*, α*(AB) = (*α*A)B = A(*α*B)*, *(A + B)D=AD + BD*, *D(A + B) = DA + DB* (при условии, что указанные операции имеют смысл).

Для квадратных матриц *A* и *B*, вообще говоря, $AB \neq BA.$

Транспонирование матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Свойства: $\left(A^T\right)^T = A,\ (\alpha A)^T = \alpha A^T,\ (A+B)^T = A^T + B^T,$ $(AB)^T = B^T A^T.$

Обратная матрица

Матрица A^{-1} - обратная для матрицы *A*, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E.$

Для квадратной матрицы *A* обратная существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0.$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы *A*.

Элементарные преобразования матрицы

Элементарными преобразованиями матрицы называют:

1) умножение какой-нибудь строки (столбца) на отличное от нуля число;

2) прибавление к какой-нибудь строке (столбцу) другой ее строки (столбца), умноженной на произвольное число;

3) перестановку местами любых двух строк (столбцов).

Вычисление обратной матрицы

Если с помощью элементарных преобразований строк квадратную матрицу *A* можно привести к единичной матрице *E*, то при таких же элементарных преобразованиях над матрицей *E* получим A^{-1}.

Пример.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}.$$

$$(A\setminus E)=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ -2 & 4 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 1\end{array}\right] \to$$

Ко второй строке прибавляем первую, умноженную на 2.

Вторую строку умножаем на –1/2.

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1/2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & -3/2\\ 0 & 1 & -1 & -1/2\end{array}\right] \Rightarrow$$

К первой строке прибавляем вторую, умноженную на 3.

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -3/2\\ -1 & -1/2\end{bmatrix}.$$

Определители

В частности *n = 2*

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=(-1)^{I(1,2)}a_{11}a_{22}+(-1)^{I(2,1)}a_{12}a_{21}=$$

$$=(-1)^0 a_{11}a_{22}+(-1)^1 a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

при *n = 3*

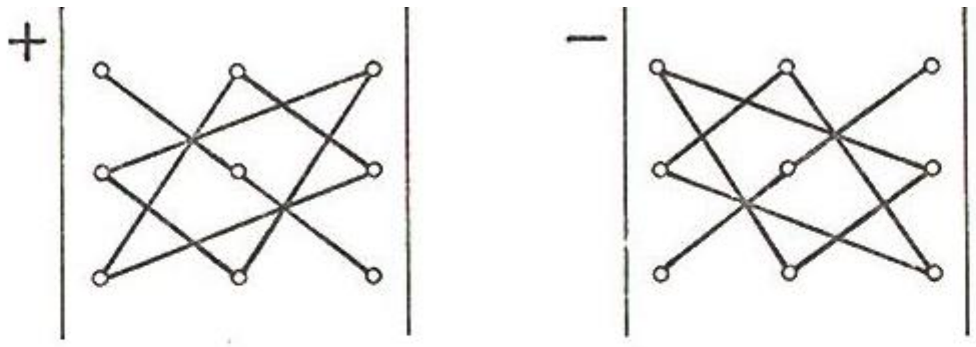
$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{I(1,2,3)}a_{11}a_{22}a_{33}+$$

$$+(-1)^{I(2,3,1)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{I(3,1,2)}a_{13}a_{21}a_{32}+$$

$$+(-1)^{I(1,3,2)}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{I(3,2,1)}a_{13}a_{22}a_{31}+$$

$$+(-1)^{I(1,2,3)}a_{11}a_{22}a_{33}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$



Задание для самостоятельной работы

Вычислите определители 3-го порядка с использованием свойств определителей

1.1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ 1. 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ 1.3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 1.4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

Вопросы для самопроверки

1. По какой формуле вычисляется определитель второго порядка?
2. По какой формуле вычисляется определитель третьего порядка?

Тема 1.2 Системы линейных алгебраических уравнений

Цель работы: Совершенствование умений решать системы уравнений.

Задание:1. Подготовка реферата по теме: « Методы решения систем линейных уравнений с n неизвестными».

Методические рекомендации по выполнению реферата представлены в приложении А

Задание 2: Применить метод Крамера для решения систем линейных уравнений.

Ход работы

1) Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения:

Если обозначить

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

то получаем формулы для нахождения неизвестных переменных по методу Крамера $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

1. Вычисляем определитель основной матрицы системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и убеждаемся, что он отличен от нуля.

2. Находим определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

которые являются определителями матриц, полученных из матрицы A заменой *k-ого* столбца ($k = 1, 2, \dots, n$) на столбец свободных членов.

3. Вычисляем искомые неизвестные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ по формулам $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.
4. Выполняем проверку результатов, подставляя $x_1, x_2, \dots, x_n$ в исходную СЛАУ. Все уравнения системы должны обратиться в тождества. Можно также вычислить произведение матриц $A \cdot X$, если в результате получилась матрица, равная B, то решение системы найдено верно. В противном случае в ходе решения была допущена ошибка.

2) Решите систему уравнений методом Крамера.

1) $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3y+z=8 \\ 5x-y-z=10 \\ x+3y+4z=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 5x+y-2z=-1 \\ x-y+z=3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+2y+4z=11 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x-y+2z=13 \\ 2x+y-z=0 \\ 5x+3y+7z=28 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-y+2z=10 \\ 7x+z=22 \\ -x+3y+2z=2 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x+3y-z=3 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+2y+5z=10 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x-y+4z=7 \\ 7x+3y-z=3 \\ 5x-2y-3z=4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 3x-y+2z=12 \\ 4x+3y-3z=9 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 4x+4y-3z=-7 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+3y-z=-2 \end{cases}$

Вопросы для самопроверки

1. В чём заключается метод Крамера?

РАЗДЕЛ 2Основы интегрального и дифференциального исчисления

Тема 2.1 Действительные числа. Множества

Цель работы: Совершенствование умений вычислять погрешности приближённых вычислений

Задание: Вычислите погрешности приближённых вычислений

Ход работы

1). Повторите пройденный на уроке учебный материал по учебнику и прочитайте ниже следующие краткие теоретические сведения

Краткие теоретические сведения

Погрешности

Разница между точным числом x и его приближенным значением a называется погрешностью данного приближенного числа. Если известно, что | x - a | $<\Delta_a$, то величинаΔ_aназывается предельной абсолютной погрешностью приближенной величины a.

Отношение $\frac{\Delta_a}{a} = \delta_a$называется предельной относительной погрешностью; последнюю часто выражают в процентах.

Пример:

3,14 является приближенным значением числа p, погрешность его равна 0,00159..., предельную абсолютную погрешность можно считать равной 0,0016, а предельную относительную погрешность v равной 0.0016/3.14 = 0,00051 = 0,051%. Для краткости обычно слово ?предельная¦ опускается.

Действия над приближенными числами

Результат действий над приближёнными числами представляет собой также приближённое число. Погрешность результата может быть выражена через погрешности первоначальных данных при помощи следующих теорем:

1. Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

2. Относительная погрешность суммы заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.

3. Относительная погрешность произведения или частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей или, соответственно, делимого и делителя.

4. Относительная погрешность n-ой степени приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания (как у целых, так и для дробных n).

Пользуясь этими теоремами, можно определить погрешность результата любой комбинации арифметических действий над приближенными числами.

Предельная абсолютная погрешность заведомо превосходит абсолютную величину истинной погрешности, поскольку предельное значение вычисляется в предположения, что различные погрешности усиливают друг друга; практически это бывает редко. При массовых вычислениях, когда не учитывают погрешность каждого отдельного результата, пользуются следующими правилами подсчета цифр.

При соблюдении этих правил можно считать, что в среднем полученные результаты будут иметь все знаки верными, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц последнего знака.

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.

3. При возведении в квадрат или куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число (последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания).

4. При увеличении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое значение подкоренного числа (последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа).

Во всех промежуточных результатах следует сохранять одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта ?запасная¦ цифра отбрасывается.

Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.

Пользуясь этими теоремами, можно определить погрешность результата любой комбинации арифметических действий над приближенными числами.

Примеры:

V = r2h

Dv = Vd v = V(2d r+d n)

Предельная абсолютная погрешность заведомо превосходит абсолютную величину истинной погрешности, поскольку предельное значение вычисляется в предположения, что различные погрешности усиливают друг друга; практически это бывает редко. При массовых вычислениях, когда не учитывают погрешность каждого отдельного результата, пользуются следующими правилами подсчета цифр. При соблюдении этих правил можно считать, что в среднем полученные результаты будут иметь все знаки верными, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц последнего знака.

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном, данном с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.

3. При возведении в квадрат или куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число (последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания).

4. При увеличении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое значение подкоренного числа (последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа).

5. Во всех промежуточных результатах следует сохранять одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта запасная цифра отбрасывается.

6. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя, лишь одну лишнюю цифру.

Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с К цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое даёт согласно правилам 1-4(К+1) цифру в результате.

2) Оцените абсолютную погрешность приближенного значения следующих чисел:

a) 5,56 с точностью до десятых
b) 125,9 с точностью до целых

3). Оцените относительную погрешность приближенного значения следующих чисел:

a) 0,145 с точностью до сотых
b) 2465,9 с точностью до целых

4). Оцените абсолютную и относительную погрешность приближенного значения следующих чисел:

a) 0,145 с точностью до сотых
b) 2465,9 с точностью до целых

5). Найдите сумму и разность приближенных значений:

a) A=45,651, B=13,12
b) A=48,4, B=20,47

6). Найдите сумму, разность, произведение и частное приближенных значений:

a) A=7,41, B=5,146
b) A=78,1, B=45,458

1. Вычислить , если известно, что а = 7,15; в = 1,651; с= 3,3.

Вопросы для самопроверки

1. Какие бывают погрешности?
2. Что такое абсолютная погрешность?
3. Что такое относительная погрешность?
4. Как найти приближенной значение суммы приближенных значений?
5. Как найти приближенной значение разности приближенных значений?
6. Как найти приближенной значение произведения приближенных значений?
7. Как найти приближенной значение частного приближенных значений?

Тема 2.2. Теория пределов и непрерывность функции

Цель работы: Отработка навыков вычисления 1-го и 2-го замечательных пределов

Краткие теоретические сведения

<u>Определение.</u> Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для всех значений x, достаточно близких к x_0 и отличных от x_0, значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа b. Пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$

.

<u>Свойства пределов</u>. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Тогда:

1. Предел константы равен самой константе: $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

2. Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$.

3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$.

4. Постоянный множитель выносится за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot a$.

5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, если $g(x) \neq 0$.

6. Показатель степени можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)^n = a^n$.

Задания для самостоятельной работы: Раскройте неопределённости:

Вариант 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg^2 x}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x - 1}{4x + 3} \right)^{2x}.$$

Вариант 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{x^2}; \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{6x - 5}{6x - 1} \right)^{2x}.$$

Вариант 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\cdot tg2x};\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{7x}.$$

Вариант 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x};\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{6x}.$$

Вариант 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x+\sin 3x}{x\cdot\sin x};\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x+1}\right)^{2x}.$$

Вариант 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2};\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-1}{7x+5}\right)^{4x}.$$

Вариант 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\cdot\sin 2x};\qquad \lim_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}.$$

Вариант 8

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot tg3x};\qquad \lim_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}.$$

Вариант 9

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x};\qquad \lim_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}.$$

Вопросы для самопроверки

2. Что называется функцией одной независимой переменной?
3. Перечислить основные элементарные функции.
4. Что такое предел функции y = f(x) при x→ a?
5. Дайте определение правого и левого пределов функции y = f(x)

6. Дайте определение предела последовательности.
7. Какая функция называется бесконечно большой величиной при x→ a и x→ +∞?
8. Какова связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
9. По какой формуле вычисляется первый замечательный предел?
10. По какой формуле вычисляется второй замечательный предел?

Тема 2.3. Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной

Цель работы: Отработка навыков вычисления производной функций и практического применения производной.

Краткие теоретические сведения

Формулы дифференцирования		Правила дифференцирования	Применение производной
$c'=0$ $x'=1$ $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$ $(kx)'=k$ $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ $\left(e^x\right)'=e^x$ $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$(u+v)'=u'+v'$ $(uv)'=u'v+v'u$ $(cu)'=cu'$ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, $v\neq 0$ $[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$	$f'(x)=tg\alpha=k$ $v(t)=S'(t)$ $a(t)=v'(t)$ Уравнение касательной: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $f(x)$ возрастает на I, если $f'(x)>0$ на I. $f(x)$ убывает на I, если $f'(x)<0$ на I. Выпуклость графика функции и его перегибы:

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$			$y'' > 0$, выпуклость вниз y'' _> 0, выпуклость вверх

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1: Вычислите производные сложных и элементарных функций

Ход работы

Задание 1.1. Вычислить производные следующих функций:

1)$y = 2x^2 – 3x + 5$; 2)$y = 4 – x^4$; 3)$y = x^4 – x^2$; 4)$y = 5x^4 – 7x^2 + x – 3$; 5)$y = x^4 + 4x^3 – 8x^2 + 9x – 5$; 6) $y=\frac{2x^3}{3}-3x^2+6x-1$; 7) $y=\frac{3x^6}{2}+4x^5-2x^3-\frac{1}{2x}$; 8) $y=2-\frac{x}{2}-5x^2-\frac{3}{x^2}$;

9) $y=(2x-3)(3x^4+5x-8)$; 10) $y=3x^{-2}$; 11) $y=4x^{-3}$; 12) $y=3x^{-\frac{2}{3}}$; 13) $y=5x^{-\frac{3}{5}}$;

14) Найти $f'(-1)$, *если* $f(x)=4x^3-2x^2+x-5$;

15) Найти $f'(0{,}5)$, *если* $f(x)=-x^3+9x^2-x+2$;

Задание 1.2.Вычислите производные сложных функций:

1) $y=3\sin 5x$; 2) $y=4\cos\frac{x}{2}$; 3) $y=\arccos 3x$; 4) $y=\ln\sqrt{2x-1}$;

5) $y=(x^4-x-1)^4$; 6). $y=\sqrt{x^3+2x-5}$; 7) $y=\cos^2 x$; 8) $y=\sin^3 x$; 9) $y=\ln\sin 3x$;

10) $y=\ln\sqrt{2x-1}$; 11) $y=3^{\sin x}-2^{2x}+e^{5x}$; 12) $y=3^{\sqrt{x}}-4^{7x}+3e^{2x}$;

Задание 1.3. Вычислите производные показательно-степенных функций:

1) $y=x^x$; 2) $y=x^{x^x}$; 3) $y=x^{\frac{1}{x}}$; 4) $y=x^{\ln x}$; 5) $y=x^{tgx}$; 6) $y=(arctgx)^{\ln x}$;

7) $y=(arctgx)^x$; 8) $y=(x+x^2)^x$.

Задание 1.4. Выполните действия на геометрический и физический смысл производной.

1) Составьте уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 0$; в) $x_0 = 1$.

2) Дана кривая $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$. Составьте уравнение касательной в точке, абсцисса которой равна а) −1; б) 0; в) 1.

3) В какой точке касательная к кривой $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ параллельна прямой а) $2x + 2y - 5 = 0$; б) y – 3x -5 =0; в) y + x =0?

Задание 2.Проведите исследование функций и постройте их графики:

1) $y = 8 - 2x - x^2$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 3) $y = 3 - 3x + x^3$; 4) $y = x^4 + 2x^3 - 5x^2$; 5) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 6) $y = x\sqrt{2 - x}$; 7) $y = \ln(x^2 + 1)$;

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение производной функции y =f(x).
2. Каковы геометрический и механический смыслы производной?
3. Как найти производную сложной функции?
4. Дать определение дифференциала функции y =f(x).
5. Какой геометрический смысл имеет дифференциал?
6. Что называется производной второго порядка от функции y =f(x)?
7. В чём состоит достаточный признак экстремума?
8. Какие точки называются точками перегиба функции y =f(x)?
9. Сформулировать правило Лопиталя и привести примеры его применения.
10. Что называется асимптотой функции y =f(x)?
11. Что называется функцией двух независимых переменных?
12. Что называется графиком функции двух независимыхпеременных?

Тема 2.4. Интегральное исчисление функции одной независимой переменной

Цель работы: Отработка навыков вычисления первообразной функций и практического применения интеграла.

Теоретический материал

I.Основные формулы интегрирования

$\int dx = x + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$

$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

$\int e^x dx = e^x + C;$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

$\int e^x dx = e^x + C;$

$\int \sin x dx = -\cos x + C;$

$\int \cos x dx = \sin x + C;$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

II. Основные свойства интегралов

1^0. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2^0. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3^0. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций: $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

4^0. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

5^0. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной C: $\int df(x) = f(x) + C.$

6^0. Интеграл от сложной функции с линейным аргументом вычисляется по формуле:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

III. Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенных интегралов:
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование. Используется таблица интегралов, свойства неопределённых интегралов и различные преобразования подынтегрального выражения.

2. Интегрирование по частям. Данный способ состоит в том, подынтегральное выражение представляется в виде произведения двух множителей u и dv и заменяется двумя интегрированиями: 1) отыскание v из выражения для dv; 2) отыскание интеграла для vdu:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

3. Метод замены переменной. Его применяют в том случае, если исходный интеграл сложно или невозможно с помощью алгебраических и иных преобразований свести к одному или нескольким табличным интегралам. Способ заключается в том, что заменяется новой переменной такая часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя).

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1: Вычислите неопределённые интегралы

1.1.Вычислите интеграл используя основные формулы интегрирования.

1. $\int x^6 dx$; 2. $\int \frac{dx}{x^2}$; 3. $\int x^{\frac{2}{3}} dx$; 4. $\int \sqrt{x} dx$; 5. $\int (5x^3 - 2x^2 + 3x - 8) dx$; 6. $\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3) dx$;

7. $\int (2x-1)^3 dx$; 8. $\int x^3 (1+5x) dx$; 9. $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x} dx$; 10. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx$; 11. $\int \frac{4x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2} dx$;

1.2. Вычислите интеграл методом подстановки.

1. $\int (7-2t)^3 dt$; 2. $\int (5u-1)^3 du$; 3. $\int (1+x^5)^7 x^4 dx$; 4. $\int (9-2x^3)^4 x^2 dx$; 5. $\int 4(x^4+5)^2 x^3 dx$;

1.3. Вычислите интегралы, используя метод интегрирования по частям.

1. $\int x \cos x dx$; 2. $\int x e^x dx$; 3. $\int x^5 \ln x dx$; 4. $\int x e^{2x} dx$; 71. $\int x \ln x dx$;

1.4. Вычисление определенных интегралов.

1. $\int_{3}^{5} dx$; 2. $\int_{0}^{1} xdx$; 3. $\int_{0}^{2} 3x^2dx$; 4. $\int_{-1}^{1} (2x+1)dx$; 5.92. $\int_{0}^{2} 3e^{3x}dx$; 93. $\int_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx$; 94.

Задание 2: Примените формулу Ньютона-Лейбница для вычисления площадей фигур.

Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:
1. Осью Ох, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$;
2. $y^2 = 9x$, $x = 16$, $x = 25$, $y = 0$;
3. $y = -x^2 + 4$ и $y = 0$; 4. $y = x^2$, $y = 1/x$, $x \in [1; e]$; 5. $y^2 = x$, $y = x^2$;
6. $y = 8+2x-x^2$, $y = x+6$;
7. $xy = 6$ и $x + y – 7 = 0$; 8. $x – 2y + 4 = 0$, $x + y – 5 = 0$, $y = 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется первообразной?
2. В чём состоит суть метода интегрирования по частям?
3. В чём состоит суть метода замены переменной?

Тема 2.5. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Цель работы: Усовершенствование навыков решения простейших дифференциальных уравнений, нахождение общих и частных решений.

Краткие теоретические сведения

Дифференциальными называются уравнения, которые содержат искомую фукнцию, её производные и (или) дифференциалы различных порядков, независимые переменные.

Решить дифференциальное уравнение – это значит найти такую функцию, подстановка которой в это дифференциальное уравнение превращает его в тождество.

Решения, содержащие конкретные значения постоянных, называются частными решениями дифференциального уравнения.

1. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным* относительно переменных x и y, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т.е. $f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$. данное уравнение с помощью замены $y = x \cdot u$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

2. Уравнение $y' + P(x)dy = Q(x)$ называется *линейным дифференциальным уравнением.* Общее решение уравнения находим по формуле

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx}\cdot dx + C\right).$$

3. Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

где p и q – постоянные числа называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка*. Квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется характеристическим уравнением.

Если корни $k_1,\ k_2$ характеристического уравнения действительны и различны, то общий интеграл уравнения (1) выражается формулой

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Если $k_1 = k_2$, то общий интеграл уравнения (1) находится по формуле

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то общее решение уравнения (1) находится по формуле

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

<u>Пример 1</u>

Найти частное решение однородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию y=-9, при x=1.

Решение:

Приведем уравнение к виду $\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{y}{x}$.

Полученное уравнение является функцией только $\frac{y}{x}$, следовательно, оно однородное.

Для решения положим y=ux и продифференцируем по x:

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{xdu}{dx}$$

Заменим $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{y}{x} = u$ в исходном уравнении:

u+x$\frac{du}{dx}$ = 2 - u.

Разделяем переменные: $2dx - 2udx = xdu$;

$2(1-u)dx = xdu;$ $\frac{2dx}{x} = \frac{du}{1-u}.$

Проинтегрируем: $2\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{1-u};$

$21n|x| + 1n|C| = -1n|1-u|;$

Общее решение уравнения:

$u = \frac{y}{x}$; $y = \frac{x(x^2-C)}{x^2}$ или $x^2 - xy = C.$

Частное решение: $1 + 9 = C; C = 10$. Ответ: $x^2 - xy = 10.$

Задания для самостоятельной работы: Решите простейшие дифференциальные уравнения

Вариант 1

1. найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $xy' = y \ln \frac{y}{x}.$

2. найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $\left(1-x^2\right) \cdot y'' - xy = 2.$

3. найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3; \qquad y(0) = \frac{4}{3}, \qquad y'(0) = \frac{1}{27}.$$

Вариант 2

1. найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $xy' - 2y + x^2 = 0.$

2. найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$

3. найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$$y'' - y = 9x \cdot e^{2x}; \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = -5.$$

Вариант 3

1. найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $x^2 y' = 2xy + 3.$

2. найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего

понижение порядка $y''+y' tg\, x = \sin 2x.$

3. найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$$y''-2y'+5y = 5x^2 - 4x + 2; \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 2.$$

Вариант 4

1. найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $xy'-2y = 2x^4.$

2. найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $y'' x \ln x = y'.$

3. найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$$y''-3y'+2y = (3-4x)\cdot e^{2x}; \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Вариант 5

1. найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $x^2 y'+xy+1 = 0.$

2. найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $xy'' = y'.$

3. найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$$y''-4y'+20y = 16x \cdot e^{2x}; \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2.$$

Вариант 6

1. найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}.$

2. найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $y'' = y'+x.$

3. найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$$y''-y = (14-16x)\cdot e^{-x}; \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = -1.$$

Вариант 7

1. найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $x^2 y' = 2xy + 3.$

2. найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $y'' tg\, x = y'+1.$

3. найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$$y''+5y'+6y = 52 \sin 2x; \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = -2.$$

Вариант 8

1. найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $xy' - 2y = 2x^4$.

2. найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $xy'' - y' = x^2 \cdot e^x$.

3. найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$y'' - 4y = 8 \cdot e^{2x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$.

Вариант 9

1. найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

2. найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $2yy'' = 1 + (y')^2$.

3. найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

Вариант 10

1. найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $xy' - 2y + x^2 = 0$.

2. найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка $y''(1 + y) = 5(y')^2$.

3. найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Вопросы для самоконтроля

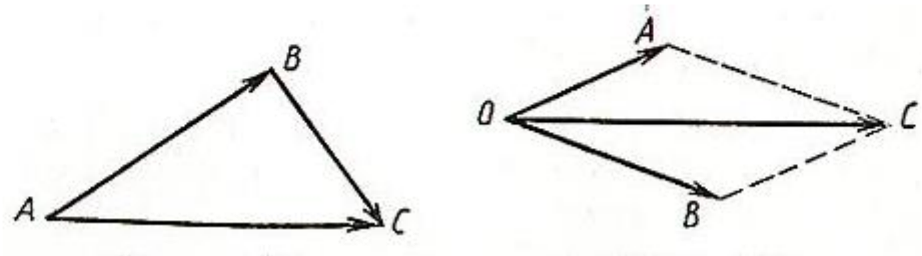
1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка?
2. Что такое общее решение дифференциального уравнения первого порядка?
3. Что такое частное решение и в чём суть начальных условий для дифференциального уравнения первого порядка?
4. Что такое дифференциальное уравнение второго порядка?
5. Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются линейными, каков метод их решения?

РАЗДЕЛ 3. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Тема 3.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Цель работы: Совершенствование умений выполнять операции над векторами

Краткие теоретические сведения:



Сумма векторов:

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (правило треугольника)

$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$ (правило параллелограмма)

$\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{AA_n}$ (правило многоугольника);

$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OS}$ (правило параллелепипеда, $[OS]$ - диагональ).

Разность векторов: $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$.

Формула вычитания векторов: $\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AB}$

Признак коллинеарности векторов: $\overline{a} = a\overline{b}\left(\overline{b} \neq \overline{0}\right)$.

Скалярное произведение векторов $x_1, \ y_1, \ z_1$ и $\overline{b}$: $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi,$

Скалярное произведение в координатах

Если $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}, \ \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k},$ то $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$ $\overline{a}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$

Векторное произведение

Векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ - вектор, обозначаемый $\left[\overline{a}\overline{b}\right], \ \left[\overline{a}\overline{b}\right]$ или $\overline{a} \times \overline{b},$ для когорого:

1) $\left|\left[\overline{a}\overline{b}\right]\right| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$ (φ - угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$);

2) $\left[\overline{a}\overline{b}\right] \perp \overline{a}, \ \left[\overline{a}\overline{b}\right] \perp \overline{b};$

3) тройка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\left[\overline{a}\overline{b}\right]$ - правая.

Смешанное произведение в координатах

Если $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k},\ \bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k},\ \bar{c} = x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k},$ то

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + z_1x_2y_3 + y_1z_2x_3 - z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3.$$

Задания для самостоятельной работы: Выполните операции над векторами, их координаты

1. Даны координаты трех векторов в прямоугольной системе координат $\vec{a} = (1, -1, 3),\quad \vec{b} = (-2, 2, 1),\quad \vec{d} = (3, -2, 5)$. Найдите смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$.
2. В правой прямоугольной декартовой системе координат заданы три взаимно перпендикулярных вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d}$, образующих правую тройку, их длины равны соответственно *4*, *2* и *3*. Найдите их смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$.
3. Даны векторы ***A*** = {2; -1; 1}, ***B*** = {3; 3; 4} и ***C*** = {2; 0; 2}. Найти координаты вектора ***D***, если известно, что он перпендикулярен векторам ***A*** и ***B***, а скалярное произведение ***Dc*** = -8.

Указание

Векторное произведение [***A***, ***B***] перпендикулярно обоим сомножителям, То есть [***A***, ***B***] перпендикулярен ***A*** и ***B***.

4. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках *A*(2; 2; 2), *B*(3; 1; 5), *C*(0; 4; 3), *D*(5; 0; 7).

Указание

Модуль смешанного произведения векторов *AB*, *AC*, *AD* равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на смежных ребрах.

Вопросы для самопроверки

1. Какие операции можно производить над векторами?
2. Какие вектора называются коллинеарными?
3. Признаки коллинеарных векторов
4. Векторное произведение

5. Формула смешанного произведения векторов

Тема 3.2. Прямая на плоскости и в пространстве

Цель работы: Совершенствование умений составляться уравнения прямой на плоскости и в пространстве

Краткие теоретические сведения:

Окружностью (рис.1) называется геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки O, называемой ***центром окружности***, на расстояние R . Число $R > 0$ называется ***радиусом окружности***.

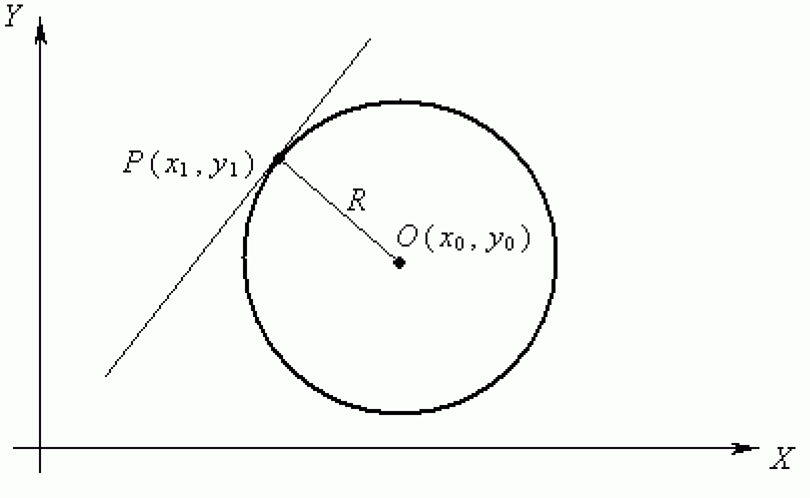


Рис.1

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O\,(x_0,\ y_0)$ имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$

Если *центр окружности совпадает с началом координат*, то уравнение окружности упрощается:

$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

Пусть $P\,(x_1,\ y_1)$ – точка окружности (рис.1), тогда ***уравнение касательной к окружности*** в данной точке имеет вид:

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = R^2 .$$

Условие касания прямой $y = m\,x + k$ ***и окружности*** $x^2 + y^2 = R^2$:

$$k^2 / (1 + m^2) = R^2 .$$

Эллипсом (рис.2) называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых ***фокусами*** эллипса, есть величина постоянная.

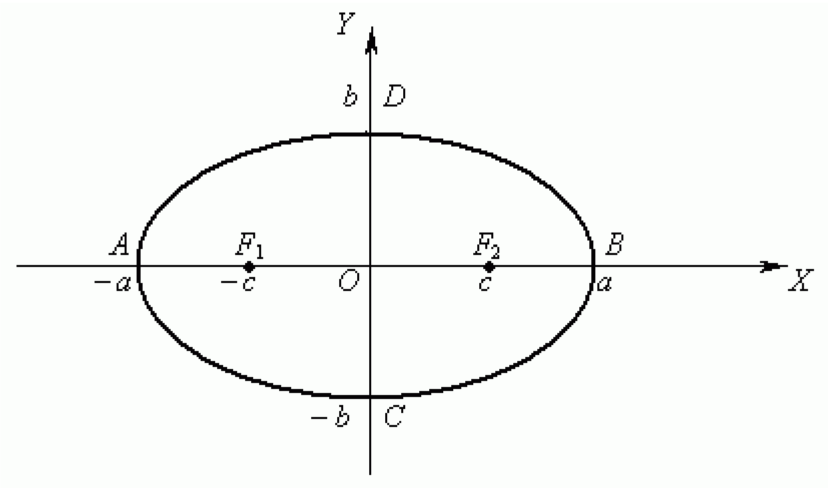


рис.2

Уравнение эллипса (рис.2) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Здесь начало координат является центром симметрии эллипса, а оси координат – его осями симметрии. При $a > b$ фокусы эллипса лежат на оси OX (рис.2) , при $a < b$ фокусы эллипса лежат на оси OY , а при $a = b$ эллипс становится окружностью (фокусы эллипса в этом случае совпадают с центром окружности). Таким образом, *окружность есть частный случай эллипса*.

Отрезок $F_1F_2 = 2c$, где $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$, называется ***фокусным расстоянием***. Отрезок $AB = 2a$ называется ***большой осью эллипса***, а отрезок $CD = 2b$ – ***малой осью эллипса***. Число $e = c / a$, $e < 1$ называется ***эксцентриситетом эллипса***.

Гиперболой (рис.3) называется геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 , называемых ***фокусами*** гиперболы, есть величина постоянная.

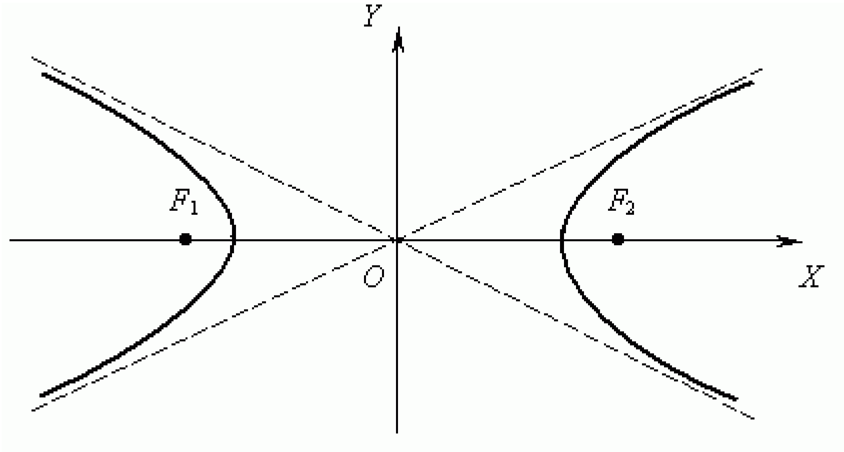


рис.3

Уравнение гиперболы (рис.3) :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Здесь начало координат является центром симметрии гиперболы, а оси координат – её осями симметрии.

Отрезок $F_1F_2 = 2c$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называется ***фокусным расстоянием***. Отрезок $AB = 2a$ называется ***действительной осью гиперболы***, а отрезок $CD = 2b$ – ***мнимой осью гиперболы***. Число $e = c / a$, $e > 1$ называется ***эксцентриситетом гиперболы***.

Прямые $y = \pm (b / a)x$ называются ***асимптотами гиперболы***.

Пусть $P(x_1, y_1)$ – точка гиперболы, тогда ***уравнение касательной к гиперболе*** в данной точке имеет вид:

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Условие касания прямой $y = mx + k$ ***и гиперболы*** $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$:

$$k^2 = m^2 a^2 - b^2 .$$

Пусть $P(x_1, y_1)$ – точка эллипса, тогда ***уравнение касательной к эллипсу*** в данной точке имеет вид:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Условие касания прямой $y = mx + k$ ***и эллипса*** $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$:

$$k^2 = m^2 a^2 + b^2 .$$

Задания для самостоятельной работы: Составьте уравнение прямой

Задание: Составьте уравнение прямой

Ход работы

1. Написать уравнение окружности с центром в точке C(2, -3) и радиусом, равным 6.
2. Показать, что x2 + y2 + 4x - 6y - 3 = 0 есть уравнение окружности. Найти ее центр и радиус.
3. Найти координаты центра и радиус окружности x2 + y2 - x + 2y - 1 = 0.
4. Дана окружность x2 + y2 = 4. Составить уравнение прямой l, параллельной оси абсцисс и пересекающей окружность в таких точках M и N, что MN = 1.
5. Найти длину хорды, образующейся при пересечении прямой x + y - 5 = 0 и окружности (x + 1)2 + (y + 2)2 = 40.
6. Составить простейшее уравнение гиперболы, если расстояние между ее вершинами равно 20, а расстояние между фокусами 30.
7. Действительная полуось гиперболы равна 5, эксцентриситет e = 1,4. Найти уравнение гиперболы.
8. Гипербола проходит через точки и . Найти уравнение гиперболы.

Вопросы для самопроверки

1. Какой вид имеет уравнение окружности?
2. Какой вид имеет уравнение эллипса?
3. Какой вид имеет уравнение гиперболы?

РАЗДЕЛ 4 Основы дискретной математики

Тема 4.1. Основные понятия математического синтеза и анализа

Цель работы: Совершенствование умений проводить полный анализ функции

Краткие теоретические сведения:

Математическая статистика — раздел математики, разрабатывающий методы регистрации, описания и анализа данных наблюдений и экспериментов с целью построения вероятностных моделей массовых случайных явлений[. В зависимости от математической природы конкретных результатов наблюдений статистика математическая делится на статистику чисел, многомерный статистический анализ, анализ функций (процессов) и временных рядов, статистику объектов нечисловой природы.

Большой раздел современной математической статистики — статистический последовательный анализ.

В пример можно решить текстовую задачу основанные на двух методах.первый из них иллюстрирует синтез, второй - анализ. (У Кати есть 15 конфет, вместе у Кати и Лены 20 конфет. Сколько конфет у Лены?

1) 20 - 15 = 5 (решение , основанное на синтезе);

2) x + 15 = 20 (решение , основанное на анализе).

Сущность аналитического метода доказательства утверждений заключается в том, что исходным пунктом для обоснования требуемого утверждения является само это утверждение, которое путем логически обоснованных шагов сводится к утверждению, известное как истинное.

Сущность синтетического метода доказательства утверждений состоит в том, что отыскиваются такие истинные утверждения, которые можно было бы путем логически обоснованных шагов преобразовать в данное утверждение.

Примеров решения задач методом анализа и синтеза можно приводить очень много. Одна из основных целей решения задач в курсе математики состоит в том, чтобы обеспечить действенное усвоение каждым учеником основных методов и приемов решения учебных математических задач. Задачи всегда разбиваются на элементарные подзадачи, решающиеся в одно действие. Из такого понимания элементарной подзадачи следует, что чем больший опыт решения задач, тем больше задач становятся для нас элементарными, а следовательно, тем меньше объем поиска при решении новых задач, их сведения к элементарным, так как цель поиска состоит в получении элементарных подзадач, которые останавливают процесс поиска.

Задания для самостоятельной работы: Выполните полный анализ функции

Вариант 1

$$y = \frac{4x}{x^2 + 4}.$$

Вариант 2

$$y = \frac{4x^2}{x^2 - 1}.$$

Вариант 3

$$y = \frac{x^2}{x - 1}.$$

Вариант 4

$$y = x \cdot e^{-x^2}.$$

Вариант 5

$$y = \left(2 + x^2\right) \cdot e^{-x^2}.$$

Вариант 6

$$y = (x - 1) \cdot e^{3x+1}.$$

Вариант 7

$$y = \frac{8x}{(x - 2)^2}.$$

Вариант 8

$$y = \frac{x^3}{3\left(x^2 - 3\right)}.$$

Вариант 9

$$y = x - \ln(x + 2).$$

Вариант 10

$$y = \frac{2x^2}{2x - 1}.$$

Тема 4.2. Основные понятия теории групп, теории графов

Цель работы: Совершенствование умений составлять матрицу инцинденций и матрицу смежности

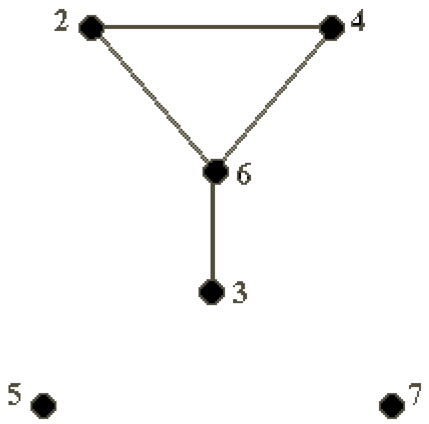
Краткие теоретические сведения

Граф это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек. *Вершины*, прилегающие

к одному и тому же ребру, называются *смежными*.
Если *ребра* ориентированны, что обычно показывают *стрелками*, то они называются *дугами*, и граф с такими ребрами называется ***ориентированным графом***.
Если *ребра не имеют ориентации*, граф называется ***неориентированным***.

Граф

Графы обычно изображаются в виде геометрических фигур, так что вершины графа изображаются точками, а ребра - линиями, соединяющими точки



Петля это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.
Простой граф граф без кратных ребер и петель.
Степень вершины это удвоенное количество петель, находящихся у этой вершины плюс количество остальных прилегающих к ней ребер.
Пустым называется граф без ребер. *Полным* называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

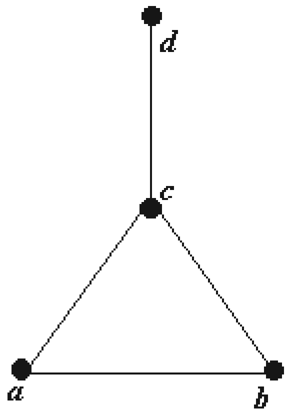
ПУТИ, МАРШРУТЫ, ЦЕПИ и ЦИКЛЫ.

Путь в ориентированном графе — это последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.
Вершины v0, vn называются *связанными данным путем* (или просто связанными). Вершину v0 называют *началом*, vn - *концом* пути. Если v0 = vn, то путь называют *замкнутым*. Число *n* называется *длиной* пути.
Маршрут в графе путь, ориентацией дуг которого можно пренебречь.
Цепь маршрут, в котором все ребра попарно различны.
Цикл замкнутый маршрут, являющийся цепью.
Маршрут, в котором *все вершины попарно различны*, называют ***простой цепью***. Цикл, в котором *все вершины, кроме первой* и *последней, попарно различны*, называются ***простым циклом***.

В теории графов применяются

1. *Матрица инцинденций*. Это матрица A с n строками, соответствующими вершинам, и m столбцами, соответствующнго рёбрам. Для ориентированного графа столбец, соответствующий дуге (x,y) содержит -1 в строке, соответствующей вершине x и 1, в строке, соответствующей вершине y. Во всех остальных 0. Петлю, т.е. дугу (x,x) можно представлять иным значением в строке x, например, 2. Если граф неориентированный, то столбец, соответствуюший ребру (x,y) содержит 1, соответствующие x и y и нули во всех остальных строках.
2. *Матрица смежности*. Это матрица $n \times n$ где n - число вершин, где $b_{ij} = 1$, если существует ребро, идещее из вершины x в вершину y и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Составим матрицы инциндентности и смежности для следующего непрерывного граф



	u	v	w	x
a	1	1	0	0
b	1	0	1	0
c	0	1	1	1
d	0	0	0	1

Матрица инцидентности

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	0	0	1	0

Матрица смежности

Изображение графов на плоскости

При изображении графов чаще всего используется следующая система обозначений: каждой вершине сопоставляется точка на плоскости, и если между вершинами существует ребро, то соответствующие точки соединяются отрезком. В случае ориентированного графа отрезки заменяют стрелками.

Задание для самостоятельной работы: Составьте матрицы инцидентности и смежности для следующих графов:

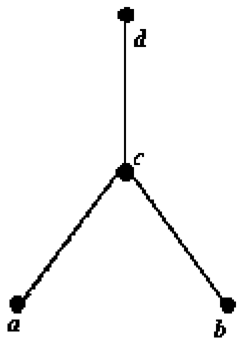


рис. 1

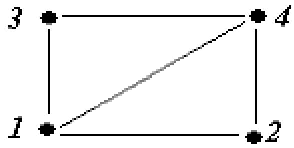


рис.2

РАЗДЕЛ 5Основы теории вероятностей и математической статистики

Тема 5.1.Элементы комбинаторики

Цель работы: Совершенствование умений решать задачи содержащие элементы комбинаторики.

Краткие теоретические сведения

1. Размещения без повторений

Подсчитаем количество способов расположить n различных элементов по k различным позициям ($k < n$). Такие расположения называются размещениями, а их количество, от французского слова *arrangement* обозначается A_n^k. В случае, если $k = n$ количество предметов совпадает с количеством имеющихся мест, и это уже изученная задача о числе перестановок.

Если из n объектов выбирают k штук, то число выборов последнего объекта есть $n - k$невыбранных объектов, что означает наличие $n - k + 1$ возможности выбора последнего выбранного объекта. То же, другими словами: после выбора первых $k - 1$ элемента остается выбрать $n - (k - 1) = n - k + 1$ элемент.

Теорема: число размещений n различных элементов по k различным позициям есть

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1),$$

или, в терминах факториалов,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Примечание: заметим, что в случае, когда число мест, по которым размещают предметы, совпадает с количеством самих предметов, т. е. когда $k = n$, рассматриваемая задача становится задачей о числе перестановок. В нашем случае при этом мы получаем в знаменателе дроби ноль факториал, и для того, что бы разные формулы, соответствующие одной и той же задаче, приводили к одинаковым результатам, полагают, что $0! = 1$.

2. Сочетания

Подсчитаем количество способов, которыми можно выбрать k из n различных предметов. Такие выборки называются сочетаниями, а их количество обозначается C_n^k.

При $k < n$, выбрать *k* предметов из n можно A_n^k способами, переставляя их P_k способами:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Рекуррентная формула: $C_m^n = C_m^{n-1} \frac{m-n+1}{n}$.

Свойства сочетаний: $C_m^n = C_m^{m-n}$; $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

3. Перестановки с повторениями

Пусть даны n_1 элементов первого типа, n_2 — второго типа, ..., n_k — k-го типа, всего n элементов. Способы разместить их по n различным местам называются перестановками с повторениями. Их количество обозначается $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Теорема: число перестановок с повторениями есть

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Размещения с повторениями

Пусть даны n различных видов предметов, которые можно разместить по k различным местам, причем выбирать предметы можно с повторениями (т.е. можно выбрать несколько предметов одного вида). Такие выборки называются размещениями с повторениями, а их количество вычисляется по формуле: $\bar{A}_n^k = n^k$..

4. Сочетания с повторениями

Пусть имеются предметы n различных видов предметов, и из них составляются наборы, содержащие k элементов. Такие выборки называются сочетаниями с повторением. Их число обозначается $\bar{C}_n^k$.

Теорема: число сочетаний с повторениями может быть вычислено по формулам:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} .$$

Задания для самостоятельной работы: Решите задачи с элементами комбинаторики

1) Сколькими способами можно в группе из 21 студентов выбрать старосту, заместителя старосты и физорга?
2) Порядок выступлений 9 участников конкурса определяется жеребьевкой. Сколько вариантов жеребьевки при этом возможно?
3) В семье двое детей. Найдите вероятность, что старший ребенок – мальчик.
4) В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны по очереди извлекаются 2 шара. Найти вероятность того, что вынутые шары одного цвета.
5) Игральную кость бросают два раза. Найдите вероятность того, что в сумме выпало не менее 10 очков.
6) Игральная кость брошена 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «шестерка».
7) Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что среди 4 фирм-нарушителей будет выявлено больше половины.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основную формулу размещений без повторений.
2. Что значит сочетание событий?
3. Какие события называются случайными?

Тема 5.2Основы теории вероятности и математической статистики

*Цель работы:*Совершенствование умений решать задачи содержащие элементы теории вероятности и математической статистики

Краткие теоретические сведения:

1. Теория вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется ***вероятностью*** этого события и обозначается символом *P(A)*.

Определение. Вероятностью события *A* называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события *A*, к числу *n* всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Следовательно, для нахождения вероятности события необходимо, рассмотрев различные исходы испытания, подсчитать все возможные несовместные исходы *n*, выбрать число интересующих нас исходов m и вычислить отношение *m* к *n*.

Из этого определения вытекают следующие свойства:

Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.

Действительно, число m искомых событий заключено в пределах $0 \le m \le n$. Разделив обе части на *n*, получим

$0 \le P(A) \le 1$.

2. Вероятность достоверного события равна единице, т.к. $n/n = 1$.

3. Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку $0/n = 0$.

<u>Пример 1</u>: В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

Решение. Число всех равновозможных независимых исходов *n* равно числу сочетаний из 18 по 5 т.е.

$$n = C_{18}^5 = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 18 \cdot 17 \cdot 28 = 8568$$

Подсчитаем число m, благоприятствующих событию A. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно

$$C_{14}^3 = \frac{14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3} = 14\cdot 13\cdot 2 = 364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число комбинаций *m* составляет

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6\cdot 364 = 2184.$$

Искомая вероятность события А равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2184}{8568} \approx 0{,}255.$$

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$P(A+B) = P(A) + P(B)$ или

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

<u>Следствие 1.</u> Если событие A_1, A_2, : ,A_n образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

<u>Следствие 2</u>**.** Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

2. Математическая статистика

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики – разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а)оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен;

б)проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.
Выборочной совокупностью или просто выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность

объектов, из которых производится выборка.

Статистическим рядом распределения называют перечень всех значений x_i из выборки и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде интервального статистического ряда, т.е. последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Пример. Пусть объем выборки n = 20 и

x_i	2	6	12
m_i	3	10	7

Найдем относительные частоты:

$P_1^* = \frac{3}{20} = 0{,}15$; $P_2^* = \frac{10}{20} = 0{,}50$; $P_3^* = \frac{7}{20} = 0{,}35$.

Тогда распределение относительных частот:

x_i	2	6	12
P_i^*	0,15	0,50	0,35

Контроль: $0{,}15 + 0{,}50 + 0{,}35 = 1$.

Задания для самостоятельной работы: Решите задачи с элементами математической статистики

1. Дискретная случайная величина Xимеет закон распределения.

x_i	*0,2*	*0,4*	*0,6*	*0,8*	*1*
p_i	*0,1*	*0,2*	*0,4*	P_4	*0,1*

Чему равна вероятность $P_4(X = 0{,}8)$? Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2. Дискретная случайная величина *X*имеет закон распределения.

x_i	3	4	5	6	7
p_i	P_1	0,15	P_3	0,25	0,35

Найти вероятность $P_1(x = 3)$ и $P_3(x = 5)$, если известно, что P_3в 4 раза больше P_1. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

3.Известны значения распределения случайных величин X и Y — число очков выбиваемых первым и вторым стрелками.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Необходимо выявить, какой из двух стрелков стреляет лучше. Построить многоугольники распределения.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая величина называется случайной?
2. Закон распределения случайных величин
3. Что называется плотностью вероятности
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей
5. Формула полной вероятности
6. Формула Бернулли

ЛИТЕРАТУРА

1. Пехлецкий И.Д. Математика [Текст] : учеб. пособие для студ. Учреждений сред. проф. образования /И.Д. Пехлецкий. - 12-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2017 . - 320с.

2. Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. Учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 2-е изд., стер. – М: Издательский центр «Академия», 2018. – 368 с.

Приложение А

Методические рекомендации по выполнению реферата

Реферат – это самостоятельная исследовательская работа, в которой автор раскрывает суть исследуемой проблемы; приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды не нее. Содержание реферата должно быть логичным; изложение материала носит проблемно-тематический характер.

Реферат – это один из самых сложных видов самостоятельной работы с книгой, а для этого следует овладеть более простыми приемами работы – разработкой плана, составлением тезисов и конспектов. Подготовка реферата и выступление с его изложением углубляет знания, расширяет кругозор, приучает логически, творчески мыслить, развивать культуру речи.

При просмотре литературы намечается ориентировочный план реферата, в который включается обычно 3-4 основных вопроса или раздела. В каждом из разделов формулируются подвопросы, помогающие последовательно раскрыть содержание проблемы.

В процессе изучения материала формулировки подвопросов и разделов обычно уточняются. При реферировании следует делать выписки, записывать мысли, возникающие при чтении; следует также точно записывать и определения тех понятий, которые будут использованы в реферате. Из прочитанной литературы нужно заимствовать не буквальный текст, а важнейшие мысли, идеи, теоретические положения; можно цитировать небольшие отрывки, приводить диаграммы, схемы, чертежи, но главное – высказывать собственные соображения по вопросам реферата. Приведенные выше советы следует рассматривать как примерные, предполагающие и другие подходы, поскольку у каждого человека вырабатываются свои приемы и навыки составления рефератов. Большую помощь в работе над рефератом оказывают предисловия к сборникам. В них можно найти сведения о цели издания, а также о существующих пробелах в исследовании.

При разработке плана реферата важно учитывать, чтобы каждый его пункт раскрывал одну из сторон избранной темы, а все пункты в совокупности охватывали тему целиком. Различают несколько композиционных решений реферата: во-первых, хронологическое, когда тема раскрывается в исторической последовательности; во-вторых, описательное, при котором тема расчленяется на составные части, в целом раскрывающие определенное явление; в-третьих, аналитическое, когда тема исследуется в ее причинно-следственных связях и взаимозависимых проблемах. Важно следить за тем, чтобы каждый пункт плана был соотнесен с главной темой и не содержал повторения в других пунктах. Важными разделами реферата является вступление и заключение. Во вступлении надо обосновать актуальность темы, обозначить круг составляющих ее проблем, четко и кратко определить задачу своей работы. В заключении делаются краткие выводы, подводятся итоги. В конце реферата должен быть приложен список литературы.

В отличие от конспекта реферат требует большей творческой активности, самостоятельности в обобщении изученной литературы, умения логически стройно изложить материал, оценить различные точки зрения на исследуемую проблему и высказать о ней собственное мнение. В реферате важно связать теоретические положения с практикой.

Таким образом, реферативная работа – это самостоятельная работа, которая должна свидетельствовать о знании литературы по данной теме, ее основной проблематике, отражать точку зрения студента на эту проблему, его умение осмысливать явления жизни на основе теоретических знаний.

При оценке реферата обычно руководствуются следующими критериями:

1. Удалось ли его студенту раскрыть сущность данной проблемы;
2. Сумел ли студент показать связь рассматриваемой проблемы с жизнью;
3. Проявил ли студент самостоятельность и творческий подход в изложении реферата;
4. Можно ли считать реферат логически стройным и т.д.

Реферат должен быть правильно оформлен. Содержание и оформление разделов реферата:

Титульный лист. Является первой страницей реферата и заполняется по строго определенным правилам. В верхнем поле указывается полное наименование учебного заведения. В среднем поле дается заглавие реферата, которое проводится без слова " тема " и в кавычки не заключается. Далее, ближе к правому краю титульного листа, указываются фамилия, инициалы студента, написавшего реферат, а также его курс и группа. Немного ниже или слева указываются название и код специальности, фамилия и инициалы преподавателя - руководителя работы. В нижнем поле указывается год написания реферата.

После титульного листа помещают оглавление, в котором приводятся все заголовки работы и указываются страницы, с которых они начинаются. Заголовки оглавления должны точно повторять заголовки в тексте. Сокращать их или давать в другой формулировке и последовательности нельзя. Все заголовки начинаются с прописной буквы без точки на конце. Последнее слово каждого заголовка соединяют отточием / …………… / с соответствующим ему номером страницы в правом столбце оглавления. Заголовки одинаковых ступеней рубрикации необходимо располагать друг под другом. Заголовки каждой последующей ступени смещают на три - пять знаков вправо по отношению к заголовкам предыдущей ступени.

Введение. Здесь обычно обосновывается актуальность выбранной темы, цель и содержание реферата, указывается объект / предмет / рассмотрения, приводится характеристика источников для написания работы и краткий обзор имеющейся по данной теме литературы. Актуальность предполагает оценку своевременности и социальной значимости выбранной темы, обзор литературы по теме отражает знакомство автора реферата с имеющимися источниками, умение их систематизировать, критически рассматривать, выделять существенное, определять главное.

Основная часть. Содержание глав этой части должно точно соответствовать теме работы и полностью ее раскрывать. Эти главы должны показать умение исследователя сжато, логично и аргументировано излагать материал, обобщать, анализировать, делать логические выводы.

Заключительная часть. Предполагает последовательное, логически стройное изложение обобщенных выводов по рассматриваемой теме.

Библиографический список использованной литературы составляет одну из частей работы, отражающей самостоятельную творческую работу автора, позволяет судить о степени фундаментальности данного реферата.

В работах используются следующие способы построения библиографических списков: по алфавиту фамилий, авторов или заглавий; по тематике; по видам изданий; по характеру содержания; списки смешанного построения. Литература в списке указывается в соответствии с Методическими указаниями по оформлению

В приложении помещают вспомогательные или дополнительные материалы, которые загромождают текст основной части работы / таблицы, карты, графики, неопубликованные документы, переписка и т.д. /. Каждое приложение должно начинаться с нового листа / страницы / с указанием в правом верхнем углу слова " Приложение" и иметь тематический заголовок. При наличии в работе более одного приложения они нумеруются арабскими цифрами / без знака " № " /, например, " Приложение 1". Нумерация страниц, на которых даются приложения, должна быть сквозной и продолжать общую нумерацию страниц основного текста. Связь основного текста с приложениями осуществляется через ссылки, которые употребляются со словом " смотри " / оно обычно сокращается и заключается вместе с шифром в круглые скобки - (см. прил.1)/.