Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
по общеобразовательной дисциплине
«Математика»
для специальности **21.02.19 Землеустройство**
профиль обучения: **технологический**

Челябинск, 2024

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по общеобразовательной дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся **21.02.19 Землеустройство** технологического профиля.

Практические занятия являются важным элементом общеобразовательной дисциплины. В процессе выполнения практических работ, обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Рабочей программой общеобразовательной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 94 практических работ, которые направлены на достижение следующих **целей:**

− обеспечение сформированности представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики;

− обеспечение сформированности логического, алгоритмического и математического мышления;

− обеспечение сформированности умений применять полученные знания при решении различных задач;

− обеспечение сформированности представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

Выполнение практических работ дисциплины «Математика» обеспечивает достижение следующих результатов обучения:

***личностных*:**

- ЛР 24. Готовность к активной деятельности технологической и социальной направленности, способность инициировать, планировать и самостоятельно выполнять такую деятельность;
- ЛР 25 интерес к различным сферам профессиональной деятельности, умение совершать осознанный выбор будущей профессии и реализовывать собственные жизненные планы;
- ЛР 26 готовность и способность к образованию и самообразованию на протяжении всей жизни.

***метапредметных*:**

универсальных учебных познавательных действий:

- МРП 01 самостоятельно формулировать и актуализировать проблему, рассматривать ее всесторонне;
- МРП 02 устанавливать существенный признак или основания для сравнения, классификации и обобщения;
- МРП 03 определять цели деятельности, задавать
- параметры и критерии их достижения;
- МРП 04 выявлять закономерности и противоречия в
- рассматриваемых явлениях;
- МРП 05 вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям, оценивать риски последствий деятельности;
- МРП 07 владеть навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем;

- МРП 08 способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- МРП 12 выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения;
- МРП 13 анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях;
- МРП 16 осуществлять целенаправленный поиск переноса средств и способов действия в профессиональную среду;
- МРП 17 уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности;
- МРП 18 уметь интегрировать знания из разных предметных областей;
- МРП 19 выдвигать новые идеи, предлагать оригинальные подходы и решения;
- МРП 21 владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию информации различных видов и форм представления;

универсальных коммуникативных действий:

- МРК 08 принимать цели совместной деятельности, организовывать и координировать действия по ее достижению: составлять план действий, распределять роли с учетом мнений участников, обсуждать результаты совместной работы;
- МРК 10 предлагать новые проекты, оценивать идеи с позиции новизны, оригинальности, практической значимости;
- МРК 11 координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;

универсальных регулятивных действий:

- МРР 02 самостоятельно составлять план решения проблемы с учетом имеющихся ресурсов, собственных возможностей и предпочтений;
- МРР 09 владеть навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований;
- МРР 10 использовать приемы рефлексии для оценки ситуации, выбора верного решения;

***предметных*:**

- ПРб 01 владеть представлениями о роли информации и связанных с ней процессов в природе, технике и обществе; понятиями «информация», «информационный процесс», «система», «компоненты системы» «системный эффект», «информационная система», «система управления»; владеть методами поиска информации в сети Интернет; уметь критически оценивать информацию, полученную из сети Интернет; характеризовать большие данные, приводить примеры источников их получения и направления использования;

элементов ОК и ПК:

- ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;
- ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа. и интерпретации информации и информационные технологии, необходимые для выполнения задач профессиональной деятельности;

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов
–
–

Каждая практическая работа содержит номер, название и цель работы, формируемые в процессе выполнения работы знания и умения, приводится решение стандартных задач и задания для самостоятельной работы.

Критерии оценивания практической работы:

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

Ход выполнения практической работы

Практические работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить самостоятельную работу или решить номера, которые указаны в работе.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ работы	Наименование практической работы	Кол-во часов
1.	Практическое занятие 1. Действия над положительными и отрицательными числами, обыкновенными и десятичными дробями. Действия со степенями, формулы сокращенного умножения.	2
2.	Практическое занятие 2. Линейные, квадратные, дробно-линейные уравнения и неравенства. Способы решения систем линейных уравнений. Системы линейных неравенств.	2
3.	Практическое занятие 3. Нахождение области определения и области значений функции, исследование функции на монотонность, чётность и ограниченность.	2
4.	Практическое занятие 4. Построение графиков линейной, квадратичной, дробно-рациональной функций.	2
5.	Практическое занятие 5. Простые проценты, разные способы их вычисления. Сложные проценты. Проценты в профессиональных задачах технологического профиля.	2
6.	Практическое занятие 6. Виды плоских фигур и их площадь. Практико-ориентированные задачи в курсе геометрии на плоскости.	2

№ работы	Наименование практической работы	Кол-во часов
7.	Практическое занятие 7. Вычисление и сравнение корней.	2
8.	Практическое занятие 8. Преобразование выражений, содержащих радикалы.	2
9.	Практическое занятие 9. Преобразование выражений, содержащих степени с рациональными показателями.	2
10.	Практическое занятие 10. Преобразование выражений, содержащих степени с действительными показателями.	2
11.	Практическое занятие 11. Вычисление и сравнение степенных выражений.	2
12.	Практическое занятие 12. Исследование свойств и построение графика степенной функции.	2
13.	Практическое занятие 13. Решение иррациональных уравнений.	2
14.	Практическое занятие 14. Решение иррациональных неравенств.	2
15.	Практическое занятие 15. Исследование свойств и построение графика показательной функции.	2
16.	Практическое занятие 16. Решение показательных уравнений и неравенств.	2
17.	Практическое занятие 17. Применение показательной и степенной функций в прикладных задачах технологического профиля.	2
18.	Практическое занятие 18. Вычисление и сравнение логарифмов.	2
19.	Практическое занятие 19. Применение основных правил логарифмирования.	2
20.	Практическое занятие 20. Преобразование выражений, содержащих степени и логарифмы.	2
21.	Практическое занятие 21. Исследование свойств и построение графика логарифмической функции	2
22.	Практическое занятие 22. Решение логарифмических уравнений.	2
23.	Практическое занятие 23. Решение логарифмических неравенств.	2
24.	Практическое занятие 24. Решение систем уравнений и неравенств с применением различных методов.	2
25.	Практическое занятие 25. Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств.	2
26.	Практическое занятие 26. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики.	2
27.	Практическое занятие 27. Описание производственных процессов с помощью графиков функций.	2
28.	Практическое занятие 28. Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.	2

№ работы	Наименование практической работы	Кол-во часов
29.	Практическое занятие 29. Применение основных тригонометрических тождеств для вычисления значений тригонометрических функций по одной из них.	2
30.	Практическое занятие 30. Выполнение тождественных преобразований с помощью формул приведения.	2
31.	Практическое занятие 31. Выполнение тождественных преобразований с помощью формул сложения.	2
32.	Практическое занятие 32. Выполнение тождественных преобразований с помощью формул удвоенного аргумента.	2
33.	Практическое занятие 33. Выполнение тождественных преобразований с помощью формул половинного аргумента.	2
34.	Практическое занятие 34. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.	2
35.	Практическое занятие 35. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.	2
36.	Практическое занятие 36. Преобразование тригонометрических выражений.	2
37.	Практическое занятие 37. Исследование свойств и построение графиков тригонометрических и обратных тригонометрических функций.	2
38.	Практическое занятие 38. Использование свойств тригонометрических функций в профессиональных задачах.	2
39.	Практическое занятие 39. Решение уравнений вида sin x= a и cos x=a.	2
40.	Практическое занятие 40. Решение уравнений вида tg x= a и ctg x=a.	2
41.	Практическое занятие 41. Основные методы решения тригонометрических уравнений.	2
42.	Практическое занятие 42. Решение простейших тригонометрических неравенств.	2
43.	Практическое занятие 43. Числовая последовательность, Вычисление предела последовательности.	2
44.	Практическое занятие 44. Геометрический и механический смысл производной.	2
45.	Практическое занятие 45. Применение основных правил дифференцирования.	2
46.	Практическое занятие 46. Вычисление производных основных элементарных функций.	2
47.	Практическое занятие 47. Вычисление производных сложных функций.	2
48.	Практическое занятие 48. Исследование функции на монотонность. Определение экстремумов функции.	2
49.	Практическое занятие 49. Исследование функции с помощью производной.	2

№ работы	Наименование практической работы	Кол-во часов
50.	Практическое занятие 50. Физический смысл производной в профессиональных задачах технологического профиля.	2
51.	Практическое занятие 51. Использование производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.	2
52.	Практическое занятие 52. Вычисление первообразной для данной функции.	2
53.	Практическое занятие 53. Применение интеграла для вычисления физических величин и площадей.	2
54.	Практическое занятие 54. Нахождение уравнений окружности, сферы, плоскости. Вычисление расстояний между точками.	2
55.	Практическое занятие 55. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Вычисление угла между двумя векторами.	2
56.	Практическое занятие 56. Вычисление скалярного произведения векторов.	2
57.	Практическое занятие 57. Координаты в пространстве. Действия над векторами.	2
58.	Практическое занятие 58. Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.	2
59.	Практическое занятие 59. Определение взаимного расположения прямых и плоскостей.	2
60.	Практическое занятие 60. Применение признаков и свойств параллельных и перпендикулярных плоскостей.	2
61.	Практическое занятие 61. Перпендикуляр и наклонная к плоскости.	2
62.	Практическое занятие 62. Определение расстояний между прямыми и плоскостями. Вычисление двугранных углов.	2
63.	Практическое занятие 63. Построение куба, параллелепипеда и их сечений.	2
64.	Практическое занятие 64. Вычисление основных элементов куба и параллелепипеда.	2
65.	Практическое занятие 65. Построение прямой и наклонной призмы и их сечений.	2
66.	Практическое занятие 66. Вычисление основных элементов призмы.	2
67.	Практическое занятие 67. Построение пирамиды и ее сечений.	2
68.	Практическое занятие 68. Вычисление основных элементов пирамиды.	2
69.	Практическое занятие 69. Исследование симметрии в многогранниках. Построение правильных многогранников.	2
70.	Практическое занятие 70. Построение усеченной пирамиды и вычисление ее основных элементов.	2
71.	Практическое занятие 71. Построение цилиндра и его сечений.	2
72.	Практическое занятие 72. Вычисление основных элементов цилиндра.	2

№ работы	Наименование практической работы	Кол-во часов
73.	Практическое занятие 73. Построение конуса и его сечений.	2
74.	Практическое занятие 74. Вычисление основных элементов конуса.	2
75.	Практическое занятие 75. Вычисление основных элементов конуса.	2
76.	Практическое занятие 76. Построение шара и сферы, их сечений. Уравнение сферы.	2
77.	Практическое занятие 77. Вычисление площади поверхности и объёма призмы и пирамиды.	2
78.	Практическое занятие 78. Вычисление площади поверхности и объёма цилиндра и конуса.	2
79.	Практическое занятие 79. Вычисление площади сферы и объёма шара.	2
80.	Практическое занятие 80. Вычисление площади поверхности и объёма усеченной пирамиды и усеченного конуса.	2
81.	Практическое занятие 81. Расчет объема вместимости веществ.	2
82.	Практическое занятие 82. Примеры симметрий в профессиях и специальностях технологического профиля.	2
83.	Практическое занятие 83. Подсчет числа размещений.	2
84.	Практическое занятие 84. Подсчет числа сочетаний.	2
85.	Практическое занятие 85. Подсчет числа перестановок.	2
86.	Практическое занятие 86. Решение задач на перебор вариантов.	2
87.	Практическое занятие 87. Выполнение операций над случайными событиями.	2
88.	Практическое занятие 88. Вычисление вероятностей с помощью теоремы сложения.	2
89.	Практическое занятие 89. Вычисление вероятностей с помощью теоремы умножения.	2
90.	Практическое занятие 90. Составление закона распределения дискретной случайной величины и вычисление ее числовых характеристик.	2
91.	Практическое занятие 91. Решение практических задач на обработку числовых данных, вычисление их характеристик.	2
92.	Практическое занятие 92. Определение комплексного числа. Выполнение операций над комплексными числами в алгебраической форме.	2
93.	Практическое занятие 93. Выполнение операций над комплексными числами в тригонометрической форме.	2
94.	Практическое занятие 94. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.	2

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Название практической работы: *Действия над положительными и отрицательными числами, обыкновенными и десятичными дробями. Действия со степенями, формулы сокращенного умножения.*

Цель работы*:*

1. Закрепить навыки выполнения операций над целыми и дробными числами.
2. Закрепить навыки выполнения операций над степенными выражениями и применения формул сокращённого умножения.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 02, ПРб 06, ПРу 05, ПРу 09.

знания: понятие о числовых множествах, формулах сокращённого умножения;

умения: выполнение операций над числами, применение формул сокращённого умножения для упрощения выражений.

Ход работы:

Сложение дробей:

Для того, чтобы сложить две дроби, нужно сначала привести их к общему знаменателю, а затем выполнить сложение: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$.

Вычитание дробей:

Для того, чтобы из одной дроби вычесть другую, нужно сначала привести их к общему знаменателю, а затем выполнить вычитание: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$.

Умножение дробей:

Для того, чтобы перемножить две дроби, нужно перемножить соответственно их числители и знаменатели: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Деление

Для того, чтобы одну дробь разделить на другую, нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, их нужно перевести в неправильные дроби, а затем разделить по правилу деления обыкновенных дробей.

$$2\frac{1}{6}:6\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 6+1}{6}:\frac{6\cdot 2+1}{2}=\frac{13}{6}:\frac{13}{2}=\frac{\cancel{13}}{6}\cdot\frac{2}{\cancel{13}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Для того, чтобы сложить (или вычесть) два числа, записанных в виде десятичных дробей, можно использовать правило сложения (вычитания) в столбик. При этом дроби должны быть записаны друг под другом так, чтобы запятые оказались друг под другом — это будет означать, что друг под другом записаны соответствующие разряды.

Если одна из дробей "длиннее" другой, то можно уравнять количество цифр в дробных частях, дописав справа нули в более "короткой" дроби.

Вычислим значение выражения $13{,}75 - 8{,}2 + 0{,}115$.

$$\begin{array}{r} \dot{1}3{,}75 \\ -\;\;8{,}20 \\ \hline 5{,}55 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}550 \\ +\;0{,}115 \\ \hline 5{,}665 \end{array}$$

Чтобы умножить десятичную дробь на десятичную дробь, нужно сначала умножить их как натуральные числа, не обращая внимания на запятые, а затем отделить запятой справа столько цифр, сколько их стоит в дробных частях обоих множителей вместе. Если в произведении меньше цифр, чем нужно, перед переносом запятой необходимо дописать слева к натуральному числу необходимое количество нулей.

Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, нужно в делимом и в делителе перенести запятые вправо на столько цифр, сколько их содержится в дробной части делителя, и далее выполнить деление на натуральное число.

Свойства степени:

Формула:	**Примеры:**
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	1) $4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$ 2) $4^{-3} \cdot 4^5 = 4^{-3+5} = 4^2 = 16$
$a^n : a^m = a^{n-m}$	1) $5^{10} : 5^8 = 5^{10-8} = 5^2 = 25$ 2) $5^2 : 5^{-2} = 5^{2-(-2)} = 5^4 = 625$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	1) $(2^3)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}$ 2) $(2^{-3})^2 = 2^{-3\cdot 2} = 2^{-6}$ 3) $(2^{-3})^{-5} = 2^{-3\cdot(-5)} = 2^{15}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$	$(2 \cdot 3 \cdot 4)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 = 4 \cdot 9 \cdot 16 = 576$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	1) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$; 2) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = \frac{4^2}{1^2} = 16$

1) Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

а) $(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

б) $(2k + 3n)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 3n + (3n)^2 = 4k^2 + 12kn + 9n^2$

2) Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения.

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

а) $(2a - c)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot c + c^2 = 4a^2 - 4ac + c^2$

б) $(3a - 5b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$

3) Разность квадратов двух выражений равна произведению разности самих выражений на их сумму.

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

а) $9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2 = (3x - 4y)(3x + 4y)$

б) $(6k - 5n)(6k + 5n) = (6k)^2 - (5n)^2 = 36k^2 - 25n^2$

Задания для самостоятельной работы

1. Выполните действия с дробями:

1) $13\frac{1}{22}+4\frac{2}{33}$; 2) $\frac{3}{7}\cdot 1\frac{2}{5}$, 3) $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{3}{25}$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3\frac{8}{9}$; 5) $\left(1\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}\cdot\frac{64}{100}\right):4\frac{4}{5}$. 6) $21-3\frac{3}{4}:\left(1\frac{4}{5}+3{,}2\right)$.

2. Выполните действия со степенями:

а) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot (-4)^0$; в) $\left(\left(3\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(1\frac{2}{7}\right)^{-2}\right) \cdot ((-3,4)^0 - (-1)^{-2})$.

б) $\frac{3^{-3} \cdot 9^{-3}}{(-27)^{-2}}$;

Упростите выражение:

а) $\frac{(a^{-2})^{-4} \cdot (a^3)^{-2}}{(a^{-3})^{-1} : (a^{-1})^3}$; б) $\left(\frac{3a^{-1}}{5b^2}\right)^{-2} : \left(-\frac{a}{25b^5}\right)^{-1}$.

3. Упростите выражения, используя формулы сокращённого умножения:

$\frac{64a^2-36}{64a^2+36-96}$;

$\frac{(4a+2b)(4a-2b)}{16a^2+4b^2-16ab}$;

$\frac{(2a+3c)(2a-3c)}{4a^2-9c^2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Название практической работы: *Линейные, квадратные, дробно-линейные уравнения и неравенства. Способы решения систем линейных уравнений. Системы линейных неравенств.*

Цель работы:

1. Закрепить навыки решения линейных, квадратных и дробно-рациональных уравнений, неравенств и систем.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 02, ПРб 06, ПРу 05, ПРу 09.

знания:

– понятие об уравнении, области допустимых значений, решении уравнения;
– понятие о линейных, квадратных, дробно-линейных уравнениях и неравенствах, методах их решения;

умения: решение линейных, квадратных, квадратных, дробно-линейных уравнений, неравенств и систем.

Ход работы:

Перед выполнением практической работы ответьте на следующие вопросы:

1. Линейное уравнение и неравенство – это …
2. Квадратным уравнением и неравенством называется …
3. Неполные квадратные уравнения – это …
4. Дробно-рациональное уравнение и неравенство – это …

Запишите алгоритм решения:

1. Линейного уравнения и неравенства;
2. Квадратного уравнения и неравенства (в том числе неполных);
3. Дробно-рационального уравнения и неравенства.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1	Вариант №2
Решите уравнения: 1. $\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}=-x-2$ $x^2-7x+12=0$ $2x^2-9x+10=0$ $9x^2+6x+1=0$ $x-2+5x=3$;	Решите уравнения: 1. $5-\frac{1-2x}{5}=4x-1$ 2. $x^2-3x-10=0$ $5x^2+14x-3=0$ $2x^2+3x+1=0$ $x-5+8x=2$;
Решите неравенства: $x^2-22x-23\le 0$ $x^2-3x-10>0$ 3. $\frac{x+6}{1-3x}\ge 0.$ 4. $\frac{2x-x^2}{x+3}\le 0.$	Решите неравенства: $x^2-8x+15<0$ $3x^2-8x+5\ge 0$ 3. $\frac{2-x}{2x+3}\ge 0$ 4. $\frac{x^2-5x}{4-x}\ge 0.$
Решите системы: 1. $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 7x-3y=11. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x+6\le x \\ 3x+12\le x+17 \end{cases}$	Решите системы: 1. $\begin{cases} 4x-7y=1, \\ 2x+7y=11. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 17x-2>12x-1 \\ 3-9x<1-x \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Название практической работы: *Нахождение области определения и области значений функции, исследование функции на монотонность, чётность и ограниченность.*

Цель работы:

1. Закрепить навыки определения области определения и области значений функции.

2. Научиться исследовать функцию на четность и периодичность.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

–

–

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

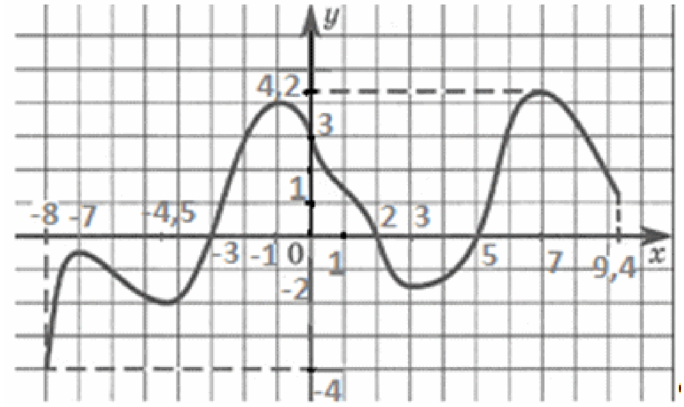
предметные: ПРб 02, ПРб 06, ПРу 05, ПРу 09.

знания: понятие о функции, области определения и области значений, монотонности, чётности и ограниченности;

умения: вычисление области определения и значения, исследование на чётность и ограниченность, чтение графика функции.

Ход работы:

Свойства функции разберем на примере о графика произвольной функции $y = f(x)$**:**



1. *Область определения функции* — это множество всех значений переменной x, которые имеют соответствующие им значения функции. Обозначают: *D(f)*. На графике область определения — это промежутки на оси OX, над которыми (или под которыми) имеются части графика.

   Для нашего примера *D(f)* = [-8; 9,4].

2. *Область значений функции* — это множество всех ее значений y. Обозначают: *E(f)*. На графике область значений функции — это промежутки на оси OY, слева или справа от которых (в горизонтальной полосе) находятся части графика.

   Для нашего примера *E(f)* = [-4; 4,2].

3. Функция *y=f(x)* называется *возрастающей*, если для любой пары значений аргументов x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Функцию можно назвать возрастающей на промежутке, если большему из любых двух взятых из него чисел всегда соответствует большее значение функции.

   Для нашего примера функция возрастает при $x \in [-8; -7] \cup [-4,5; -1] \cup [3; 7]$

   Функция *y=f(x)* называется *убывающей*, если для любой пары значений аргументов x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.Функцию можно назвать убывающей на промежутке, если из любых двух взятых из него чисел большему из них всегда соответствует меньшее значение функции.

   Для нашего примера функция убывает при $x \in [-7; -4,5] \cup [-1; 3] \cup [7; 9,4]$.

4. *Промежутки знакопостоянства* — промежутки, на которых значения функции имеют постоянный знак (положительный или отрицательный). Промежуток положительного знака— это множество значений переменной x, у которых соответствующие значения

функции больше нуля (у>0). На графике — это части оси абсцисс, у которых соответствующие кусочки графика выше оси ОХ. Без графика их тоже можно найти, составив и решив неравенство *f(x)*> 0.

Для нашего примера функция положительна при $x \in (-3;2) \cup (5;9{,}4)$.

Промежуток отрицательного знака— это множество тех значений переменной х, у которых соответствующие значения функции меньше нуля (у <0). На графике— это промежутки оси абсцисс, у которых соответствующие кусочки графика ниже оси ОХ. Без графика их тоже можно найти, составив и решив неравенство *f(x)* <0.

Для нашего примера функция отрицательна при $x \in (-8;-3) \cup (2;5)$.

5. *Нули функции*— это значения переменной х, при которых у(х) = 0. Без графика нули функции тоже можно найти, составив и решив уравнение *f(x)* = 0. По графику нули определяют как абсциссы точек пересечения графика с осью ОХ.

   Для нашего примера нули функции — это точки $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.

6. *Четность и нечетность функции*. Функция называется четной, если ее график симметричен относительно оси ОУ и для любого х ϵ *D(f)* верно: -х ϵ *D(f)* и *f(-x) = f(x).* Т.е. функция называется четной, если любым двум противоположным значениям аргумента, из области определения, соответствуют равные значения функции. На графике четная функция имеет ось симметрии OY.

   Функция называется нечетной, если ее область определения симметрична относительно нуля и для любого х ϵ *D(f)* верно: -х ϵ *D(f)* и *f(-x) = -f(x).* Т.е. функция называется нечетной, если любым двум противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции. На графике нечетная функция симметрична относительно начала координат. Произведение или частное двух четных функций — есть функция четная. Произведение или частное двух нечетных функций— есть функция четная. Произведение или частное двух функций, одна из которых четная, а другая нечетная— есть функция нечетная.

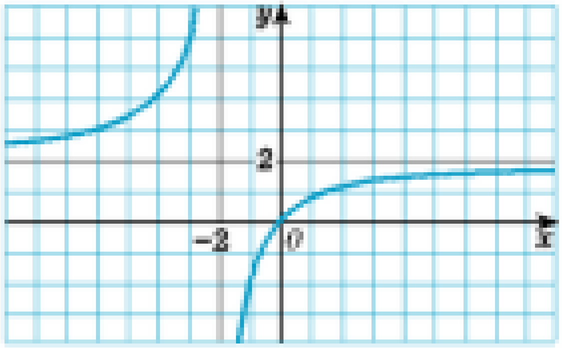
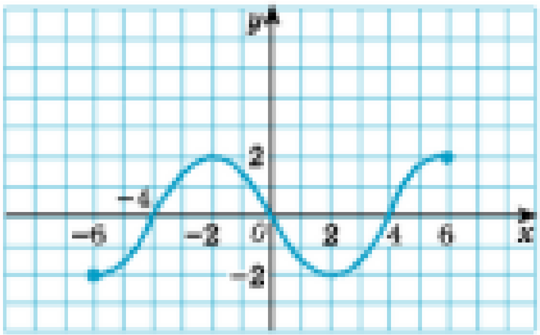
   Функция нашего примера— ни четная, ни нечетная, такая функция называется функцией общего вида.

7. *Периодичность функции*. Функция *y = f(x)* называется периодической с периодом Т> 0, если для любого х ϵ *D(f)* верно: (х— Т) ϵ *D(f),* (х + Т) ϵ *D(f)* и *f(x— T)= f(x + T)=f(x).*

   Функция нашего примера не является периодической.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Опишите свойства функции, график которой изображён на рисунке (по алгоритму приведённого выше примера):

Вариант №1	Вариант №2
	

Задание 2. Найдите область определения функций:

Вариант №1	Вариант №2
$y = \dfrac{2x+3}{1-4x}$ $y = \sqrt{5x^2 - 20}$	$y = \dfrac{5x-7}{6x-2}$ $y = \sqrt{16 - x^2}$

Задание 3. Найдите область значений функций:

Вариант №1	Вариант №2
$y = \dfrac{1}{4+x^2}$ $y = \sqrt{x-1} + 3$	$y = \sqrt{x^2+3}$ $y = 2 + \sqrt{x+2}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Название практической работы: *Построение графиков линейной, квадратичной, дробно-рациональной функций.*

Цель работы: Закрепить навыки вычисления построения графиков линейной, квадратичной и дробно-рациональной функций.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 02, ПРб 06, ПРу 05, ПРу 09.

знания: понятие о графике функции;

умения: построение графика функции.

Ход работы:

Пример 1. Построить и прочитать график линейной функции $y = \frac{1}{3}x + 2$.

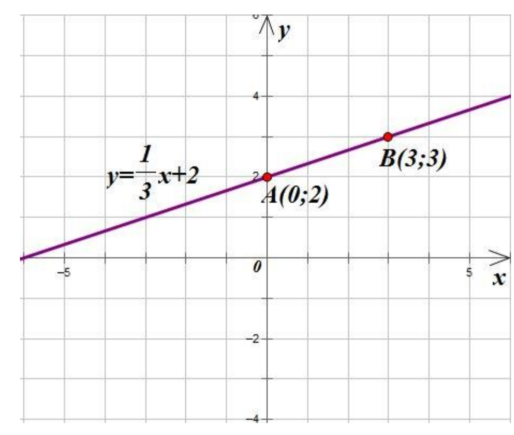
Решение.

Чтобы построить график линейной функции, нам нужны координаты двух точек, принадлежащих графику функции. Чтобы их найти, нужно взять два значения x, подставить их в уравнение функции, и по ним вычислить соответствующие значения y.

Например, чтобы построить график функции у = $\frac{1}{3}$х + 2, удобно взять х = 0 и х = 3, тогда ординаты эти точек будут равны у = 2 и у = 3.

Получим точки А(0;2) и В(3;3). Соединим их и получим график функции у = $\frac{1}{3}$х + 2:

Рис. 1



Прочитаем график, построенной функции:

1) D(у) = R;

2) E(у) = R;

3) Функция общего вида;

4) Непериодическая;

5) Точки пересечения с осями координат:

Ох: $\frac{1}{3}$х + 2 = 0, х = - 6, следовательно (- 6; 0) – точка пересечения с осью абсцисс.

Оу: при х = 0 у = 2, следовательно (0; 2) – точка пересечения с осью ординат;

6) у = $\frac{1}{3}$х + 2 положительна при х ∈ (- 6; +∞) и отрицательна при х ∈ (- ∞; - 6)

7) у = $\frac{1}{3}$х + 2 возрастает на всей области определения.

Пример 2. Построить и прочитать график квадратичной функции у = 2х^2 + 3х – 5.

Решение. **1**. Так как а = 2 $>$ 0 ,ветви параболы направлены вверх.

2. Найдем дискриминант квадратного трехчлена 2х^2 + 3х – 5

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49; \sqrt{D} = 7$$

Дискриминант квадратного трехчлена больше нуля, поэтому парабола имеет две точки пересечения с осью ОХ.

Для того, чтобы найти их координаты, решим уравнение 2х^2 + 3х – 5 = 0

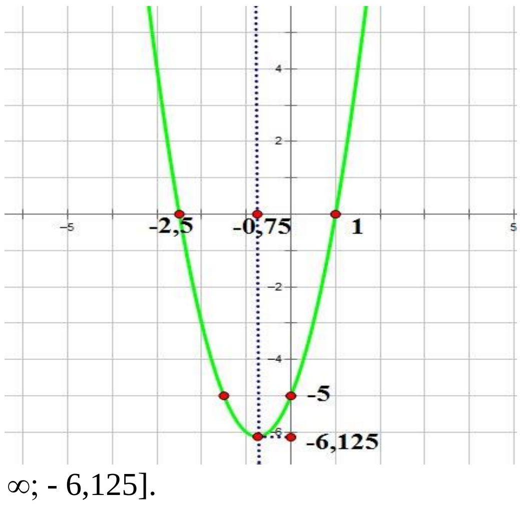
$$x_1 = \frac{-3+7}{4} = 1 \text{ и } x_2 \frac{-3-7}{4} = -2{,}5$$

3. Координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

$$y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{49}{8} = -6{,}125$$

4. Точка пересечения параболы с осью ОY: (0;-5),и ей симметричная относительно оси симметрии параболы.



Нанесем эти точки на координатную плоскость, и соединим их плавной кривой:

Рис. 2

Прочитаем график построенной функции:

1. D(у)=R
2. E(у)=[-6,125; + ∞)
3. Нули функции: - 2,5 и 1.
4. у $<$ 0 при х ∈ (- 2,5; 1), у $>$ 0 при х ∈ (-∞; - 2,5) ∪ (1;+∞).
5. Функция возрастает на [-6,125; + ∞) и убывает на (- ∞; - 6,125].

6. График симметричен относительно прямой x = - 0,75.
7.y_{min} = - 6,125 при x = - 0,75.

Пример 3. Построить и прочитать график кусочно – линейной функции $y = \begin{cases} 2 - x \text{ при } x < 1 \\ x \text{ при } x \geq 1 \end{cases}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} 2 - x \text{ при } x < 1 \\ x \text{ при } x \geq 1 \end{cases}$. На рисунке показан график этой функции. Чтобы его получить, построим график функции $y = 2 - x$ при $x < 1$ и $y = x$ при $x \geq 1$.

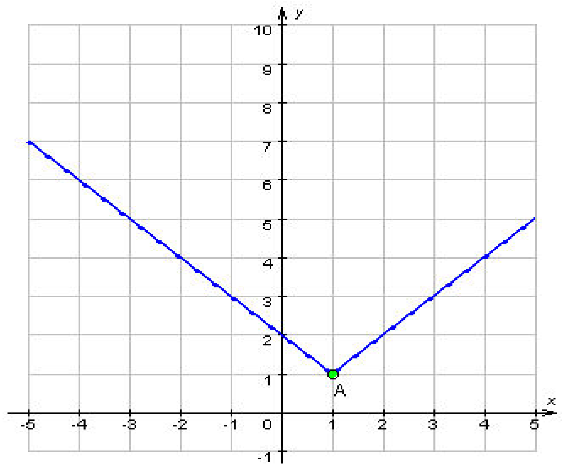


Рис. 3

Прочитаем график построенной функции:
1. D(y)=R
2. E(y)=[1; + ∞)
3. Функция общего вида;
4. Непериодическая;
5. Точки пересечения с осями координат:
Ox: нет точек пересечения
Oy: (0; 2) – точка пересечения с осью ординат;
6. Функция положительна на всей области определения;
7. Функция возрастает на [1; + ∞) и убывает на (- ∞; 1]/

Пример 4. Построить график дробно-линейной функции $y = \frac{x+8}{x-2}$.

Решение.

Представим дробь в виде $n + \frac{k}{x-m}$. Для этого x + 8 запишем в следующем виде: x – 2 + 10 (т.е. 8 представили в виде –2 + 10). Получим: $\frac{x+8}{x-2} = \frac{x-2+10}{x-2} = \frac{(x-2)+10}{x-2} = 1 + \frac{10}{x-2}$.

Итак, мы получили все необходимые значения: k = 10, m = 2, n = 1.

Таким образом, мы нашли асимптоты нашей гиперболы (исходя из того, что x = m, y = n): x = 2, y = 1.

То есть одна асимптота гиперболы проходит параллельно оси y на расстоянии 2 единиц справа от нее, а вторая асимптота проходит параллельно оси x на расстоянии 1 единицы выше ее.

Построим график данной функции. Для этого сделаем следующее:
1) проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты – прямую x = 2 и прямую y =1.
2) так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две таблицы: одну для x < 2, другую для x > 2.

Сначала подберем значения x для первого варианта (x <2).

Результаты всех полученных вычислений вписываем в таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1
y	-1	-1,5	-2,3	-4	-9

Теперь составим таблицу для варианта x > 2:

x	3	4	5	6	7
y	11	6	4,3	3,5	3

3 Далее просто составляете график функции с полученными координатами.

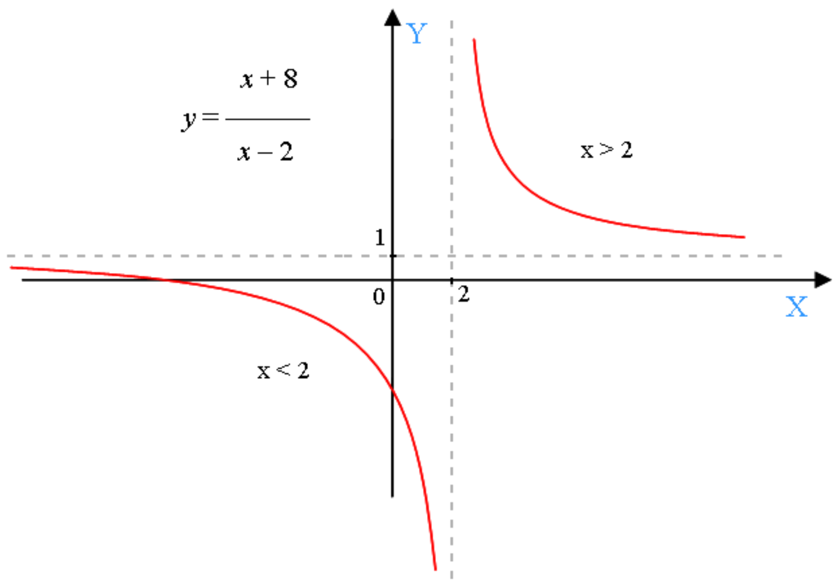


Рис. 4

Задания для самостоятельной работы:

Построить и прочитать графики функций:

Вариант 1.	*Вариант 2.*	*Вариант 3.*
а) $y = 3x - 2$ б) $y = x^2 - 7x + 2$ в) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ при } x \leq 1 \\ 3 - x \text{ при } x > 1 \end{cases}$ г) $y = \frac{4x-1}{x+3}$	а) $y = 2x + 5$ б) $y = -x^2 + 4x + 6$ в) $f(x) = \begin{cases} x - 5 \text{ при } x \geq 3 \\ 1 - x \text{ при } x < 3 \end{cases}$ г) $y = \frac{2x+5}{x-2}$	а) $y = 2x - 3$ б) $y = -x^2 - 6x + 1$ в) $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ при } x \geq -1 \\ -x - 4 \text{ при } x < -1 \end{cases}$ г) $y = \frac{3x+5}{x-4}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Название практической работы: *Простые проценты, разные способы их вычисления. Сложные проценты. Проценты в профессиональных задачах технологического профиля.*

Цель работы:

1. Закрепить навыки вычисления процентов и их применение для прикладных задач.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные: ПРб 01, ПРб 06, ПРб 14, ПРу 16, ПРу 19.

знания: понятие о процентах, виды основных задач на проценты, формула сложных процентов;

умения: нахождение процентов о числа, определение числа по его процентам.

Ход работы:

1.Процент – сотая часть числа.

2. Чтобы найти p% от всего числа, надо всё число умножить на 0.01p.

3. Чтобы найти всё число по его p% процентам, надо известное число разделить на 0.01p.

4. Чтобы найти сколько процентов одно число составляет от другого, надо одно число разделить на другое и умножить на 100%.

Пример 1.

Сколько процентов соли содержится в растворе, если в 200г. раствора содержится 150г. воды?

Решение:

1) $200 - 150 = 50$ (г.) – соли

2) $\frac{50 \cdot 100}{200} = 25\%$ - соли

Ответ: 25%

Пример 2.

Свежие грибы содержали по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

Решение:1) $22 \cdot 0{,}1 = 2{,}2$ (кг) - грибов по массе в свежих грибах;

2) $2{,}2 \div 0{,}88 = 2{,}2$ (кг) - сухих грибов, получаемых из свежих.

Ответ: 2,5 кг.

Формула простых процентов

Обозначим через A^0 сумму первоначального вклада. Банк обязуется выплачивать вкладчику в конце каждого p% (годовая процентная ставка) от первоначальной суммы A^0. По истечении одного года величина вклада станет равной $A = A^0\left(1 + \frac{P}{100}\right)$ рублей. Если по прошествии каждого года вкладчик снимает со счёта начисленные проценты, то через n лет на вкладе по формуле простого процента будет: $A^n = A^0\left(1 + \frac{P \cdot n}{100}\right)$

Пример 3.

Банк выплачивает вкладчикам каждый год 8% от внесённой суммы. Клиент сделал вклад в размере 200000 р. Какая сумма будет на его счёте через 5 лет, 10 лет?

Решение:

Используя формулу: $A^n = A^0\left(1 + \frac{P \cdot n}{100}\right)$

$$A^5 = 200000\left(1 + \frac{5 \cdot 8}{100}\right) = 280000\ (p)$$

$$A^{10} = 200000\left(1 + \frac{10 \cdot 8}{100}\right) = 360000\ (p)$$

Ответ: 280000 р., 360000 р.

Формула сложных процентов

Если обозначить через A^0 сумму первоначального вклада, A^n - сумма, которая будет на вкладе к концу n-го года, то при начислении p% годовых, не снимая со счёта сумму начисленных процентов, можно пользоваться формулой сложных процентов:

$$A^n = A^0\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

Пример 4.

Банк предлагает вклад «студенческий». По этому вкладу сумма, имеющаяся на 1 января, ежегодно увеличивается на одно и то же число процентов. Вкладчик вложил 1 января 1000 рублей и в течение 2 лет не производил со своим вкладом никаких операций. В результате вложенная им сумма увеличилась до 1210 рублей. На сколько процентов ежегодно увеличивается сумма денег, положенная на этот вклад?

Решение:

Пусть на a% ежегодно увеличивается сумма денег, положенная на «студенческий» вклад. Так как было положено 1000 рублей, а к концу второго года получилось 1210 рублей, то $A^0 = 1000, A^2 = 1210, n = 2$.

Решим уравнение:

$$1210 = 1000\left(1 + \frac{a}{100}\right)^2 \Rightarrow a = 10$$

Ответ: 10%.

Профессионально-ориентированные задания для самостоятельной работы

1. Цену товара повышали: первый раз на p%, затем новую цену повысили на 2p%. После этого цену товара снизили на 15%. В итоге окончательная цена оказалась выше первоначальной на 12.2%. На сколько процентов была повышена цена товара в первый раз?
2. При какой процентной ставке вклад на сумму 500р. Возрастёт за 6 месяцев до 650 р.
3. Каким должен быть начальный вклад, чтобы при ставке 4% в месяц он увеличился за 8 месяцев до 33000р.
4. Рассчитайте, что выгоднее для вкладчика: получить 20 000 рублей сегодня или получить 35 000 рублей через 3 года, если процентная ставка равна 17%.
5. Какой должна быть ставка ссудного процента, чтобы 10000 рублей нарастились до 30000 рублей, за срок вклада 5 лет?
6. К 120 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 480 г раствора, содержащего 20 % той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?
7. Из сосуда, доверху наполненного 94% -м раствором кислоты, отлили 1,5 л жидкости и долили 1,5 л 70% -го раствора этой же кислоты. После этого в сосуде получился 86% раствор кислоты. Сколько л раствора вмещает сосуд?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Название практической работы: *Виды плоских фигур и их площадь. Практико-ориентированные задачи в курсе геометрии на плоскости.*

Цель работы*:*

1. Закрепить навыки построения плоских фигур и вычисления их площадей.
2. Научиться применять навыки вычисления площадей плоских фигур при решении практических задач.

Результаты:

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 01, ПРб 06, ПРб 14, ПРу 16, ПРу 19.

знания: понятие о плоских фигурах, их видах;

умения: применение основных формул для вычисления площадей и элементов плоских фигур.

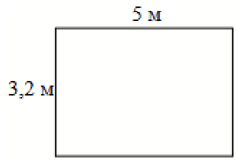
Ход работы:

Перед выполнением практической работы дайте определения следующим плоским фигурам:

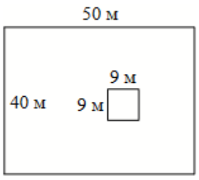
- Параллелограмм;
- Трапеция;
- Прямоугольник;
- Ромб;
- Квадрат;
- Круг;
- Треугольник;
- Шестиугольник.

Для каждой из выше перечисленных фигур запишите формулы для вычисления их площадей, а также формулы для вычисления их основных элементов.

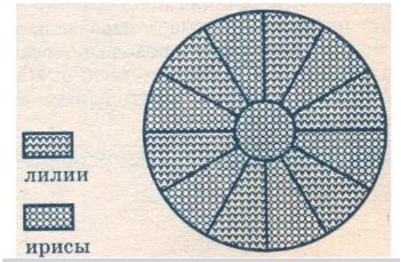
Профессионально-ориентированные задания для самостоятельной работы



Задание 1. На плане указано, что прямоугольная комната имеет площадь 16,3 кв. м. Точные измерения показали, что ширина комнаты равна 3,2 м, а длина — 5 м. На сколько квадратных метров площадь комнаты отличается от площади, указанной на плане?



Задание 2. Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 40 м и 50 м. Дом, расположенный на участке, имеет на плане форму квадрата со стороной 9 м. Найдите площадь оставшейся части участка, не занятой домом.



Задание 3. В парке планируется на круглой клумбе (вид клумбы показан на рисунке) высадить ирисы и лилии. Большая и малая окружность имеют общий центр, а все части клумбы вне малого круга равны между собой. Диаметры кругов 4м и 12м. Определите общую площадь, на которой может быть высажены ирисы.
Сколько ирисов будет высажено на такой клумбе, если на каждый квадратный метр высаживают по 25 ирисов?

Задание 4. Для встречи с друзьями мы решили заказать пиццу. Группа друзей состоит из 6 чел. На сайте пиццерии ДоДо есть следующая информация о размере пицц (см. рисунок):

Определите, какие пиццы выгоднее заказать для 6 человек, чтобы у каждый гость смог съесть не менее 2 кусков в совокупности примерно 170 см^2?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Название практической работы: *Вычисление и сравнение корней*.

Цель работы: Научиться находить значение корней.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные: ПРб 02, ПРу 06.

знания:

– Понятие корня n-ой степени.
– Основные свойства корня n-ой степени.

умения: Вычисление и сравнение корней n-ой степени, упрощение иррациональных выражений

Ход работы:

Корни натуральной степени из числа, их свойства

Корень n – степени: $\sqrt[n]{a}$, **n -** показатель корня**, а –** подкоренное выражение

Если **n – нечетное число,** то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любых а

Если **n – четное число,** то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при а ≥ 0

Арифметический корень: $\left.\begin{matrix}\sqrt[n]{a} = b \\ n \in N, a \geq 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow b \geq 0$

Корень нечетной степени из отрицательного числа: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

Основные свойства корней

1.Правило извлечения корня из произведения:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

2.Правило извлечения корня из дроби:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (a \geq 0, b > 0, b \neq 0)$$

3.Правило извлечения корня из корня:

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \ (k > 0, a \geq 0)$$

4.Правило вынесения множителя из-под знака корня:

$$\sqrt[n]{ba^n} = a\sqrt[n]{b}\,(a \geq 0, b \geq 0)$$

5.Внесение множителя под знак корня:

$$b\sqrt{3} = \begin{cases} \sqrt{3b^2}, \text{если } b \geq 0 \\ -\sqrt{3b^2}, \text{если } b \leq 0 \end{cases},$$

6.Показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить на одно и тоже число.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \ (k > 0)$$

7.Правило возведения корня в степень.

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k \ (a \geq 0, \text{если } k \leq 0, \text{то } a \neq 0)$$

Сравнение корней. Для сравнения корней различной степени необходимо воспользоваться свойством 6 и привести корни к одному показателю.

Пример 1.

Вычислить $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Пример 2.

Вычислить $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Пример 3.

Вычислить $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 3 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$.

Пример 4.

Вычислить $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{96 : 3} = \sqrt[5]{32} = 5$.

Пример 5.

Вычислить $\sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[3]{-3 \cdot 9} \cdot |-2| = \sqrt[3]{-27} \cdot 2 = -3 \cdot 2 = -6$.

Пример 6.

Вычислить $\sqrt[7]{5-\sqrt{26}} \cdot \sqrt[3]{5+\sqrt{26}} = \sqrt[7]{\left(5-\sqrt{26}\right) \cdot \left(5+\sqrt{26}\right)} = \sqrt[7]{5^2 - \sqrt{26}^2} = \sqrt[7]{25-26} = \sqrt[7]{1} = 1$.

Пример 7.

Сравнить числа: $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{4}$.

Найдём наименьшее общее кратное чисел 4 и 3-это 12, тогда $\sqrt[4]{5} = \sqrt[4\cdot3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$, $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3\cdot4]{4^4} = \sqrt[12]{256}$, т.к. $\sqrt[12]{125} < \sqrt[12]{256}$, то $\sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4}$.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Сравните числа: а) $\sqrt[5]{-5}$ и $\sqrt[3]{-3}$; б) $\sqrt[18]{\frac{3}{7}}$ и $\sqrt[18]{0{,}43}$

2. Вычислите: а) $6+\sqrt[3]{-125}$; б) $9-\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$; г) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

3. Вычислите: $\sqrt[4]{0{,}16 \cdot 0{,}81} - \sqrt{169}$.

4. Вычислите: $\sqrt[5]{160 \cdot 625}$.

5. Упростите: $2\sqrt[3]{250} - 30\sqrt[3]{2} + (3\sqrt[6]{2})^2$.

6. Вычислите: $\frac{\sqrt[4]{48} \cdot \sqrt{196}}{5\sqrt[4]{3}}$.

7. Вычислите: $\sqrt[8]{3^7 \cdot 5^{10}} \cdot \sqrt[8]{3^9 \cdot 5^6}$.

8. Вычислите: $\sqrt[3]{(13-2\sqrt{48}) \cdot (13+2\sqrt{48})} \cdot \sqrt[3]{148 \cdot 23}$.

Вариант 2

1. Сравните числа: а) $\sqrt[12]{0{,}4}$ и $\sqrt[12]{\frac{5}{12}}$ б) $\sqrt[3]{-5}$ и $\sqrt[5]{-3}$

2. Вычислите: а) $7+\sqrt[3]{-216}$; б) $9-\sqrt[4]{2401}$; в) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ г) $\frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$.

1. Вычислите: $\sqrt[4]{1{,}25\cdot 0{,}025}-\sqrt{361}$.
2. Вычислите: $\sqrt[4]{48}\cdot\sqrt[4]{27}$.
3. Упростите: $3\sqrt[4]{80}-\sqrt[4]{5}-(2\sqrt[8]{5})^2$.
4. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[5]{224}\cdot\sqrt{144}}{0{,}5\cdot\sqrt[5]{7}}$.
5. Вычислите: $\sqrt[6]{3^5\cdot 7^4}\cdot\sqrt[6]{3\cdot 7^2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Название практической работы: *Преобразование выражений, содержащих радикалы.*

Цель работы: Научиться упрощать иррациональные выражения.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов
- ***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 02, ПРу 06.

знания:

- Понятие корня n-ой степени.
- Основные свойства корня n-ой степени.

умения: Упрощение иррациональных выражений.

Ход работы:

Корень n – степени: $\sqrt[n]{a}$, n - показатель корня**, а** – подкоренное выражение

Если **n – нечетное число,** то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любых а

Если **n – четное число,** то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при $a \geq 0$

Арифметический корень: $\left.\begin{matrix}\sqrt[n]{a}=b\\ n\in N, a\geq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\geq 0$

Корень нечетной степени из отрицательного числа: $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$

Основные свойства корней

1.Правило извлечения корня из произведения:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

2.Правило извлечения корня из дроби:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad (a\geq 0, b>0, b\neq 0)$$

3.Правило извлечения корня из корня:

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}\ (k>0, a\geq 0)$$

4.Правило вынесения множителя из-под знака корня:

$$\sqrt[n]{ba^n}=a\sqrt[n]{b}\,(a\geq 0, b\geq 0)$$

5.Внесение множителя под знак корня:

$$b\sqrt{3}=\begin{cases}\sqrt{3b^2}, \text{если } b\geq 0\\ -\sqrt{3b^2}, \text{если } b\leq 0\end{cases},$$

6.Показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить на одно и тоже число.

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \sqrt[nk]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}}\ (\boldsymbol{k} > 0)$$

7.Правило возведения корня в степень.

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}} = \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{k}}\ (\boldsymbol{a} \geq \mathbf{0}, \text{если } \boldsymbol{k} \leq \mathbf{0}, \text{то } \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$$

Сложение и вычитание корней. Чтобы произвести сложение и вычитание корней, сначала корни приводят к простейшему виду, а затем выполняют приведение подобных членов

Пример 1.

Упростить выражение: $5\sqrt{125} - \sqrt{48} + \sqrt{75} - 2\sqrt{125} + 3\sqrt{12} - \sqrt{245} == 5\sqrt{25 \cdot 5} - \sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3} - 2\sqrt{25 \cdot 5} + 3\sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{49 \cdot 5} == 25\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 10\sqrt{5} + 6\sqrt{3} - 7\sqrt{5} = 7\sqrt{3} + 8\sqrt{5}$

Умножение и деление корней.

Произведение корней с одинаковыми показателями равно корню той же степени из произведения подкоренных выражений $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Частное от деления корней с одинаковыми показателями равно корню той же степени из частного от деления подкоренных выражений.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Если показатели корней различны, то сначала нужно привести их к общему показателю, а затем произвести умножение и деление.

Если корни имеют коэффициенты, то их перемножают или делят отдельно и результат пишут перед общим корнем

Пример 2.

Найти значение выражения: $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 3 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = 2 \cdot 3 = 6$

Пример 3.

Найти значение выражения: $\sqrt[4]{\frac{16}{0{,}625}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{0{,}625}} = \frac{2}{0{,}5} = 4$

Пример 4.

Найти значение выражения:$\frac{1}{2}\sqrt{8} \cdot 3\sqrt{32} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 2} \cdot 3\sqrt{16 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{2} = 12 \cdot 2 = 24$

Пример 5.

Упростить выражение: $\sqrt[4]{\frac{a^3b^4}{c^2p^6}} : \sqrt[4]{\frac{c^6p^6}{a^5b^4}} = \sqrt[4]{\frac{a^3b^4a^5b^4}{c^2p^6c^6p^6}} = \sqrt[4]{\frac{a^8b^8}{c^8p^{12}}} = \frac{a^2b^2}{c^2p^3}$

Возведение корней в степень. При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, а показатель степени оставить без изменения. Если корень имеет коэффициент, то его отдельно возводят в эту степень и результат возведения записывают как коэффициент при самом корне.

Пример 6:

Упростить выражение: $\left(\sqrt[5]{a^{10}b^{-15}}\right)^3 = \sqrt[5]{a^{30}b^{-45}} = \sqrt[5]{\frac{a^{30}}{b^{45}}} = \frac{a^6}{b^9}$

Избавление от иррациональности в знаменателе дроби. Для этого нужно знаменатель и числитель дроби умножить на такое выражение, которое в произведении со знаменателем дает рациональное выражение в знаменателе.

Пример 7:

Избавиться от иррациональности в знаменателе**:**

$$\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}^2-\sqrt{2}^2}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

Извлечение корня из корня. При извлечении корня из-под корня показатели корней перемножают, а подкоренное выражение оставляют без изменения. Если корень имеет коэффициент, то обычно до извлечения из данного корня нового корня вводят коэффициент под знак радикала данного корня.

Пример 8.

Упростить выражение: $\sqrt[3]{4x\sqrt{4x^{10}y^{18}}}=\sqrt[3]{\sqrt{4^2x^24x^{10}y^{18}}}=\sqrt[6]{4^3x^{12}y^{18}}=\sqrt{4}xy^3=2xy^3$

Сравнение корней. Для сравнения корней различной степени необходимо воспользоваться свойством 6 и привести корни к одному показателю.

Пример 9.

Сравнить числа: $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{4}$.

Найдём наименьшее общее кратное чисел 4 и 3-это 12, тогда $\sqrt[4]{5}=\sqrt[4\cdot3]{5^3}=\sqrt[12]{125}$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3\cdot4]{4^4}=\sqrt[12]{256}$, т.к. $\sqrt[12]{125}<\sqrt[12]{256}$, то $\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}$.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Упростите выражение $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

2. Внесите множители под знак корня, если $a>0$ и $b>0$: $-2a^2b\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

3. Вынесите множители под знак корня, если $a>0$: $\sqrt[5]{-32a^{17}}$.

4. Вычислите: а) $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{7})(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{49})$; б) $\sqrt[4]{312^2+2\cdot312\cdot313+313^2}$; в) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}$.

5. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби: а) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+1}$**;** в) $\frac{3}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1}$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})$.

2. Внесите множители под знак корня, если $a>0$ и $b>0$: $3ab^2\sqrt[4]{\frac{b}{a^7}}$.

3. Вынесите множители под знак корня, если $a>0$: $\sqrt[6]{128a^{25}}$.

4. Вычислите: а) $(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})$; б) $\sqrt[4]{800^2-2\cdot800\cdot175+175^2}$; в) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}$.

5. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби: а) $\frac{3}{\sqrt[3]{16}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}-1}$ **;** в) $\frac{5}{\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{6}+1}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Название практической работы: *Преобразование выражений, содержащих степени с* *рациональными показателями.*

Цель работы: Научиться преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональными показателями.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов
-
-

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 02, ПРб 04, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08.

знания:

- Понятие натуральной, целой и рациональной степени.
- Свойства степеней.

умения:

- Представление рациональной степени корнем.
- Применение свойств степеней и корней для упрощения выражений, содержащих степени с рациональными показателями.

Ход работы:

Степенью числа $a>0$ с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m-целое число, а n-натуральное ($n>1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$. Итак, по определению $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ **.**

Пример 1. $7^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7};\quad 2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32};\quad a^{-\frac{7}{15}}=\sqrt[15]{a^{-7}}.$

Свойства степени с рациональным показателем, где r,s-рациональные числа, $a>0, b>0$.

1. $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$

2. $a^r:a^s=a^{r-s}$

Пример 2. $\sqrt[40]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=\sqrt{2^3\cdot 5}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=2^1\cdot 5^1=10.$

3. $(a^r)^s=a^{r\cdot s}$

4. $(a\cdot b)^r=a^r\cdot b^r$

Пример 3. $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}).$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$

6. Пусть r – рациональное число и $0<a<b$, тогда $a^r<b^r$ при $r>0$ и $a^r>b^r$ при $r<0$.

Пример 4. $\left(1\frac{11}{25}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(4\frac{17}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{36}{25}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{36^{\frac{1}{2}}}{25^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}}\cdot\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}=2$

7. Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r>s$ следует что, $a^r>a^s$ при $a>1$ и $a^r<a^s$ при $0<a<1$.

Замечание. При $a<0$ рациональная степень числа а не определяется.

Пример 5. Сравните числа $\sqrt[5]{8}$ *и* $2^{\frac{2}{3}}$**.**

$\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac{3}{5}}$ и $2^{\frac{2}{3}}$ по 7 свойству получаем $2^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{3}{5}}$, так как $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$**.**

Задания для самостоятельной работы:

1. Представьте $\sqrt[8]{4^5}$, $\sqrt[13]{b^{-7}}$, $\sqrt[7]{3b}$ в виде степени с рациональным показателем.

2. Представьте в виде корня из числа $3^{1,2}$.

3. Найдите значение числового выражения а) $8^{\frac{1}{2}}:(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{2}})$, б) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5}\cdot\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$**.**

4. Разложите на множители $(3x)^{\frac{1}{2}}-(5x)^{\frac{1}{2}}$.

5. Сравните числа $\sqrt[7]{3^3}$ *и* $3^{\frac{19}{8}}$ **.**

6. Найдите значение выражения $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75}$; $\sqrt[3]{100}\cdot(\sqrt{2})^{\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$.

7. Разложите на множители $c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}$; $4-4^{\frac{1}{3}}$.

8. Упростите выражение $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Название практической работы: *Преобразование выражений, содержащих степени с действительными показателями.*

Цель работы: Научиться преобразовывать выражения, содержащие степени с действительными показателями.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 02, ПРб 04, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08.

знания:

– Понятие натуральной, целой, рациональной и действительной степени.
– Свойства степеней.

умения: Применение свойств степеней и корней для упрощения выражений, содержащих степени с действительными показателями

Ход работы:

Свойства степени с действительным показателем

1. $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$, где $\boldsymbol{a \neq 0, n} > 0$

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

3. $\boldsymbol{a^0 = 1}$, где $\boldsymbol{a \neq 0}$. Если $\boldsymbol{a = 0}$, то $\boldsymbol{0^0}$ не имеет смысла

4. $\boldsymbol{a^1 = a}$

5. $\boldsymbol{a^r = a^{\frac{m}{n}} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$

6. $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

7. $\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$

8. $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$

9. $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

10. $\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^n}{b^n}$

11. Пусть r действительное число $0 < a < b$, тогда

$\boldsymbol{a^r < b^r}$ ***при r>0*** $\boldsymbol{a^r > b^r}$ ***при r<0***

12. Для любых действительных чисел r и s из неравенства r>s следует

$\boldsymbol{a^r > a^s}$ ***при a>1*** $\boldsymbol{a^r < a^s}$ ***при*** $0 < a < 1$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1.Вычислить: а) $2^{-3} \cdot 64^{\frac{1}{2}} - 64^{\frac{1}{3}} : 2^{-4}$; б) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

2.Упростить выражение при $a > 0$, $b > 0$: а) $\dfrac{a^{-3}\sqrt[3]{a^6b^2}}{\sqrt[3]{b}}$; б) $\left(\dfrac{1}{a^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} \cdot a^{\sqrt{2}+1}$.

3.Сократить дробь $\dfrac{a-7\sqrt{a}}{a-49}$.

4. Сравнить числа: а) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{7}{8}\right)^3}$ и $\sqrt[4]{\left(\dfrac{15}{16}\right)^3}$; б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ и 1.

Вариант 2

1.Вычислить: а) $8^{\frac{1}{3}} : 2^{-1} + 3^{-2} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt[5]{17-\sqrt{46}} \cdot \sqrt[5]{17+\sqrt{46}}$.

2.Упростить выражение при $a > 0$, $b > 0$: а) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{b^{-4}\sqrt[4]{b^8a^3}}$; б) $\left(b^{\sqrt{3}+1}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \dfrac{1}{b^{4+\sqrt{3}}}$.

3.Сократить дробь $\dfrac{8\sqrt{b}+b}{b-64}$.

4.Сравнить числа: а) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{3}{7}\right)^4}$ и $\sqrt[5]{\left(\dfrac{5}{14}\right)^4}$; б) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\pi}$ и 1.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

Название практической работы: *Вычисление и сравнение степенных выражений.*

Цель работы*:* Научиться упрощать степенные и иррациональные выражения.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 02, ПРб 04, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08.

знания:

- Понятие корня n-ой степени.
- Основные свойства корня n-ой степени.
- Понятие натуральной, целой, рациональной и действительной степени.
- Свойства степеней.

умения: Упрощение иррациональных и степенных выражений.

Ход работы:

Вариант 1

1. Запишите в виде степени с рациональным показателем:

а) $\sqrt[4]{27}$; б) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^2}$.

2. Запишите с помощью радикалов:

а) $3^{-\frac{6}{5}}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{10}{3}}$.

3. Упростите:

а) $a^5a^7a^{12}$; б) $a^{-2}a^3a^{-5}$.

4. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{0{,}0625}-\sqrt[5]{-243}$; б) $16^{\frac{5}{4}}$; в) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; г) $243^{0.4}$; д) $\sqrt[6]{4^5\cdot 5^{17}}\cdot\sqrt[6]{4^7\cdot 5}$.

5. Вычислите:

а) $4^{0,5}\cdot(81)^{-\frac{1}{4}}$; б) $\dfrac{81^{-\frac{3}{4}}+27^{-\frac{4}{3}}}{3\cdot 9^{-1.5}-27^{-1}}$; в) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.5}+16^{0.75}-(0.5)^{-5}+\left(-\frac{3}{7}\right)^0\cdot 5$.

6. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби: $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

7.Найдите значение выражения $\sqrt{40\sqrt{12}}-4\sqrt[4]{75}$.

8. Расположите в порядке убывания следующие числа: $\sqrt{2};\sqrt[3]{3};\sqrt[6]{5}$.

9. Упростите выражение: $\sqrt{\sqrt[9]{a^6}}+\dfrac{2a}{\sqrt[3]{a^2}}$.

10.Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{x}+4\right)^2-16\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}}$ и найдите его значение при $x=\dfrac{16}{81}$.

Вариант 2

1. Запишите в виде степени с рациональным показателем:

а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}}$.

2. Запишите с помощью радикалов:

а) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{10}{3}}$; б) $2^{\frac{1}{3}}$.

3. Упростите:

а) $\left(b^{-1}b^{3}\right)b^{-3}$; б) $2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}$.

4. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-0{,}343}+\sqrt[6]{729}$; б) $256^{\frac{5}{4}}$; в) $\left(\dfrac{4^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; г) $1024^{0.4}$; д) $\dfrac{\sqrt[7]{2^{20}\cdot 5^{10}}}{\sqrt[7]{2^{6}\cdot 5^{3}}}$.

5. Вычислите:

а) $8^{\frac{1}{3}}:81^{0,75}$; б) $9^{\frac{3}{2}}+27^{\frac{2}{3}}-\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$; в) $\dfrac{5^{\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{6}}}$.

6.Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби: $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$.

7. Найдите значение выражения $6\sqrt[4]{75}-2\sqrt{15\sqrt{27}}$.

8. Расположите в порядке возрастания следующие числа: $\sqrt[3]{3}; \sqrt{5}; \sqrt[6]{6}$.

9. Упростите выражение: $\sqrt{\sqrt[10]{a^4}}-\dfrac{3a}{\sqrt[5]{a^4}}$.

10. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)^2+8\sqrt[3]{x}}}{\frac{\sqrt[3]{-x}}{2}-1}$ и найдите его значение при $x=-32$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

Название практической работы: *Исследование свойств и построение графика степенной функции.*

Цель работы: научиться строить графики степенных функций.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 02, ПРб 04, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08.

знания:

- Понятие степенной функции.
- Понятие о свойствах степенной функции.

умения: Построение графиков степенных функций.

Ход работы:

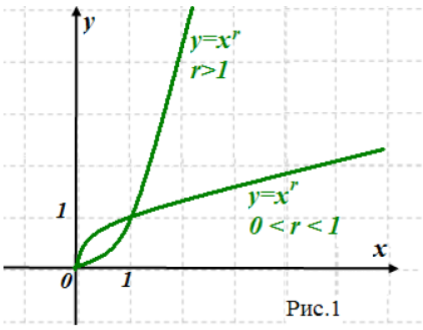


Рис.1

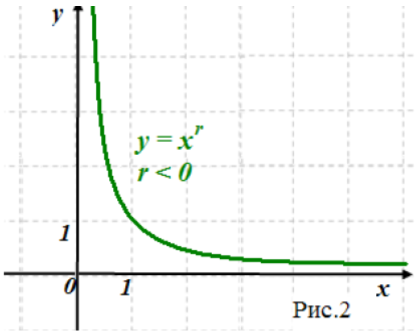
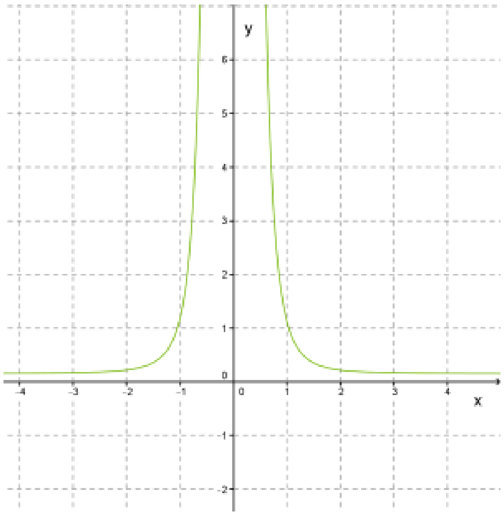


Рис.2

Степенной функцией называют функцию вида $y=x^{r}$, где r- любое действительное число. Графиком степенной функции $y=x^{n}$ с натуральным показателем является *парабола* n-го порядка, при четном n ее график симметричен относительно оси ординат, при нечетном n - относительно начала координат.



Рассмотрим степенную функцию $y=x^{r}$, $r=\frac{m}{n}$, $\frac{m}{n}>1$.

Графиком ее является кривая - ветвь параболы

Рассмотрим график функции $y=x^{\frac{m}{n}}$, $0<\frac{m}{n}<1$

Рассмотрим график функции $y=x^{-\frac{m}{n}}$

График данной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную асимптоту $x= 0$.

Если показатель степени — целое отрицательное число, то степенная функция задаётся формулой $y=x^{-n}$ или $y=1/x^{n}$

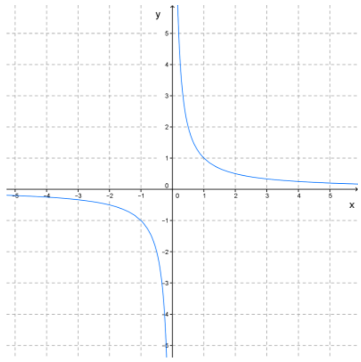


График степенной функции $y=x^{-n}$, в случае, когда n — чётное число принимает вид:

Например, такой вид принимают графики функций $y=x^{-4}$, $y=x^{-8}$.

График степенной функции $y=x^{-n}$, в случае, когда n — нечётное число принимает вид гиперболы:

Например, такой вид принимаю графики функций $y=x^{-5}$, $y=x^{-11}$

Задания для практической работы:

1. Изобразить схематически график функции, указать ее область определения и множество значений:

1.	$y=\sqrt{x^5}$	3.	$y=x^{0,7}$	5.	$y=x^{\frac{1}{4}}$
2.	$y=x^7$	4.	$y=x^{-5}$	6.	$y=\sqrt[3]{x}$

2. Постройте график квадратичной функции, укажите множество значений данной функции.

1. $y=(x-3)^2-2$
2. $y=-(x+3)^2-2$
3. $y=(x-4)^2-7$

3. Постройте график функции, определите, возрастает или убывает указанная функция.

1. $y=-x^3-1$
2. $y=-(x+2)^3$
3. $y=x^3+2$

4. Постройте график функции, ответьте на вопрос задачи.

1. $y=\sqrt{x+2}-1$, укажите наименьшее значение функции.
2. $y=\sqrt{x-1}+2$, укажите наименьшее значение функции.
3. $y=\sqrt{x+3}+1$, укажите наименьшее значение функции.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

Название практической работы: *Решение иррациональных уравнений*.

Цель работы: Научиться решать иррациональные уравнения.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные**:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные**:** ПРб 02, ПРб 04, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08.

знания: Основные методы решения иррациональных уравнений и неравенств.

умения: Применение основных методов решения иррациональных уравнений и неравенств.

Ход работы:

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

Основная идея решения иррационального уравнения состоит в сведении его к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. При решении иррациональных уравнений применяют **метод возведения в степень** обоих частей уравнения и метод введения новой переменной (замены переменной).

Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному.

При возведении уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. В связи с этим возможно появление посторонних решений уравнения, но не возможна потеря корней. В этом случае обязательна **проверка** найденных корней подстановкой в исходное уравнение.

Мощным средством решения иррациональных уравнений является **метод введения новой переменной,** или **"метод замены".** Метод обычно применяется в случае, если в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины. Тогда имеет смысл обозначить это выражение какой-нибудь новой буквой и попытаться решить уравнение сначала относительно введенной неизвестной, а потом уже найти исходную неизвестную. В ряде случаев удачно введенные новые неизвестные иногда позволяют получить решение быстрее и проще; иногда же без замены решить задачу вообще невозможно.

Иногда удобнее решать иррациональные уравнения, определив область допустимых значений и используя равносильные переходы.

Рассмотрим применение данных методов решения иррациональных уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{7x-6}=x$

Решение. Возведем обе части этого уравнения в квадрат и получим: $7x-6= x^2$. Решаем квадратное уравнение: $x^2- 7x+ 6 =0$

D =25, $x_1=6$, $x_2=1$.

Проверяем полученные результаты, подставляя в начальное условие:

$\sqrt{7\cdot 6-6}$ =6 верно

$\sqrt{7\cdot 1-6}$ =1 верно

Ответ: 6 и 1

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}$

Решение. Возведем обе части в квадрат: $\left(\sqrt{2x-3}\right)^2= \left(\sqrt{x-2}\right)^2$

2x-3=x-2

2x-x= 3-2

x=1

Проверка: $\sqrt{2\cdot 1-3}=\sqrt{1-2}$ не сеществует, следовательно x=1 посторонний корень. Данное уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[3]{2x+7}=\sqrt[3]{3x-3}$

Решение: $\left(\sqrt[3]{2x+7}\right)^3=\left(\sqrt[3]{3x-3}\right)^3$

2x+7=3x-3

2x-3x=-3-7

x=10

В данном случае проверка необязательна, так как использовался метод возведения обеих частей в нечётную степень, при которой посторонние корни не появляются.

Ответ:10

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{13-3x}$ = x+3

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат $\left(\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{13-3x}\right)^2= (x+3)^2$;

$(x+6)\cdot(13-3x) = (x+3)^2$;

$13x- 3x^2+78 -18x = x^2 + 6x +9$;

$4x^2 +11x -69 =0$;

$x_1= 3$; $x_2=-\frac{23}{4}$.

Проверка: $x_1= 3$: $\sqrt{3+6}\cdot\sqrt{13-9}$ =3+3; 6 = 6

$x_2=-\frac{23}{4}$: $\frac{11}{4}\neq-\frac{11}{4}$; посторонний корень.

Ответ: 3

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{2x+1}+\sqrt[4]{2x+1}$ =12

Решение. Введем новую переменную. Пусть $\sqrt[4]{2x+1}$= y, тогда $\sqrt{2x+1}=y^2$.

Получаем новое уравнение: $y^2 +y -12=0$; $y_1=3$; $y_2=- 4$.

1) $\sqrt[4]{2x+1}$ =3 ;

$2x +1= 3^4$;

x=40.

2) $\sqrt[4]{2x+1}$= - 4. Уравнение не имеет корней, так как $\sqrt[4]{2x+1}\geq 0$, а число $-4< 0$.

Ответ: 40.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}$ - 2= 0.

Решение. Пусть $\sqrt[8]{x}$ = y, $\sqrt[4]{x} = y^2$.

Получим $y^2 + y - 2 = 0$; $y_1 = -2$; $y_2 = 1$.
1) $\sqrt[8]{x} = 1$, $x = 1$
2) $\sqrt[8]{x} = -2$, не имеет корней, т.к. $\sqrt[8]{x} \geq 0$.
Ответ: 1.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{x-10} + \sqrt{1-x} = 6$.

Решение. Область допустимых значений неизвестного (ОДЗ) определяется системой неравенств $\begin{cases} x - 10 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 1. \end{cases}$ которая решений не имеет. Уравнение не определено в множестве действительных чисел.

Ответ: нет решений.

Задания для практической работы:

Решить уравнения:

1. $\sqrt{3x-5} = \sqrt{9-7x}$
2. $\sqrt{6x-11} = x - 1$
3. $-x - 5 = \sqrt{7x = 23}$
4. $\sqrt{2-x^2} - \sqrt{x} = 1$
5. $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 20$
6. $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$
7. $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1} = 0$
8. $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$
9. $\sqrt{2x+7} - 2 = x$
10. $\sqrt{x+13} = 12 - \sqrt[4]{x+13}$
11. $\sqrt{16 - \sqrt{x+1}} = 4$
12. $\sqrt{2-x} = 2x + 6$.
13. $\sqrt{2x^2 - x + 6} = 5 + 2x$.
14. $7 - \sqrt{x+1} = 2$
15. $\sqrt{6+x} \cdot \sqrt{6-x} = x$
16. $\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{5-x} = 2\sqrt{2}$
17. $18 - \sqrt{x+2} = 12$
18. $5 + \sqrt{x-1} = 3$
19. $\sqrt{3x = 7} - 3 = x$
20. $6 + \sqrt{5x-7} = 2$
21. $\sqrt[3]{x-2} = -2$
22. $\left(3 - \sqrt{x-2}\right) \cdot \left(4 - \sqrt{2x-1}\right) = 0$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

Название практической работы: *Решение иррациональных неравенств.*

Цель работы*:* Научиться решать иррациональные неравенства.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 02, ПРб 04, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08.

знания: Основные методы решения иррациональных уравнений и неравенств.

умения: Применение основных методов решения иррациональных уравнений и неравенств.

Ход работы:

Под **иррациональным неравенством** понимают неравенство, в котором неизвестные величины находятся под знаком корня.

Способ решения таких неравенств состоит в преобразовании их к рациональным неравенствам путем **возведения обеих частей неравенства в степень**.

Решение иррациональных неравенств осложняется тем обстоятельством, что здесь исключена возможность проверки, в связи с этим необходимо стараться делать все преобразования равносильными.

При решении иррациональных неравенств нужно запомнить правило:

- *при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, равносильное данному неравенству;*

- *если обе части неравенства возводят в чётную степень, то получится неравенство, равносильное исходному только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.*

Но если при решении уравнений в результате возведения четную степень мы могли получить посторонние корни (которые, как правило легко проверить) и не могли потерять корни, то корни неравенства при бездумном возведении в четную степень могут одновременно и теряться, и приобретаться.

Иррациональное неравенство $\sqrt{f_{(x)}} < g(x)$ или $\sqrt{f_{(x)}} \leq g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

Иррациональное неравенство $\sqrt{f_{(x)}} > g_{(x)}$ или $\sqrt{f_{(x)}} \geq g_{(x)}$ равносильно совокупности двух систем неравенств: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ *или* $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$

В связи с этим основным методом решения иррациональных неравенств является сведение исходного неравенства к равносильной системе или совокупности систем рациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{5x-9} < -4$.

Решение. Заметим, что правая часто этого неравенства отрицательна, в то время как левая часть неотрицательна при всех значениях x, при которых она определена. В связи с этим неравенство решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{5x-9}$ <4.

Решение. Область определения данного неравенства 5x-9≥0, x ≥ 1,8.

Обе части неравенства неотрицательны, возведем их в квадрат: 5x-9< 16, x < 5.

Найдем пересечение полученного множества решений с областью определения неравенства, получим 1,8 ≤x <5.

Ответ : $[1{,}8;\ 5)$

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{3-x} \geq 7$.

Решение. Область определения данного неравенства 3-x ≥0, x≤3.

Обе части неравенства неотрицательны, возведем их в квадрат: 3-x≥ 49, -x ≥ 46, x ≤ -46.

Найдем пересечение полученного множества решений с областью определения неравенства, т.е. решение системы: $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq -46 \end{cases}$. Имеем два неравенства с одинаковым знаком, вспомним: «меньше меньшего», итак $x \leq -46$.

Ответ: $(-\infty;\ -46)$.

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{6x+3} < 3x$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} 6x+3 \ge 0, \\ 3x \ge 0, \\ 6x+3 < (3x)^2 \end{cases}$

Найдем решения каждого из неравенств:

1) $6x + 3 \ge 0$, $x \ge -0{,}5$.

2) $3x \ge 0$, $x \ge 0$.

3) $6x+3 < (3x)^2$, $-9x^2+6x+3<0$, $3x^2-2x-1>0$, решаем квадратное уравнение, находим $x_1=1$, $x_2=-1/3$. Применим метод интервалов: $x< -1/3$, $x>1$.

Запишем решения системы: $\begin{cases} x \ge -0{,}5, \\ x \ge 0, \\ x < -\frac{1}{3} \text{ и } x > 1. \end{cases}$ Получаем $x>1$.

Ответ: $(1;\ +\infty)$.

Задания для практической работы:

Решить неравенства.

1. $x + 1 > x-1$,
2. $\sqrt{7-5x} > 3$,
3. $\sqrt{-3x-4} < 1$,
4. $\sqrt{4x+7} \le 5$,
5. $\sqrt{9+2x} \le 4$,
6. $\sqrt{6x-8} \le -6$,
7. $\sqrt{3-x} > x-1$,
8. $\sqrt{2x+3} < x$,
9. $5 + \sqrt{x-1} \le 3$,
10. $\sqrt{2x+7} - 2 \ge x$
11. $\sqrt{6x-11} < x-1$
12. $\sqrt{x+2} \ge 6$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

Название практической работы: *Исследование свойств и построение графика показательной функции.*

Цель работы*:* научиться строить графики показательных функций.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные**:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные**:** ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08.

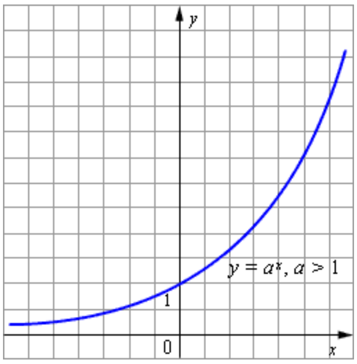
знания:

- Понятие показательной функции.
- Понятие о свойствах показательной функции.

умения: Построение графиков показательных функций.

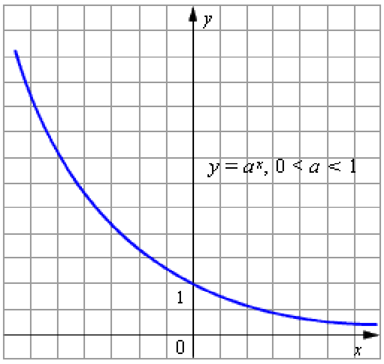
Ход работы:

Основные свойства показательной функции $y = a^x$ при $a >1$:



1. Область определения функции − вся числовая прямая
2. Область значений функции − промежуток $(0; +\infty)$
3. Функция строго монотонно возрастает на всей числовой прямой, то есть, если $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$
4. График показательной функции с основанием a >1 изображён на рисунке 1.

Основные свойства показательной функции y = a ^{x} при 0< a <1 :



1. Область определения функции − вся числовая прямая.
2. Область значений функции − промежуток $(0; +\infty)$
3. Функция строго монотонно убывает на всей числовой прямой, то есть, если $x_1 < x_2$,то $a^{x_1} > a^{x_2}$
4. График показательной функции с основанием *0< a <1* изображён на рисунке *2.*

Задания для практической работы:

1. Ответьте на вопросы:

а) Почему функция $y=a^x$ называется показательной?

б) Какие значения может принимать переменная х?

в) Почему при $a \le 0$ показательная функция не определена?

г) Из приведенных ниже функций укажите показательную:

1) у=4х-1
2) $y = (\frac{4}{11})^x$
3) $y=x^7$
4) $y = \frac{1}{x^5}$

д) При каких значениях x выражении 5^x меньше 1?

1) $x>0$
2) $x<0$
3) $x>1$
4) $x<1$

е) Из приведенных ниже функций укажите убывающие:

1) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{-x}$
2) $y = \left(\frac{e}{3}\right)^{-x}$
3) $y = \left(4 - \sqrt{7}\right)^{-x}$
4) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{x}$

2. а). Заполните таблицу значений для каждой функции $y=2^x$, $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	*-3*	*-2*	*-1,5*	*-1*	*-0,5*	*0*	*0,5*	*1*	*1,5*	*2*	*3*

y

б) Постройте по данным таблиц в одной системе координат графики указанных функций (работайте разным цветом)

3.Сделайте выводы по результатам построений;

а) Областью определения показательной функции является ______________, поэтому ее график обладает свойством ________________________

б) График любой показательной функции расположен в __________________ , поэтому любая показательная функция принимает только_________________________ значения.

в) При любом а график показательной функции проходит через точку ______________, потому что _____________________

г) Монотонность показательной функции зависит от ___________________: функции $y=a^x$ является возрастающей при _________________ и убывающей при ___________________

д) Показательная функция не обладает свойствами ______________________

е) Графики двух показательных функций симметричны относительно оси ординат, если основания степеней __________________________

4. На основе сделанных выводов изобразите схематично в одной системе координат графики функций а) $y=2{,}5^x$ *и* $y=4^x$ б) $y=1{,}5^x$ *и* $y=(2/3)^x$.

Опишите свойства каждой из них.

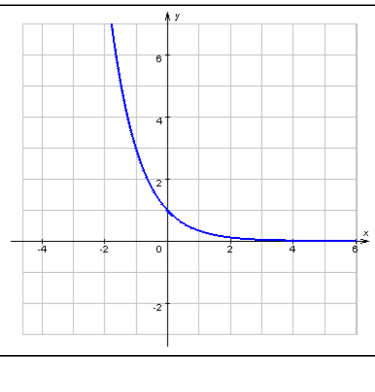
5. Ответьте на вопросы:

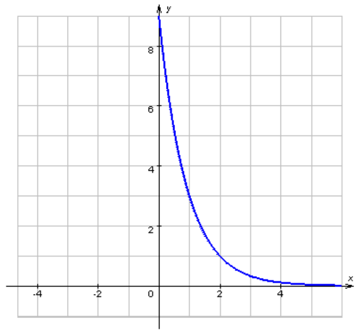
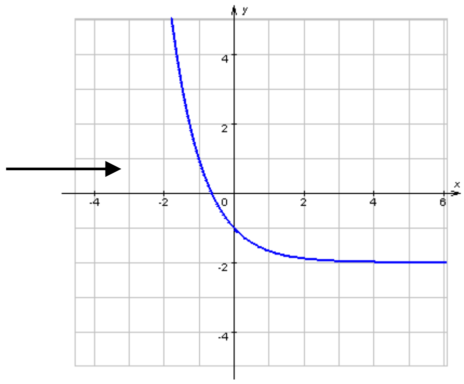
а) Почему $3{,}4^{0,2} \prec 3{,}4^{0,6}$, а $\left(\frac{3}{4}\right)^{0,2} \succ \left(\frac{3}{4}\right)^{0,6}$

б) Почему $3{,}4^{0,2} > 1$, а $\left(\frac{3}{4}\right)^{0,2} < 1$

в) Почему при решении уравнения $2^x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$ достаточно решить уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$, а при решении неравенства $2^x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) < 0$ можно перейти к неравенству $x^2 - 3x + 2 < 0$?

6.Построить график показательной функции (образец)

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ «Основной» график	

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ <u>Параллельный перенос (сдвиг)</u> вдоль оси ОХ вправо на 2 единичных отрезка	
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-2$ <u>Параллельный перенос (сдвиг)</u> вдоль оси ОУ вниз на 2 единичных отрезка	

Построить схематически графики следующих функций.

1. $y = 5^x$
2. $y = 5^{x-1}$
3. $y = 5^x - 1$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

Название практической работы: *Решение показательных уравнений и неравенств.*

Цель работы: Закрепить навыки решения показательных уравнений и неравенств.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08.

знания: Основные методы решения показательных уравнений и неравенств;

умения: Применение основных методов решения показательных уравнений и неравенств.

Ход работы:

Уравнение, в котором переменная содержится в показателе степени, называется **показательным**.

Простейшее показательное уравнение – это уравнение вида $\mathbf{a^x = b}$**,** где $a>0$, $a\neq1$

Уравнение $a^x=b$ не имеет корней, если $b<0$.

При любых действительных значениях x и y справедливы равенства:

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x, \qquad a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad a^x : a^y = a^{x-y}$$

Способы решения показательных уравнений:

1. Уравнивание оснований.

2. Вынесение общего множителя за скобки.
3. Введение вспомогательной переменной (замена переменной).
4. Разложение на множители.

Пример1. Решить уравнения:

а) $3^{3x-3}=27$

Решение. Так как $27=3^3$, топ перепишем уравнение: $3^{3x-3}=3^3$. Уравнение сводится к уравнению $3x-3=3$, решив это уравнение, получим $x=2$.

Ответ: 2.

б) $(\frac{2}{3})^{2x+0,2}=\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$.

Решение: $(\frac{2}{3})^{2x+0,2}=\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$; Тогда уравнение можно переписать: $(\frac{2}{3})^{2x+0,2} = (\frac{2}{3})^{\frac{1}{5}}$;

$2x+0,2= 0,2$; $\Rightarrow x=0$.

Ответ: 0.

Пример 2. $2\cdot 3^{x+1} - 3^{x}=15$ (метод вынесения общего множителя за скобки)

Решение: $2\cdot 3^x\cdot 3 - 3^x = 15$; $\Rightarrow 3^x(2\cdot 3- 1) = 15$; $\Rightarrow 3^x \cdot 5= 15$; $\Rightarrow 3^x = 3$; $\Rightarrow x = 1$

Ответ: 1.

Пример 3. $9^{x} - 8\cdot 3^{x} - 9=0$ (метод введения новой переменной)

Решение: $3^{2x} - 8\cdot 3^{x} - 9 =0$; $3^x= t>0$; $t^2 - 8 t - 9 = 0$; $D = 64 + 36 = 100$; $x_1 = 9$; $x_2 = -1$; $3^x = 9$; $x=2$; $3^x= -1<0$; решений нет

Ответ: 2.

Задания для самостоятельной работы

Работа на «3»
1. $3^{x^2-x}=9$;
2. $2^{x-1}+2^{x+2}=36$;
3. $25^x+ 2\cdot 5^x-3=0$;

Работа на «4»
1. $2^{x+2}+2^x=5$;
2. $9^x-6\cdot 3^x-27=0$;
3. $2^{2-x}-2^{x-1}=1$;
4. $3^{x+2}+ 3^x= 30$;

Работа на «5»
1. $9^x-2\cdot 3^x=63$;
2. $5^x-(\frac{1}{5})^{x-1}=4$;
3. $2^{x^2-3x}=\frac{1}{4}$;
4. $5^x-5^{x-2}= 600$;
5. $9^x+3\cdot 3^x-4 = 0$;

Показательным неравенством называется неравенство, в котором неизвестное входит в показатель степени.

1.Решение показательных неравенств часто сводится к виду $a^{f(x)}< a^{g(x)}$ ($a^{f(x)}> a^{g(x)}$), которые решаются с помощью свойств показательной функции:

если $a>1$, то показательная функция *возрастающая* (большему значению функции соответствует большее значение аргумента), т.е. $a^{f(x)}> a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$;

если $0<a<1$, то показательная функция *убывающая* (большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента), т.е. $a^{f(x)}> a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$.

Пример 1: $2^{5x}> 2^3$ $y=2^t$ возрастающая ($2>1$) $\Rightarrow 5x>3$ $x>3/5$

Ответ: $(3/5; \infty)$

2.Способ подстановки (введение новой переменной).

Пример 2:

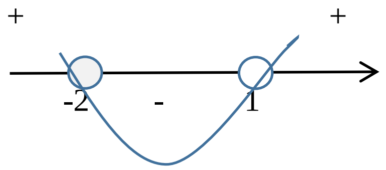
$16^x+ 4^x - 2 > 0$

$4^{2x}+ 4^x - 2 > 0$

обозначим $4^x= t >0 \Rightarrow t^2+ t - 2 > 0$

$t^2+ t - 2 =0$

по теореме Виета: $\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = -2 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \\ t_2 = 1 \end{array} \right.$



$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x < -2 \\ 4^x > 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{нет решений} \\ 4^x > 4^0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ (т.к. 4>1, то показательная функция $y = 4^x$ возрастающая)$\Rightarrow$ *x>0*

Ответ: (0 ; ∞).

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения и неравенства:

1. $9^x-2\bullet 3^x=63$;
2. $5^x-(\frac{1}{5})^{x-1}=4$;
3. $2^{x^2-3x}=\frac{1}{4}$;
4. $5^x-5^{x-2}= 600$;
5. $9^x+3\bullet 3^x-4 = 0$;
6. $2^{x^2-8x+18} > 8$
7. $(\frac{1}{3})^x \geq 27$;
8. $(\sqrt{6})^x \leq \frac{1}{36}$;
9. $0{,}2^x \leq \frac{1}{25}$;
10. $1{,}5^x < 2{,}25$.
11. $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x > 0$
12. $2^{x^2} > (\frac{1}{2})^{2x-3}$
13. $\pi^x - \pi^{2x} \geq 0$
14. $(\frac{1}{25})^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3{,}75}$
15. $(\frac{1}{4})^{10x} > 64^{2\frac{2}{3}-x^2}$
16. $3^{4x+3} \leq (\frac{1}{9})^{\frac{x^2}{2}}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

Название практической работы: *Применение показательной и степенной функций в прикладных задачах технологического профиля.*

Цель работы: Научиться использовать графики и свойства показательной и степенной функций для решения прикладных задач.

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 01, ПРб 04, ПРб 05, ПРб 06, ПРб 14, ПРу 08, ПРу 17, ПРу19.

знания: Показательная и степенная функции, их свойства и графики;

умения: Применение основных свойств и графиков степенных и показательных функций для решения прикладных задач.

Ход работы:

1) Используя различные источники информации, найдите формулы, описывающие следующие процессы:

– Рост различных микроорганизмов, бактерий, дрожжей и ферментов …

– Давление воздуха изменяется по закону …

– Закон роста древесины …
– Процесс изменения температуры чайника при кипении …
– Закон поглощения света средой …

2) Известно утверждение, что количество информации удваивается каждые 10 лет, запишите формулу соответствующую этому. Изобразите это наглядно.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18

Название практической работы: *Вычисление и сравнение логарифмов.*

Цель работы: закрепить понятие логарифма, научиться вычислять логарифмы.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

–

–

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 02, ПРб 03, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08

знания:

– Определение логарифма.
– Понятие о свойствах логарифма.

умения: Вычисление логарифмов, сравнение логарифмов.

Ход работы:

Определения

Логарифмом числа b по основанию a называется такое число, обозначаемое $\log_a b$, что $a^{\log_a b} = b$. Т.е. $a^x = b \leftrightarrow x = \log_a b$.
a – основание логарифма, $a > 0, a \neq 1, b > 0$

Десятичный логарифм: $\lg b = \log_{10} b$.
Натуральный логарифм: $\ln b = \log_e b$, где e=2,71828…
Функция, заданная формулой $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1, x \in R$, называется логарифмической

Найти логарифм – это значит найти **показатель степени**, в которую надо возвести **основание логарифма**, чтобы получить **стоящее под логарифмом число**.

$$\log_2 16 = 4 \text{ поскольку } 2^4 = 16 \quad \log_3 81 = 4 \text{ поскольку } 3^4 = 81$$

$$\log_2 32 = 5 \text{ поскольку } 2^5 = 32 \quad \log_3 243 = 5 \text{ поскольку } 3^5 = 243$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Сравнить числа:

а) $\log_4 7$ и $\log_4 23$; б) $\log_{\frac{2}{3}} 0,8$ и $\log_{\frac{2}{3}} 1$; в) $\log_9 \sqrt{15}$ и $\log_9 13$; г) $\log_{\frac{1}{12}} \frac{1}{7}$ и $\log_{\frac{1}{12}} \frac{2}{3}$.

2. Сравнить с единицей число: а) $\log_3 41$; б) $\log_{2,3} 0,1$; в) $\log_{\frac{1}{7}} 2,6$; г) $\log_{\sqrt{7}} 0,4$.

3. Расположите числа в порядке возрастания: а) $\log_2 0,7$; $\log_2 2,6$; $\log_2 0,1$; $\log_2 \frac{1}{6}$; $\log_2 3,7$.

б) $\log_{0,3} 17$; $\log_{0,3} 2,7$; $\log_{0,3} 3$; $\log_{0,3} \frac{1}{2}$; $\log_{0,3} \frac{2}{3}$.

4.Вычислить: $\log_2 \frac{1}{8} + \log_4 64 + \lg 100$.

5.Вычислить: $\log_2 4 \cdot \log_3 27 : \log_2 \frac{1}{64}$.

6.Вычислить: $\log_2 \log_{\sqrt{7}} 49$.

7. Вычислить: $\log_{0,5} 0,25 \cdot \log_{0,3} 0,09$.

8. Вычислить: $\lg 1000 : \lg 100$.

9. Вычислить: $\log_3 81 : \log_{0,5} 2 \cdot \log_5 125$.

10. Вычислить: $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} : \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{49} \cdot \log_5 \sqrt{5}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19

Название практической работы: *Применение основных правил логарифмирования.*

Цель работы*:* закрепить понятие логарифма, научиться применять свойства логарифмов при упрощении логарифмических выражений.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 02, ПРб 03, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08

знания:

– Определение логарифма.
– Понятие о свойствах логарифма.

умения:

– 1.Вычисление логарифмов.
– Применение свойств логарифмов.

Ход работы:

Основные свойства логарифмов

№	$(\boldsymbol{a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0})$	**Примеры**
1.	$\log_a a = 1$	$\log_3 3 = 1$
2.	$\log_a 1 = 0$	$\log_8 1 = 0$
3.	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	$\log_9 (81 \cdot 9) = \log_9 81 + \log_9 9 = \log_9 9^2 + \log_9 9^1 = 2 + 1 = 3$
4.	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	$\log_5 \frac{25}{125} = \log_5 25 - \log_5 125 = \log_5 5^2 - \log_5 5^3 = 2 - 3 = -1$
5.	$\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b, \alpha \neq 0$	$\log_{5^2} 25^{100} = \frac{100}{2} \cdot \log_5 25 = 50 \cdot \log_5 5^2 = 50 \cdot 2 = 100$

6. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}, c \neq 1$ $\qquad \log_{81} 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 81} = \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^4} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

7. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}, b \neq 1$ $\qquad \log_{25} 5 = \dfrac{1}{\log_5 25} = \dfrac{1}{\log_5 5^2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

8. $a^{\log_a x} = x$ $\qquad 9^{\log_9 3589} = 3589$

9. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ $\qquad 9^{\log_3 20} = 20^{\log_3 9} = 20^{\log_3 3^2} = 20^2 = 400$

Задания для самостоятельной работы:

1.Вычислить: $\log_6 2 + \log_6 3$

2.Вычислить: $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9}$

3.Вычислить: $\log_5 22 - \log_5 11 - \log_5 10$

4.Вычислить: $3\lg 2 - \lg 4$

5.Вычислить: $2\log_7 32 - \log_7 256 - 2\log_7 14$

6.Вычислить: $\frac{\log_7 25}{\log_7 5}$

7.Вычислить: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{21}} 9 + \log_{21} 49$

8.Найти число x по данному логарифму:$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 19 - \log_{\frac{1}{2}} 38 + \log_{\frac{1}{2}} 3$

9.Упростить:$\log_6 \sqrt[3]{81} + \log_6 \sqrt[3]{27} + \log_6 \sqrt[3]{9}$

10. Найдите значение выражения: $\log_3(9b)$ **,** если $\log_3 b=3$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20

Название практической работы: *Преобразование выражений, содержащих степени и логарифмы.*

Цель работы*:* закрепить понятие логарифма и степени, научиться применять свойства логарифмов при упрощении логарифмических выражений.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 02, ПРб 03, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08

знания:

– Определение логарифма.

– Понятие о свойствах логарифма.

умения:

– 1.Вычисление логарифмов.

– Применение свойств логарифмов.

Ход работы:

Пример 1. Вычислить $16^{\log_{81} 3 + \log_2 \sqrt[4]{3}}$.

Решение:

$$16^{\log_{81}3+\log_2\sqrt[4]{3}}=16^{\log_{81}3}\cdot 16^{\log_2\sqrt[4]{3}}=16^{\log_{3^4}3}\cdot 16^{\log_2 3^{\frac{1}{4}}}=16^{\frac{1}{4}\log_3 3}\cdot 16^{\frac{1}{4}\log_2 3}$$
$$=16^{\frac{1}{4}}\cdot \sqrt[4]{16}^{\log_2 3}=\sqrt[4]{16}\cdot 2^{\log_2 3}=2\cdot 3=6.$$

Пример 2. Вычислить $5^{\log_{\frac{1}{5}}4\cdot\log_{\frac{1}{4}}3}$.

Решение:

$$5^{\log_{\frac{1}{5}}4\cdot\log_{\frac{1}{4}}3}=5^{\log_{5^{-1}}4\cdot\log_{\frac{1}{4}}3}=5^{-\log_5 4\cdot\log_{\frac{1}{4}}3}=5^{\log_5\frac{1}{4}\cdot\log_{\frac{1}{4}}3}=\left(5^{\log_5\frac{1}{4}}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}3}=3.$$

Пример 3. Вычислить $11^{\frac{\log_2 3}{\log_4 11}}$.

Решение:

$$11^{\frac{\log_2 3}{\log_4 11}}=11^{\log_2 3\cdot\log_{11}4}=\left(11^{\log_{11}4}\right)^{\log_2 3}=4^{\log_2 3}=2^{2\log_2 3}=\left(2^{\log_2 3}\right)^2=3^2=9.$$

Пример 4. Вычислить $\log_8(\log_3 49\cdot\log_7 9)$.

Решение:

$$\log_8(\log_3 49\cdot\log_7 9)=$$
$$=\log_8(\log_3 7^2\cdot\log_7 3^2)=$$
$$=\log_8(2\cdot 2\cdot\log_3 7\cdot\log_7 3)=\log_8(4\cdot 1)=\log_{2^3}4=\frac{1}{3}\cdot\log_2 4=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}.$$

Пример 5. Вычислить значение выражения $\log_{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b}$, если $\log_a b=\frac{1}{4}$.

Решение. Перейдем к логарифму по основанию a, получим:

$$\log_{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b}=\frac{\log_a\sqrt[3]{a^2b}}{\log_a a^3b^4}=\frac{\log_a a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\log_a a^3+\log_a b^4}=\frac{\log_a a^{\frac{2}{3}}+\log_a b^{\frac{1}{3}}}{3\log_a a+4\log_a b}=\frac{\frac{2}{3}\log_a a+\frac{1}{3}\log_a b}{3\cdot 1+4\log_a b}$$
$$=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log_a b}{3+4\log_a b}$$

Так как по условию $\log_a b=\frac{1}{4}$ то

$$\log_{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log_a b}{3+4\log_a b}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{3+4\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{4}=\frac{3}{16}.$$

Задания для самостоятельной работы:

Вычислить.

1) $7^{\log_{1/3}\log_3 27}$.

2) $5^{\log_3 90}\cdot(\frac{1}{5})^{\log_3 10}$.

3) $4^{\log_2 7\cdot\log_7 3}$.

4) $(4^{\log_2 3}-1)^{\log_8 2}$.

5) $\dfrac{5^{-\log_{\sqrt{5}}7}}{9^{1+\log_{0,5}2}}$.

6) $(\sqrt[4]{2})^{12+\log_{1/2}\frac{1}{25}}$.

7) $49^{\log_{25}5-\log_7\sqrt{5}}$.

8) $\log_{36}(\log_2 25\cdot\log_5 8)$.

10) $49^{\frac{\log_3 2}{2\log_3 7}}$.

11) $\log_6 2\cdot\log_6 18+\log_6^2 3$.

12) $3^{\log_3^2 6-\log_3^2 2}$.

13) $4^{\log_2^2 6}-6^{\log_2 36}$.

14) $(5^{\log_{25}^2 3}-\sqrt{3}^{\log_5\sqrt{3}}+2)^2$.

15) Вычислить $\log_{\sqrt[3]{ab}}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}$, если $\log_b a=2$.

16) Вычислить $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\log_9(\sqrt{3}+2)^2}$.

17) Вычислить $\log_{\sqrt{a}} ab^2 + \log_b \sqrt{\frac{a}{b}}$, если

$\log_a b = \frac{1}{2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21

Название практической работы: *Исследование свойств и построение графика логарифмической функции.*

Цель работы: научиться строить графики логарифмических функций.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 02, ПРб 03, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08

знания:

– Понятие логарифмической функции.

– Понятие о свойствах логарифмической функции.

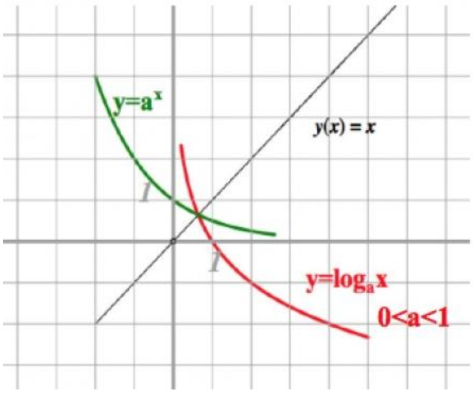
умения: Построение графиков логарифмических функций.

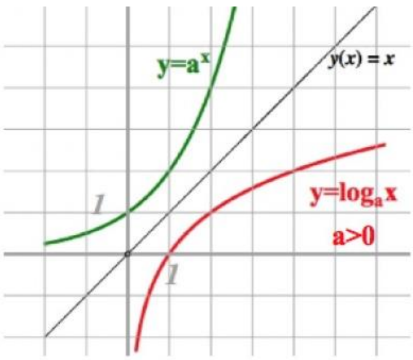
Ход работы:

Логарифмической называют функцию вида: $y = loq_a\, x$. Логарифмическая функция обратная показательной.

Свойства логарифмической функции:

1. Областью определения логарифмической функции является промежуток (0;∞).
2. Множество значений логарифмической функции – вся числовая ось.
3. Логарифмическая функция – непрерывна.
4. Логарифмическая функция при $a > 0$, возрастает, при $a < 0$, убывает.
5. Показательная и логарифмическая функции взаимно - обратные, то их графики симметричны относительно прямой $y = x$.





Задания для практической работы:

1. Изобразить схематически график функции, указать ее область определения и множество значений:

1. $y = \log_3 x$ 4. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

2. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 5. $y = \log_{0,2} x$

3. $y = \log_2 x$ 6. $y = \log_{0,3} x$

2. График какой функции изображен на рисунке 1:

а) $y = \log_{\sqrt{3}} x$
б) $y = \log_{\frac{1}{\pi}} x$
в) $y = \log_{\pi} x$
г) $y = \log_{0,5}(x+1)$

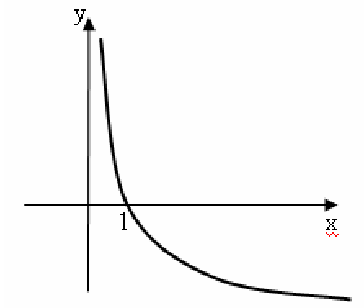


рис 1.

3. График какой функции изображен на рисунке 2:
а) $y = \log_2 x$
б) $y = \log_{0,5} x$
в) $y = \log_3 x$
г) $y = \log_4 x$

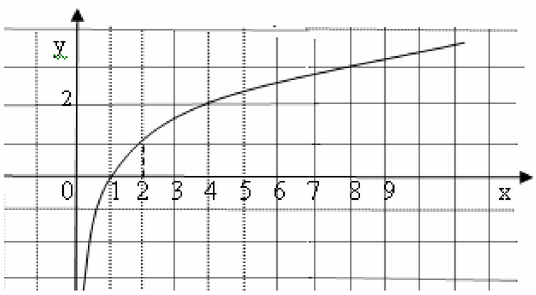


рис 2.

4. График какой функции изображен на рисунке 3:
а) $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$
б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$
в) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$
г) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

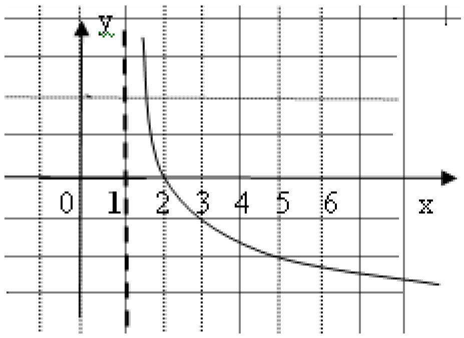


рис.3

5. График какой функции изображен на рисунке 4:
а) $y = \log_3(x-2)$
б) $y = \log_3(x+2)$
в) $y = \log_3 x - 2$
г) $y = \log_3 x + 2$

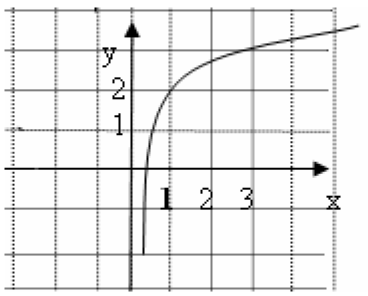
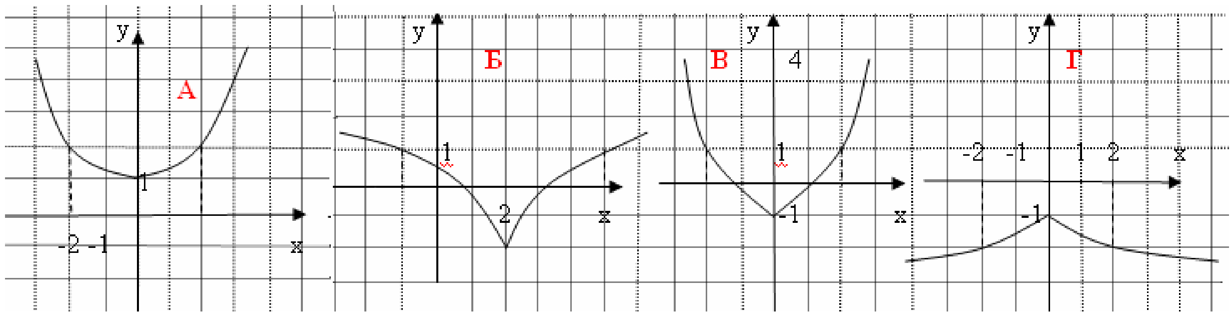


рис. 4

6. Укажите график функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(|x|+2)$



ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 22

Название практической работы: *Решение логарифмических уравнений.*

Цель работы: На конкретных примерах научиться решать логарифмические уравнения.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 02, ПРб 03, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08

знания:

– Понятие логарифма и его свойств.

– Виды логарифмических уравнений.

умения: Применение свойств логарифмов для решения логарифмических уравнений.

Ход работы:

Общие рекомендации

1. Решение логарифмического уравнения следует начинать с нахождения ОДЗ. Для этого необходимо составить неравенство или систему неравенств. Каждое выражение, стоящее под знаком логарифма должно быть положительно. Общее решение неравенства (системы неравенств) необходимо изобразить на рисунке.

2. Логарифмическое уравнение необходимо привести к виду: $log_a f(x) = log_a g(x)$ или $log_a f(x) = b$, при этом основания всех логарифмов должны быть равны.

3. Найденные значения неизвестного *x* необходимо проверить по ОДЗ.

4. Если в уравнении не найдено ОДЗ, то необходимо сделать проверку, путем подстановки найденного неизвестного в логарифмическое уравнение.

5. Необходимо помнить, что ***отрицательные числа и ноль логарифмов не имеют.***

Решение любого логарифмического уравнения также сводится к решению одного или нескольких ***простейших логарифмических уравнений***:

1) $log_a f(x) = log_a g(x)$ 2) $log_a f(x) = b$.

Уравнения вида (1) сводятся к решению уравнений *f(x)= g(x)* (потенцирование). При этом необходимо помнить, что уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ и *f(x)= g(x)* не равносильны. При потенцировании происходит расширение области определения, а значит имеется опасность появления посторонних корней. Проверка – наилучшее средство против такой опасности.

Уравнение (2) сводится или к уравнению вида (1): $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ или к виду $f(x) = a^{g(x)}$ (по определению логарифма).

Пример 1. $\log_3(x^2-4) = \log_3(4x-7)$
Решение:
1 способ: ОДЗ данного уравнения задается неравенствами

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ 4x-7>0 \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств, получаем:

$$\begin{cases} x \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty) \\ x \in \left(\frac{7}{4};\infty\right) \end{cases}, \text{ откуда } x \in (2;\infty)$$

Так как в данном уравнении равны логарифмы двух величин, то равны и сами величины. Получим квадратное уравнение:
$x^2-4 = 4x-7 \Rightarrow x^2-4x+3=0$.
Очевидно, что ОДЗ этого уравнения $x \in (-\infty;\infty)$
Т.е. произошло расширение ОДЗ по сравнению с первоначальным уравнением.
Корни квадратного уравнения:

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 3$$

Однако в ОДЗ исходного уравнения попадает только число x=3,
Которое и является его решением.
(Корень x=1 является посторонним и возник при расширении ОДЗ).
Ответ: 3.
2 способ: Приводим логарифмическое уравнение к виду $x^2-4=4x-7$ и находим его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.
После решения квадратного уравнения сделаем **проверку**:

Подставим корень $x_1 = 1$ в исходное логарифмическое уравнение

$$\log_3(1^2-4) = \log_3(4\cdot 1-7) \Rightarrow \log_3(-3) = \log_3(-3) \text{ (ложное равенство, т. к. не существуют логарифмы от отрицательных чисел).}$$

Так как при подстановке корня $x_1 = 1$ получено ложное равенство, то 1 не является корнем исходного уравнения. Аналогично проверяем второй корень $x_2 = 3$.

$$\log_3(3^2-4) = \log_3(4\cdot 3-7) \Rightarrow \log_3 5 = \log_3 5 \text{ (истинное равенство).}$$

Следовательно, корень $x_2 = 3$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 3.

Пример 2. $\log_2(4x + 3) = 3$

Решение: $\log_2(4x + 3) = 3$

$4x + 3 = 2^3$

$4x = 8-3$

$4x = 5$

$x = 1\frac{1}{4}$

Ответ: $1\frac{1}{4}$

Пример 3. . Решите уравнение $\log_2{}^2 x - \log_2 x - 2 = 0$

Решение: (данное уравнение сводится к квадратному уравнению с помощью **метода введения новой переменной**)

Введем новую переменную t, $t = \log_2 x$, тогда уравнение примет вид

$t^2 - t - 2 = 0$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 (-2) = 9$

$t_1 = \frac{1+3}{2} = 2$; $t_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

Если t = 1 тогда: $\log_2 x = -1$, $x = 2^{-1}$, $x = \frac{1}{2}$

Если t =2, тогда: $\log_2 x = 2$, $x = 2^2$, $x = 4$

Ответ: $\frac{1}{2}$; 4

Пример 4. Решите уравнение $lg(x^2 + 75) - lg(x - 4) = 2$

Решение:

$$lg(x^2 + 75) = 2 + lg(x - 4)$$
$$lg(x^2 + 75) = lg100 + lg(x - 4)$$
$$lg(x^2 + 75) = lg100 \cdot (x - 4)$$
$$lg(x^2 + 75) = lg(100x - 400)$$
$$x^2 + 75 = 100x - 400$$
$$x^2 + 75 + 475 = 0$$
$$D = 100^2 - 4\ 1\ 475 = 100\ 000 - 1900 = 8100$$
$$x_1 = \frac{100+90}{2} = 95$$
$$x_2 = \frac{100-90}{2} = 5$$

Проверка:

$$x_1 = 95$$

$lg(95^2 + 75) - lg(95 - 4) = 2 \Rightarrow lg(9025 + 75) - lg(91) = 2 \Rightarrow lg\,9100 - lg91 = 2 \Rightarrow$ $lg\frac{9100}{91} = 2 \Rightarrow lg100 = 2 \Rightarrow 2=2$ (верно).

$$x_2 = 5$$

$lg(5^2 + 75) - lg(5 - 4) = 2 \Rightarrow lg(25 + 75) - lg(1) = 2 \Rightarrow lg\,100 - 0 = 2 \Rightarrow \Rightarrow 2=2$ (верно).

Ответ: 95; 5.

Задания для самостоятельной работы

I вариант		II вариант	
1. $\log_3 x = 2$	(1 б)	1 .$\log_2 x = 3$	(1 б)

2.$\log_5 x = -2$ (1б)
3.$\log_2(x-4) = 3$ (1 б)
4.$\log_8(x^2 - 1) = 1$ (1 б)
5.lg(2 -5x)= 1 (1 б)
6. $\log_3{}^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$ (2 б)
7. $\log_2{}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$ (2 б)
8. $\log_3(3x-5) = \log_3(x-3)$ (2 б)
9. $\lg(x^2 - 17) = \lg(x+3)$ (3 б)
10.$\log_3(x+5) + \log_3(x+1) = \log_3 5$ (4 б)

2. $\log_4 x = -2$ (1 б)
3. $\log_5(13-x) = 2$ (1 б)
4. $\log_2(x^2 - 1) = 3$ (2 б)
5. lg(7-x) = -1 (1 б)
6.$\log_3 x + 3\log_3 x - 4 = 0$ (2 б)
7.$\log_{\frac{1}{3}}{}^2 x - \log_3 x = 6$ (2б)
8. $\log_3(2x-7) = 3\log(3x-1)$ (2 б)
9. $\log_2(x-1) = \log_2(x^2 - x - 16)$ (3б)
10. $\lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 3^2$ (4б)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 23

Название практической работы: *Решение логарифмических неравенств.*

Цель работы: На конкретных примерах научиться решать логарифмические неравенства.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 02, ПРб 03, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08

знания:

– Понятие логарифма и его свойств.
– Виды логарифмических неравенств.

умения: Применение свойств логарифмов для решения логарифмических неравенств.

Ход работы:

Решение логарифмических неравенств основано на том, что функция $y = \log_a x$ при a>1 является монотонно возрастающей на своей области определения, а при 0<a<1монотонно убывающей на своей области определения.

При переходе от простейшего неравенства к равносильным системам неравенств, не содержащих знака логарифма следует учитывать область допустимых значений исходного неравенства.

При решении логарифмических неравенств пользуйтесь следующей схемой:

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$

a > 1: $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

0 < a < 1: $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

$\log_a f(x) < \log_a g(x)$

a> 1: $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

0 < a < 1: $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Пример 1: $\log_3(2x-5) < 2$

Решение: $\log_3(2x-5) < 2$

$$\log_3(2x-5) < \log_3 9$$

Функция y = $\log_3 t$ − возрастающая

$\begin{cases}2x-5<9\\2x-5>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x<14\\2x>5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<7\\x>2{,}5\end{cases} \Rightarrow x \in (2{,}5;\ 7)$

Ответ: (2,5; 7)

Пример 2. Решите неравенство: $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<-2$.

Решение: Учитывая, что $-2=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, переходим к равносильному неравенству $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$. Так как основание логарифмической функции $y=\log_{\frac{2}{3}} t$ равно $\frac{2}{3}$ и $0<\frac{2}{3}<1$, то она убывает на своей области определения (при t>0). Тогда получаем: $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow 2-5x>\frac{9}{4} \Leftrightarrow -5x>0{,}25 \Leftrightarrow x<-0{,}05$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}05)$.

Пример 3. Решите неравенство: $\log_3(5-4x)<\log_3(x-1)$.

Решение: Так как основание логарифмической функции $y=\log_3 t$ равно 3>1, то она возрастает на своей области определения (при t>0). Тогда исходное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases}5-4x>0;\\5-4x<x-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\frac{5}{4};\\x>\frac{6}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{6}{5}<x<\frac{5}{4}$.

Ответ: $(1{,}2; 1{,}25)$.

Пример 4. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{5}}(x+1)\le\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)$.

Решение: Так как основание логарифмической функции $y=\log_{\frac{1}{5}} t$ равно $\frac{1}{5}$ и $0<\frac{1}{5}<1$, то она убывает на своей области определения (при t>0). Тогда исходное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases}3x-5>0;\\x+1\ge 3x-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{5}{3};\\x\le 3\end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3}<x\le 3$.

Ответ: $\left(1\frac{2}{3};\ 3\right]$.

Задания для самостоятельной работы:

Івариант		IIвариант	
1. $\log_5(3-8x)>0$	(1 б)	1. $\log_3(2+x)>0$	(1б)
2. $\log_3(x-8)\le 1$	(1 б)	2. $\log_2(3x-2)\le 1$	(1 б)
3. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>-2$	(1 б)	3. $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)>-2$	(1 б)

4. $\lg(x^2+2x+2)<1$ (3 б)

5.Найдите наибольшее целое решение неравенства:

$$\log_2(3-2x)-\log_2 13<0 \quad (2б)$$

6.Найдите наименьшее целое решение неравенства:

$$\log_2(2x-1)-\log_2(x+1)<0 \quad (3б)$$

4. $\lg(x^2+x+4)<1$ (3 б)

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)-\log_{\frac{1}{3}}6>0 \quad (2б)$$

6.Найдите наименьшее целое решение неравенства:

$$\log_5(3x+1)-\log_5(x-2)>0 \quad (3б)$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 24

Название практической работы: *Решение систем уравнений и неравенств с применением различных методов.*

Цель работы: Научиться решать системы различных уравнений и неравенств.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 02, ПРб 03, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08

знания: Понятие системы уравнений и неравенств.

умения: Решение систем уравнений и неравенств (линейных, квадратных, иррациональных, показательных и логарифмических).

Ход работы:

Нелинейные системы не имеют универсального способа решения, поэтому при решении конкретной системы уравнений нужно учитывать особенности заданных уравнений, переходя к равносильным системам.

Основные методы решения систем нелинейных уравнений:

- метод подстановки;
- метод введения новых переменных;
- графический метод;
- метод алгебраического сложения;
- метод почленного умножения и деления;
- метод математического подбора.

Задания для самостоятельной работы:

Решите системы уравнений и неравенств.

Вариант- I

1. $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x+y=-1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3-x>0, \\ 2x+1>0, \\ 1-x^2\le 0. \end{cases}$

Вариант-II

1. $\begin{cases} x-y=1, \\ xy=6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{1}{x}<\frac{3}{4}, \\ 2x-3\le x^2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 27^x = 9^y, \\ 81^x = 3^{y+1}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sqrt{x+y-3} = 1, \\ \sqrt{3x-2y+1} = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2^{6x-2y} = 4^{x+y+10}, \\ 3^{x^2} = 3^{11+y}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} |y-x| = 4. \end{cases}$

Вариант- III

1. $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 0{,}5x + 1 > 0, \\ x - 2 \le 0, \\ x^2 - 9 < 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{2} = 1, \\ 2^{x-2} \cdot 2^y = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sqrt{7-6x-y^2} = y+5, \\ y = x-1. \end{cases}$

Вариант-IV

1. $\begin{cases} (x-2)(y-3) = 1, \\ \dfrac{x-2}{y-3} = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} \le x, \\ \dfrac{2-x}{x^2} > 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 7y = 1, \\ 2^{x+y} = 4^{x-y+2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_2 x - \log_3 y = -5, \\ 2\log_2 x + 3\log_3 y = 0. \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 25

Название практической работы: *Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств.*

Цель работы: Научиться решать уравнения и неравенства используя свойства функций и с помощью графиков функций.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные**:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные**:** ПРб 02, ПРб 03, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08

знания:

– Понятие об основных свойствах элементарных функций.
– Понятие о графиках основных элементарных функций.

умения:

– Определение области определения и области значений функции.
– Определение интервалов возрастания и убывания функции.

Ход работы:

Область определения.

Если функция задана формулой, то ее область определения – это все значения аргументы, при которых формула имеет смысл. Отсутствие смысла связано, например, со знаменателем, равным нулю, с отрицательным значением подкоренного или подлогарифмического выражения. Решение любого уравнения и неравенства подразумевает использование области определения.

Область значений. Ограниченность.

Множество всех значений функции называется ее областью значений.

Функция называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число C, что $f(x) \leq C$ ($f(x) \geq C$) для любого x из области определения. Функция называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу. ***Монотонность.***

Функция называется строго возрастающей (строго убывающей) на интервале X, если для любых чисел a и b из интервала X выполняется условие: из того, что $a>b$ следует, что $f(a)>f(b)$ ($f(a)<f(b)$). Если функция строго возрастает или строго убывает на всей области определения, говорят, что она монотонна. В этом случае каждое значение функция принимает только один раз.

Непрерывность.

Функция непрерывна в точке, если предел функции в точке равен ее значению в этой точке. Функции, изучаемые в школе, или непрерывны или имеют конечное число точек разрыва. Причинами разрыва обычно являются наличие знаменателя, который может быть равен нулю, или кусочное задание функции.

Использование ОДЗ

Очевидно, что в большинстве случаев при решении уравнений и неравенств мы учитываем ОДЗ. Полезно помнить о найденном ОДЗ в процессе решения, а не вспоминать о нем в последний момент. Например, в логарифмических неравенствах с переменным основанием иногда ОДЗ определяет возрастание или убывание логарифма, что позволяет не рассматривать два случая при решении. В задачах, содержащих модуль, ОДЗ может однозначно задавать знак подмодульного выражения.

Иногда знание ОДЗ позволяет доказать, что уравнение (или неравенство) не имеет решений, иногда позволяет найти решения уравнений (или неравенств) непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ.

Пример 1. Решить уравнение

$\sqrt{3-x} = \log_5(x-3)$

Решение. ОДЗ этого уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $3 - x \geq 0$ и $x - 3 > 0$, т. е. ОДЗ есть пустое множество. Этим решение уравнения и завершается, так как установлено, что уравнение не имеет корней.

Ответ: решений нет.

Пример 2. Решить неравенство

$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[6]{x^4-1} < 2^x - \log_2(1+x^4)$

Решение. ОДЗ неравенства состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $1 - x^2 \geq 0,\ x^4 - 1 \geq 0$, т.е. ОДЗ состоит из двух чисел $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Подставляя $x_1 = 1$ в неравенство, получаем, что его левая часть равна 0, правая равна 1, т.е. $x_1 = 1$ есть решение неравенства. Подставляя $x_2 = -1$ в неравенство, получаем что $x_2 = -1$ не является его решением, поскольку левая часть неравенства равна 0, а правая часть равна -1/2 .

Ответ: 1.

Использование монотонности.

Решение уравнений и неравенств с использованием свойства монотонности основывается на следующих утверждениях.

1. Пусть f(x) – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке £, тогда уравнение f(x)=C, где C – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке £.

2. Пусть f(x) и g(x) – непрерывные на промежутке £ функции, f(x) строго возрастает, а g(x) строго убывает на этом промежутке, тогда уравнение f(x)=g(x) может иметь не более одного решения на промежутке £.

Пример 3. Решить уравнение

$x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64.$

Решение. Очевидно, что $x \leq 0$ не может являться решением уравнения, так как тогда $x \cdot 2^{x^2+2x+3} \leq 0$. Для x>0 функция $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ непрерывна и строго возрастает, как произведение двух непрерывных положительных строго возрастающих для этих x функций f=x и $g = 2^{x^2+2x+3}$. Значит, в области x>0 функция $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ принимает каждое своё значение ровно в одной точке. Легко увидеть, что x=1 является решением уравнения, следовательно, это его единственное решение.

Ответ: 1.

Пример 4. Решить неравенство $2^x + 3^x + 4^x < 3$.

Решение. Каждая из функций $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$, непрерывная и строго возрастающая на всей оси. Значит, такой же является и исходная функция $y = 2^x + 3^x + 4^x$. Легко увидеть, что при x=0 функция $y = 2^x + 3^x + 4^x$ принимает значение 3. В силу непрерывности и строгой монотонности этой функции при x>0 имеем $2^x + 3^x + 4^x > 3$, при x<0 имеем $2^x + 3^x + 4^x < 3$. Следовательно, решениями неравенства являются все x<0.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

Пример 5. Решить уравнение

$-\sqrt[8]{x-2} + \sqrt[4]{18-x} = 2.$

Решение. ОДЗ уравнения есть промежуток $2 \leq x \leq 18$. На ОДЗ функции $f(x) = -\sqrt[8]{x-2}$ и $g(x) = \sqrt[4]{18-x}$ непрерывны и строго убывают, следовательно, непрерывна и убывает функция

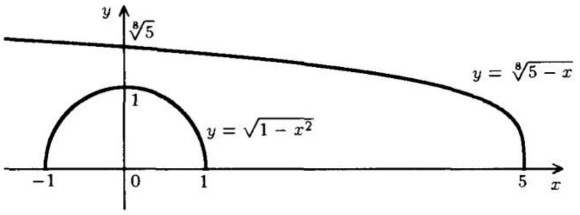
$h(x) = -\sqrt[8]{x-2} + \sqrt[4]{18-x}$. Поэтому каждое своё значение функция h(x) принимает только в одной точке. Так как h(2)=2, то x=2 является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: 2.

Использование графиков.

Из всех понятий, связанных с функцией, использование графиков при решении различных задач наиболее очевидно. Часто корни уравнений, которые нельзя решить с помощью алгоритмов, можно найти подбором, а графически обосновать их количество. Графический способ даёт приближённое решение, поэтому всегда требует проверки. При решении уравнений или неравенств иногда полезно рассмотреть эскиз графиков их правой и левой частей. Тогда этот эскиз графиков поможет выяснить, на какие множества надо разбить числовую ось, чтобы на каждом из них решение уравнения или неравенства было очевидно.

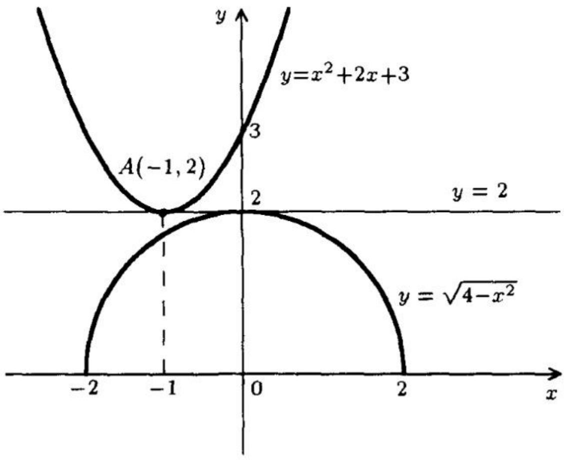
Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{1-x^2} < \sqrt[8]{5-x}$.



Решение. ОДЗ неравенства есть все x из промежутка [-1,1]. Эскизы графиков функций $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ и $g(x)=\sqrt[8]{5-x}$ представлены на рисунке. Из графика следует, что для всех x из ОДЗ неравенство справедливо. Докажем это. Для каждого $x\epsilon[-1,1]$ имеем $0\le f(x)\le 1$, а для каждого такого x имеем, что $\sqrt[8]{5-x}\ge\sqrt[8]{4}>1$. Значит, для каждого $x\epsilon[-1,1]$ имеем $f(x)\le 1<g(x)$. Следовательно, решением неравенства будут все x из промежутка [-1,1].

Ответ: $[-1;1]$.

Пример 7. Решить уравнение $x^2+2x+3=\sqrt{4-x^2}$.



Решение. ОДЗ уравнения есть все x из промежутка $-2\le x\le 2$. Эскизы графиков функций $f(x)=x^2+2x+3$ и $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ представлены на рисунке. Проведём прямую y=2. Из графика следует, что график функции f(x) лежит не ниже этой прямой, а график функции g(x) не выше. При этом эти графики касаются прямой y=2 в разных точках. Следовательно, уравнение не имеет решений. Докажем это. Для каждого $x\in[-2,2]$ имеем $\sqrt{4-x^2}\le 2$, а $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\ge 2$. При этом f(x)=2 только для $x=-1$, а g(x)=2 только для x=0. Это означает, что уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Задания для самостоятельной работы:

1. Решите графически уравнение:

(базовый уровень)

а) $2^x=-2x+8$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+11$;

в) $3^x=-x+8$;

г) $0{,}2^x=x+6$;

д) $2^x=6-x$;

е) $3^x=2x+1$;

ж) $2^x=-\frac{1}{2}x$;

з) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=4+x^3$;

и) $5^x=6-x$.

(повышенный уровень)

а) $2^x-1=\sqrt{x}$;

б) $3^x-1=-x$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{x} - \frac{2}{3}$;

г) $3^{-x} = \sqrt{x}$;

д) $2^x = 3 - 2x - x^2$;

е) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \sqrt{x} + 1$.

ж) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^3 + 3$.

2. Решить графически неравенство:

(базовый уровень)

а) $3^x \geq 4 - x$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 2x + 5$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leq 2x + 1$;

г) $\left(\sqrt{2}\right)^x > 4 - x$;

д) $2^x \geq x^3 - 4$.

(повышенный уровень)

а) $|x - 1| \geq 2{,}5^x$;

б) $3^x - 1 \geq -\sqrt{x}$;

в) $\left(\sqrt{2}\right)^x > 4 - x$;

г) $3^x \geq x^2 + 5x$;

д) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \sqrt{x} + 1$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 26

Название практической работы: *Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики*.

Цель работы:

Научиться применять различные математические методы к решению практических задач, применяемых в различных областях науки, а также навыков математического моделирования реальных процессов.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные: ПРб 01, ПРб 06, ПРб 14, ПРу 08, ПРу 18, ПРу 19.

знания: Понятие о процентах, основных свойствах дроби.

умения: Использование основных алгебраических формул, а также свойств процентов для решения прикладных задач.

Ход работы:

Задания для самостоятельной работы:

Перевоз грузов, грузоподъемность

Задача 1. Для перевозки 30 тонн груза машине надо было сделать несколько рейсов. Но груз пришлось перевозить на машине, имеющей грузоподъемность на 2 тонны больше, чем планировалось. Из-за этого для перевозки груза понадобилось на 4 рейса меньше. Найти грузоподъемность машины, перевезшей груз.

Задача 2: Для перевоза груза автомашине грузоподъёмностью 7,5 т пришлось сделать 12 рейсов. Сколько рейсов придётся сделать автомашине грузоподъемностью 9 т для этого же груза?

Задачи на проценты

*Задача 1***.** Заработная плата служащего составляет x руб, к которым начисляется 15% - й коэффициент. Из общей суммы взимается 10% в пенсионный фонд и 1% составляет профсоюзный взнос. Заработная плата облагается также 10% - м подоходным налогов (кроме y руб, равных минимальной заработной плате). Составьте формулу для вычисления суммы, которую получит служащий.

Задача 2. В пансионате в прошлом году отдыхало 1100 мужчин и женщин. В этом году число отдыхающих мужчин уменьшилось на 20%, а число женщин увеличилось на 30%. Сколько мужчин и женщин отдыхало в пансионате в этом году, если известно, что всего в этом году отдыхало 1130 человек?

Задача 3. Студент купил две книги за 1300 руб. Если бы первая книга стоила на 20% дороже, а вторая – на 25% дешевле, то их цены были бы одинаковы. Сколько рублей стоит вторая книга?

*Задача 4***.** Торговая база поставила магазину кафельную плитку по оптовой цене, которая на 25% больше цены изготовителя. Магазин продавал эту плитку по цене, которая на 15% больше оптовой. Но в конце месяца снизил цену на 10%. Сколько рублей по отношению к цене изготовителя переплачивает покупатель за 1м^2 плитки, покупая её в конце месяца по цене 1035 руб. за 1м^2 ?

Задача 5. В сельской школе два класса. В первом полугодии успеваемость по классам составляла 90% и 50%, а в целом по школе – 70%. Во втором полугодии из первого класса 10 человек перешли в другую школу. Каждый класс повысил успеваемость на 1%, а в целом по школе успеваемость упала на 3%. Сколько учащихся стало в школе?

Старинные задачи

Задача 1. Купец имел шестипроцентные облигации, с которых получал ежегодно по 1500 р. процентных денег. Продав облигации по курсу 120 (т.е. 120% от их номинальной стоимости), часть вырученных денег купец употребил на покупку дома, 1/3 остатка положил в банк под 4%, а остальные деньги в другой банк по 5%. Из обоих банков вместе купец получает в год 980 р. дохода. Сколько было заплачено за дом?

Задача 2. Спросил некто учителя скажи, сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына. Учитель ответил если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня учеников 100. Спрашивается, сколько было у учителя учеников?

Задача 3. Послан человек из Москвы на Вологду, и велено ему в хождении своем совершати на всякий день по 40 верст; потом другий человек в другий [на следующий] день послан в след его, и велено ему идти на день 45 верст, и ведательно есть, в коликий день постигнет [догонит]второй первого

Задача 4. Продавец продает шапку. Стоит 10 р. Подходит покупатель, меряет и согласен взять, но у него есть только 25 р. Продавец отсылает мальчика с этими 25 р. к соседке разменять. Мальчик прибегает и отдает 10+10+5. Продавец отдает шапку и сдачу в 15 руб. Через какое то время приходит соседка и говорит, что 25 р. фальшивые, требует отдать ей деньги. Ну что делать. Продавец лезет в кассу и возвращает ей деньги. На сколько обманули продавца?

Задача 5. Слон, слониха и слонёнок пришли напиться к озеру, чтобы напиться воды. Слон может выпить озеро за 3ч, слониха - за 5ч, а слонёнок - за 6ч. За сколько времени они все вместе выпьют озеро?

Задача 6. Некто взял из сокровищницы 1/13. Из того, что осталось, другой взял 1/17. Оставил же в сокровищнице 192. Мы хотим узнать, сколько было в сокровищнице первоначально?

Классические задачи

Задача 1. Три рыбака вечером наловили рыбы и легли спать. Первый, проснувшись утром, решил не будить остальных. Он разделил рыбу из садка поровну, но одна рыба осталась лишней; он выбросил ее в воду, забрал третью часть улова и уехал домой. Через час встал второй. Думая, что он проснулся первым, и не желая будить остальных, проделал то же самое, что и первый: выкинул в воду лишнюю рыбу, взял третью часть от оставшегося улова и уехал. Еще через час все это повторил третий рыбак, тоже считая, что он встал первым. Каков был улов?

Задача 2. Семь лыжников с номерами 1,2 ,...,7 ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться не более двух различных протоколов.

Задача 3. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность. В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

Задача 4. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

Задача 5. Купец ежегодно расходует 100 фунтов стерлингов на содержание семьи и приумножает остальной капитал на одну треть. Через три года он стал вдвое богаче. Как велик стал его капитал?

Банковские расчеты

Задача 1. Бизнесмен Бубликов получил в 2013 году прибыль в размере 25000 руб. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2016 год?

Задача 2. Компания "Альфа" начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2011 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2012 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2013 году, имея капитал в размере 10000 долларов, и, начиная с 2014 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2016 года, если прибыль из оборота не изымалась?

Задача 3. Клиент взял в банке кредит в размере 250000 руб. на 5 лет под 20 % годовых. Какую сумму клиент должен вернуть банку в конце срока?

Задача 4. Два приятеля положили в банк по 50000 руб. каждый, причем первый положил деньги на вклад с ежеквартальным начислением 10 %, а второй- с ежегодным начислением 45%. Через год приятели получили деньги вместе с причитающимися им процентами. Кто получил большую прибыль?

Медицина

Задача 1. Курс воздушных ванн начинают с 15 минут в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 10 минут. Сколько дней следует принимать воздушные ванны в указанном режиме, чтобы достичь их максимальной продолжительности 1ч 45мин?

Задача 2. Отдыхающий, следуя совету врача, в первый день загорал 5 минут. А в каждый последующий день увеличивал время пребывания на солнце на 5 минут. НА какой день время пребывания на солнце будет равно 40 минут?

Задача 3. Больной принимает лекарство по следующей схеме: в первый день он принимает 5 капель, а в каждый следующий день – на 5 капель больше, чем в предыдущий. Приняв 40 капель, он 3 дня пьет по 40 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает прием на 5 капель, доведя его до 5 капель. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 20 мл лекарства что составляет 250 капель?

Задача 4. По назначению врача пациенту прописан препарат 10 мг по 3 таблетки в день. У него в наличии препарат по 20 мг. Сколько таблеток должен выпить пациент, не нарушая указания врача?

Спорт

Задача 1. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах - одно очко, за каждый последующий- на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

Задача 2. В угловом секторе стадиона в первом ряду 7 мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в 26-ом ряду?

Задачи с экологическим содержанием

Задача 1. В 2010-2016 гг. на территории Восточно-Казахстанской области произошло 242 лесных пожаров. Сколько пожаров было вызвано из-за местного населения, если 4 произошло по неизвестным причинам и из-за грозы на 118 меньше, чем из-за местного населения? Каков ущерб принесенный лесу, если дерево вырастает за 20 лет и каждое дерево насыщает воздух кислородом на площади 10 $м^2$.

Задача 2. Подрядчики ежедневно перевыполняли норму по очищению озера на 40 кубов жидкости, поэтому 6 дневную норму они выполнили за 4 дня. Сколько кубометров жидкости подрядчики очищали в день? За сколько дней можно очистить все озеро, если объем воды в озере составляет 36 $км^3$.

Задача 3. Одной трубой с промышленным фреоновым газом за 4,5 ч заполнили половину цистерны. Затем открыли вторую трубу, и заполнение цистерны было закончено за 2,75 ч. Найдите объем цистерны, если производительность второй трубы 35 $м^3/ч$? После заполнения цистерны произошел выброс 1 % фреонового газа в атмосферу. Найдите объем выброса газа. Определите, опасен ли для жизни человека выброшенный газ, если объем 3 $м^3$ смертелен для человека.

Задача 4. Через три трубы нефтяное предприятие сбросило нефтяной шлам в озеро. Для сброса всего нефтяного шлама в озеро через третью трубу потребуется столько же времени, сколько при сбросе через первую и вторую одновременно. Сколько времени потребуется для сброса нефтяного шлама через каждую трубу, если через первую сбрасывают воду на 2 часа быстрее, чем через третью, и на 6 часов медленнее, чем через вторую? Сколько из-за сброса нефтяных отходов погибает живности в год, если в среднем за месяц погибает 12т. рыб?

Задача 5. Всего поступило в воздух 1048,13 тыс.т. загрязняющих веществ. Сколько было выброшено твердых веществ, если газообразных было выброшено на 771,77 тыс.т. меньше? Определите ущерб, наносимый кислороду, если выброс газообразных веществ в 4 раза опаснее, чем выброс твердых веществ.

Другие задачи

Задача 1. Васе надо решить 490 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вася решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 14 дней.

Задача 2. (Задача Наполеона.) Одно из 7 древних чудес света – египетские пирамиды. Самая знаменитая из них – пирамида Хеопса высотой 147 м, в основании которой квадрат со стороной 233. если из каменных блоков пирамиды возвести стену толщиной 20 см вокруг Франции, то какова будет высота этой стены? Считать, что общая длина морских и сухопутных границ Франции 5000 км.

Задача 3. Ученик ездил на автобусную экскурсию в другой город. Туда автобус шел 2 ч, а обратно (другим путем) – 1 ч 20 мин. Школьник заметил, что показания спидометра увеличились на 200 км. Какова длина первого и второго пути?

Задача 4. По легенде, изобретатель шахмат попросил у царя в награду 1 зерно пшеницы за первую клетку шахматной доски, 2 – за вторую, 4 – за третью и т.д., 2^{63}- за 64-ю. может ли царь выполнить эту просьбу?

Задача 5. Ежегодно прирост древесины на опытном участке составляет 10%. Какое количество древесины будет на участке через 10 лет, если сейчас ее 10^5 $м^3$?

Задача 6. В табачном дыме одной сигареты содержится много ядовитых веществ, разрушающих организм человека. Определите процентное содержание самых ядовитых веществ – табачного дегтя, окиси углерода, полония, - в одной сигарете, если никотина 2%; табачного дегтя в 7,5 раз больше, чем никотина; окись углерода составляет 3/5 от количества табачного дегтя; полоний составляет 2/3 от количества окиси углерода.

Задача 7. Средний вес новорожденного ребенка 3 кг 300гр. Если у ребенка курящий отец, то его вес будет меньше среднего на 125 гр; если курящая мать – меньше на 300 гр. Определите, сколько процентов теряет в весе новорожденный, если: а) курит папа; б) курит мама (ответ округлите до единиц).

Задача 8. Почтальон Печкин пошел на пенсию и решил выращивать цветы для продажи. Он купил 15 луковиц лилий по 500 руб., но взошло только 12 из них. Получит ли Печкин прибыль, если эти лилии он продаст по 750 руб. за цветок?

Задача 9. При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов вариантов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн природного камня и 10 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 8 тонн щебня и 57 мешков цемента. Тонна камня стоит 1650 рублей, щебень стоит 610 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 220 рублей. Сколько рублей придется заплатить за материал для фундамента, если выбрать самый дешевый вариант?

Задача 10. При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 2%. Терминал принимает суммы, кратные 100 руб. Месячная плата за интернет составляет 1000 руб.. Какую минимальную сумму положить в приемное устройство терминала, чтобы на счету фирмы, предоставляющей интернет-услуги, оказалась сумма, не меньшая 1000 руб.?

Задача 11. Путь торможения по сухому асфальту при скорости движения автомобиля 60 км/ч составляет примерно 0,039% его скорости, а по обледенелой дороге путь торможения увеличивается в этом же случае в 4 раза. Каков путь торможения автомобиля при скорости 60 км/ч по обледенелой дороге? (путь торможения - путь, пройденный автомобилем от начала торможения до его полной остановки)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 27

Название практической работы: *Описание производственных процессов с помощью графиков функций.*

Цель работы*:* закрепить навыки построения графиков функций, описания свойств функции по её графику.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 02, ПРб 03, ПРб 05, ПРу 06, ПРу 07, ПРу 08

знания: определение функции, её свойств и графика.

умения: построение графика функции.

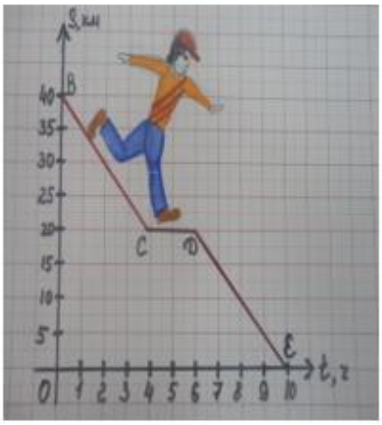


Рис. 1

Ход работы:

1) Приведите примеры использования линейной функции в окружающем мире, научной и производственной сферах.

2) На рисунке 1 изображён график движения пешехода из пункта B в пункт E. Используя этот график ответить на вопросы:

а) На каком расстоянии от пункта E находится пункт B?

б) С какой скоростью двигался пешеход?

в) На каком расстоянии от пункта B он сделал привал?

г) Сколько времени длился привал?

д) Через какое время после привала пешеход прибыл в пункт E?

е) Записать формулой функцию S(t) на участках графика ВС, ДЕ, СД.

3) Расходы при перевозке груза двумя видами железнодорожного транспорта вычисляют по формулам:

y1= 10000 + 40x, *y2= 20000 + 20x,*

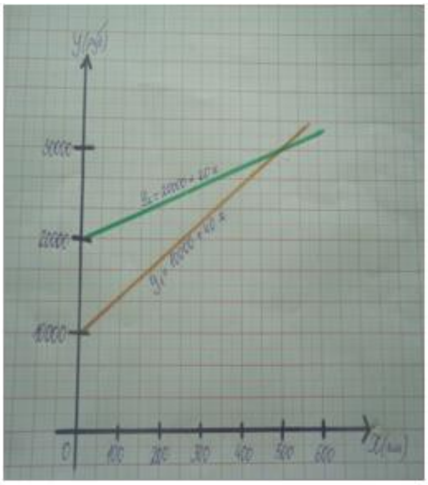


Рис. 2

где x-расстояние перевозок в километрах, а y р.- транспортные расходы по перевозке груза первым и вторым видами транспорта. Найти, на какие расстояния и каким видом транспорта перевозки груза будут более экономичными.

4) Укажите какие реальные процессы описывает квадратичная функция.

5) Путь, пройденный телом за первые t секунд свободного падения, может быть вычислен по формуле $h = \frac{gt^2}{2}$, где $g \approx 10$ м/с^2. Постройте график зависимости H от t. Найдите по графику: а) расстояние, которое пролетит падающий в пропасть камень за первые 5 с; б) время, за которое камень пролетит первые 100 м. Найдите глубину пропасти, если падение камня продолжалось 15 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 28

Название практической работы: *Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.*

Цель работы: Научиться переводить одну меру углов в другую**.**

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные**:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные**:** ПРб 01, ПРу 06.

знания: Понятие о градусной и радианной мере угла.

умения: Перевод градусной меры в радианную и обратно.

Ход работы:

Формула перехода от градусной меры к радианной:

$$\alpha \text{ рад} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$$

Например.

$$\alpha = 135^0$$

$$\alpha \text{ рад} = \frac{\pi}{180^0} \cdot 135^0 = \frac{3\pi}{4}$$

Формула перехода от радианной меры к градусной:

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha \text{ рад}$$

Например,

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\alpha^0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^0$$

Длина дуги окружности $l = \alpha R$

Площадь кругового сектора радиуса R $S = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Переведите данные числа из градусной меры в радианную: $75°, 10°, 144°, 1080°$.

2. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{5}$; $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{2}$.

3. Какой координатной четверти соответствует угол:

431^0 $\quad$ -731^0 $\quad$ $\frac{5\pi}{6}$ $\quad$ -531^0 $\quad$ $\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $-\frac{13\pi}{3}$

4. Радиус окружности равен 2 см, α =30°. Найти площадь сектора в см^2

5. Дуга длиной 0,25м стягивает центральный угол 0,5 рад. Найти радиус окружности

Вариант 2

1. Переведите данные числа из градусной меры в радианную: $15°, 18°, 108°, 720°$.
2. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{10}$; $\frac{13\pi}{4}$.

3. Какой координатной четверти соответствует угол:

531^0 -631^0 $\frac{\pi}{6}$ -431^0 $\frac{3\pi}{4}$ $-\frac{16\pi}{3}$

4. Радиус окружности равен 2 см, α =150°. Найти площадь сектора.
5. Дуга длиной 0,49 м стягивает центральный угол 0,7 рад. Найти радиус окружности.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 29

Название практической работы: *Применение основных тригонометрических тождеств для вычисления значений тригонометрических функций по одной из них.*

Цель работы: Научиться находить значения тригонометрических функций, используя основное тригонометрическое тождество.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

–

–

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 01, ПРу 06.

знания:

– Понятие о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе.
– Знаки тригонометрических функций по четвертям.
– Понятие об основном тригонометрическом тождестве и его следствиях.

умения: Использование основного тригонометрического тождества и свойств тригонометрических функций для определения значений тригонометрических функций.

Ход работы:

Основное тригонометрическое тождество и следствия из него:

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1;$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \cos ec\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi n,\ n\in Z;$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z;$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}n,\quad n\in Z.$$

Задания для самостоятельной работы:

№	Вариант 1	№	Вариант 2
1	Вычислить значение выражения $12\cdot\cos\alpha-4{,}5$. если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	1	Вычислить значение выражения $3{,}5\cdot\sin\alpha-1{,}5$, если $\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.
2	Вычислить значение выражения $3\cos^2\alpha-6+3\sin^2\alpha$ при $\cos\alpha=-0.3$.	2	Вычислить значение выражения $5\sin^2\alpha+0{,}61+5\cos^2\alpha$ при $\sin\alpha=-0.4$.
3	Вычислить значение выражения $2\cos^2\alpha+1$ при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$.	3	Вычислить значение выражения $26\cos^2\alpha-1$ при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$.
4	.Упростите: $\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha:(1-\cos^2\alpha)$.	4	Упростите: $\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha:(1-\sin^2\alpha)$
5	Упростите: $(2+\cos\alpha)\cdot(2-\cos\alpha)+$ $+(2-\sin\alpha)\cdot(2+\sin\alpha)$.	5	Упростите: $(3+\cos\alpha)\cdot(3-\cos\alpha)+$ $+(3-\sin\alpha)\cdot(3+\sin\alpha)$.
6	Упростите: $\frac{\cos t-1}{\sin t}\cdot\frac{\cos t+1}{\sin t}$.	6	Упростите: $\frac{\sin t-1}{\cos t}\cdot\frac{\sin t+1}{\cos t}$.
7	Упростите: $\frac{1-\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}$.	7	Упростите: $\frac{1+\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{1-\cos x}$.
8	Упростите: $(\sin\alpha-2\cos\alpha)^2+4\sin\alpha\cos\alpha$	8	Упростите: $(3\sin\alpha+2\cos\alpha)^2-12\sin\alpha\cos\alpha$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 30

Название практической работы: *Выполнение тождественных преобразований с помощью формул приведения.*

Цель работы: Научиться использовать формулы приведения для выполнения тождественных преобразований.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 01, ПРу 06.

знания:

- Понятие о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе.

– Понятие о формулах приведения.

умения: Использование формул приведения для упрощения и вычисления тригонометрических выражений.

Ход работы:

Для вычисления значений тригонометрических функций любого угла нужно уметь свести эту задачу к вычислению тригонометрических функций соответствующего острого угла.

С этой целью необходимо:

1. Воспользоваться периодичностью тригонометрических функций и добавить (или вычесть) к аргументу функции целое число периодов, чтобы в результате под знаком функции оказался угол, меньший по модулю одного периода.

Пример. $\sin 405° = \sin(360° + 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Воспользоваться свойствами четности или нечетности тригонометрических функций.

Например: $tg\ 863° = tg\ (5 \cdot 180° - 37°) = tg(-37°) = -\,tg\ 37°$

$\cos 1313° = \cos(4 \cdot 360° - 27°) = \cos(-27°) = \cos 27°.$

К острому углу можно перейти, пользуясь формулами приведения.

Формулами приведения называются формулы, выражающие тригонометрические функции углов $90° \pm \alpha$, $180° \pm \alpha$, $270° \pm \alpha$, $360° \mp \alpha$ через тригонометрические функции угла α.

Углы $180° \pm \alpha$ и $360° \pm \alpha$ считают образованными отклонением α от горизонтальной оси; а углы $90° \pm \alpha$ и $270° \pm \alpha$ – отклонением угла α от вертикальной оси.

Правила приведения: В левой части формулы приведения стоит приводимая функция.

I. *Если угол образован отклонением от горизонтальной оси, т.е., то название функции не изменяется, а знак берётся тот, который имеет исходная функция* в данной четверти.

Например, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

II. *Если угол образован отклонением от вертикальной оси, то название функции изменяется (sin на cos, tg на ctg), а знак берётся тот, который имеет исходная функция в данной четверти.*

Например, $\sin(90° \pm \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$.

Примеры: Составить формулы приведения для 1) $\cos(360° - \alpha)$ и 2) $ctg(90° + \alpha)$ на основании указанных правил.

1) Угол $360° - \alpha$ получен отклонением угла α от горизонтальной оси, поэтому в правой части формулы приведения ставится исходная функция, т.е. $\cos\alpha$ со знаком «+» или «-» . Если угол α острый, то угол $360° - \alpha$ является углом четвертой четверти, в которой косинус положительный, следовательно, $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$.

2) Угол $90° + \alpha$ получен откладыванием угла α от вертикальной оси, поэтому в формуле приведения функция $ctg(90° + \alpha)$ перейдет в ко-функцию $tg\,\alpha$ со знаком «+» или «-». Если угол α – острый, то угол $90° + \alpha$ есть угол второй четверти, в которой котангенс отрицательный, следовательно, $ctg(90° + \alpha) = -tg\,\alpha$.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1.

1. Упростить выражение:

а) $tg\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot tg(\pi+\alpha)-\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cdot\sin\left(\pi+\alpha\right)$;

б) $ctg\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\pi+\alpha)$.

2. Вычислить:

$$а)\ \sin\frac{5\pi}{4};\quad б)\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right);\quad в)\ tg\frac{5\pi}{3};\quad г)\sin\frac{40\pi}{3};\quad д)\,ctg\frac{11\pi}{6}.$$

г) $\sin(-225^0)\cdot\cos(-120^0)\cdot tg330^0\cdot ctg240^0$;

Вариант 2.

1. Упростить выражение:

а) $\sin(\pi-\beta)\cdot\cos(\frac{3\pi}{2}-\beta)+ctg\left(\frac{3}{2}\pi+\beta\right)\cdot ctg\left(\pi-\beta\right)$;

б) $\cos(\frac{3}{2}\pi-\alpha)\cdot\sin(\pi-\alpha)+\cos(2\pi-\alpha)\cdot\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})+tg(\pi-\alpha)\cdot tg(\frac{3}{2}\pi-\alpha)$.

2. Вычислить:

$$а)\ \sin\frac{11\pi}{3};\quad б)\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right);\quad в)\ tg\frac{13\pi}{4};\quad г)\sin\frac{29\pi}{3};\quad д)\,ctg\left(-\frac{2\pi}{3}\right).$$

г) $\sin 315°\cdot\cos\left(-210^0\right)\cdot tg300°\cdot ctg\left(-240^0\right)$;

Вариант 3.

1. Упростить выражение:

а) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot\cos(\alpha-2\pi)+tg(\frac{3}{2}\pi+\alpha)\cdot tg\left(\pi-\alpha\right)$;

б) $\sin\left(\pi-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\cos^2(3\pi-\alpha)+tg\left(3\pi+\alpha\right)\cdot ctg(\pi-\alpha)$

2. Вычислить:

а) $tg\ \frac{15\pi}{4}$ б)$\cos(-\ \frac{13\pi}{6})$ в) $sin\ \frac{31\pi}{3}$ г)$ctg\ \frac{41\pi}{6}$ д)$ctg(-\ \frac{3\pi}{4})$

г) $\cos(-210^0)\cdot\sin 330^0\cdot tg120^0\cdot ctg(-300^0)$;

Вариант 4.

1. Упростить выражение:

а) $\cos(\pi+\beta)\cdot\sin(\frac{3}{2}\pi+\beta)-ctg\left(\beta-\pi\right)\cdot ctg\left(\frac{3}{2}\pi-\beta\right)$;

б) $\sin(\frac{3}{2}\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+tg(\pi-\alpha)\cdot tg(\frac{3}{2}\pi+\alpha)$.

2. Вычислить:

а) $\cos\frac{17\pi}{6}$ б) $tg(-\frac{19\pi}{4})$ в) $ctg\frac{37\pi}{3}$ г) $\cos\frac{61\pi}{6}$ д) $sin(-\frac{5\pi}{3})$

г) $\sin 240^\circ\cdot\cos\left(-330^0\right)\cdot tg(-315^\circ)\cdot ctg420^\circ;$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 31

Название практической работы: *Выполнение тождественных преобразований с помощью формул сложения.*

Цель работы: формирование навыков использования формул сложения при преобразовании выражений.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 01, ПРу 06.

знания: Понятие о формулах сложения.

умения: Преобразование тригонометрических выражений с помощью формул сложения.

Ход работы:

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$
$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y.$$
$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}$$
$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy}$$
$$ctg(x+y)=\frac{ctgx\cdot ctgy-1}{ctgx+ctgy}$$
$$ctg(x-y)=\frac{ctgx\cdot ctgy+1}{ctgx-ctgy}$$

Пример 1. Вычислите $\cos 15^\circ$.

Решение: представим 15° в виде разности $45^\circ-30^\circ$. Тогда $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Упростите выражение $\cos(x+y)+\cos(x-y)$.

Решение:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y+\cos x\cdot\cos y+$$
$$+\sin x\cdot\sin y=2\cos x\cdot\cos y$$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Вычислите: а); $\sin 75^0$ б) $\dfrac{tg13^0+tg47^0}{1-tg13^0\cdot tg47^0}$;
2. Зная, что $\cos\alpha=\frac{3}{5};\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, вычислите: $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Вариант 2

1. Вычислите: а) $\cos 105^0$; б) $\dfrac{1-tg28^0\cdot tg32^0}{tg28^0+tg32^0}$;
2. Зная, что $\sin\alpha=\frac{12}{13};\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, вычислите: $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$.

Вариант 3

1. Вычислите: а) $\sin 15^0$; б) $\dfrac{tg11^0+tg34^0}{1-tg11^0\cdot tg34^0}$;
2. Зная, что $\cos\alpha=-0.8;\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, вычислите: $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

Вариант 4

1. Вычислите: а) $\sin 105^0$; б) $\dfrac{1+tg76^0\cdot tg31^0}{tg76^0-tg31^0}$;
2. Зная, что $\sin\alpha=-\frac{15}{17};\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, вычислите: $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 32

Название практической работы: *Выполнение тождественных преобразований с помощью формул удвоенного аргумента.*

Цель работы: формирование навыков использования формул двойного угла при преобразовании выражений.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 01, ПРу 06.

знания: Понятие о формулах двойного угла.

умения: Преобразование тригонометрических выражений с помощью формул двойного угла.

Ход работы:

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$$

Пример 1. Упростите выражение $\frac{\sin 2x}{\cos x}$.

Решение: $\frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos x} = 2\sin x$

Пример 2. Упростите выражение $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$.

Решение: $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)\cdot(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x$.

Задания для самостоятельной работы:

1 вариант	2 вариант
1) 20 sin α cos α 2) 4 sin $\frac{\pi}{8}$ cos $\frac{\pi}{8}$ 3) sin 6α cos 6α 4) $\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha$ 5) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{4}$ 6) $\frac{2tg4\alpha}{1-tg^2 4\alpha}$ 7) $12\sin^2 3\alpha\cos^2 3\alpha$ 8) sin $\frac{\alpha}{4}$ cos $\frac{\alpha}{4}$	1) 10 sin α cos α 2) 6 sin $\frac{\pi}{12}$ cos $\frac{\pi}{12}$ 3) sin 3α cos 3α 4) $\sin^2 5\alpha - \cos^2 5\alpha$ 5) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$ 6) $\frac{2tg2\alpha}{1-tg^2 2\alpha}$ 7) $20\sin^2 4\alpha\cos^2 4\alpha$ 8) sin $\frac{\alpha}{6}$ cos $\frac{\alpha}{6}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 33

Название практической работы: *Выполнение тождественных преобразований с помощью формул половинного аргумента.*

Цель работы*:* формирование навыков использования формул половинного угла при преобразовании выражений.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 01, ПРу 06.

знания: Понятие о формулах половинного угла.

умения: Преобразование тригонометрических выражений с помощью формул половинного угла.

Ход работы:

Формулы половинного аргумента

$$1)\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$2)\ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$3)\ tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$4)\ tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$5)\ ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$6)\ ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

*Пример 1:*Дано: $sin\,\alpha = 0{,}6,\ 0° < \alpha < 90°$ Найти: $sin\frac{\alpha}{2}, cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}$.	Решение: 1) Зная sinα, по основному тригонометрическому тождеству, найдем $\cos\alpha$: $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$ $cos^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$, т.к. $\alpha \in$ I четверти, то $cos\,\alpha = 0{,}8$ 2) По формулам половинного угла: $sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2}$ <=> $sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$

	$sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0,8}{2}} = \sqrt{0,1}$ $cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$ $cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+0,8}{2}} = \sqrt{0,9}$ $tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha} <=> tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$ $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0,8}{1+0,8}} = \sqrt{\frac{0,2}{1,8}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ Ответ: $sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,1}$; $cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,9}$; $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.
Пример 2: Найдите $tg\frac{5\pi}{8}$.	Решение: Используя формулу $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{sin\,\alpha}$ $tg\frac{5\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{4}} = \frac{1-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{4}}$ $= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} =$ $= -\sqrt{2}-1$ Ответ: $-\sqrt{2}-1$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	Вариант 2
1) Вычислите $sin\frac{\alpha}{2}, cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}$, если:	
$\sin\alpha = -\frac{4}{5}, \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$
2) Доказать тождество:	
а) $cos^2 3t = \frac{1+sin\left(\frac{\pi}{2}-6t\right)}{2}$	а)$\frac{1-cos\,t}{\sin t} = tg\frac{t}{2}$
б)$2sin^2 2\alpha = 1 + sin(270^{\circ} - 4\alpha)$	б)$2cos^2(45^{\circ} + 3\alpha) + sin6\alpha = 1$
3) Вычислить:	
а)$\sin 22,5^{\circ}$	а)$\sin 15^{\circ}$
б) $\frac{3\pi}{8}$	б) $\frac{\pi}{8}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 34

Название практической работы: *Преобразование суммы тригонометрических функций в* *произведение.*

Цель работы*:* На конкретных примерах научиться преобразовывать сумму тригонометрических функций в произведение

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 01, ПРу 06.

знания: Понятие о формулах преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

умения: Преобразование тригонометрических выражений с помощью формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Ход работы:

Для преобразования алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение применяются формулы:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$
$$cos\,\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$cos\,\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$
$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Пример 1. Вычислить: $\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$

Решение:

$$\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12} = -2\cdot \text{Sin}\frac{\frac{11\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\cdot \text{Sin}\frac{\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2} = -2\cdot \text{Sin}\frac{\frac{16\pi}{12}}{2}\cdot \text{Sin}\frac{\frac{6\pi}{12}}{2} =$$

$$= -2\cdot \text{Sin}\frac{2\pi}{3}\cdot \text{Sin}\frac{\pi}{4} = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

*Пример 2***.** Вычислить: $\cos(\frac{\pi}{4} - \beta) - \cos(\frac{\pi}{4} + \beta)$

Решение:

$$\cos(\frac{\pi}{4} - \beta) - \cos(\frac{\pi}{4} + \beta) = -2\,\text{Sin}\frac{\frac{\pi}{4}-\beta+\frac{\pi}{4}+\beta}{2}\cdot \text{Sin}\frac{\frac{\pi}{4}-\beta-\frac{\pi}{4}-\beta}{2} =$$

$$= 2\,\text{Sin}\frac{\pi}{4}\cdot \text{Sin}(-\beta) = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \text{Sin}\,\beta = \sqrt{2}\,\text{Sin}\,\beta.$$

Задания для самостоятельной работы:

1 вариант	***2 вариант***

Преобразуйте в произведение			
1.	$\sin 60^0 + \sin 40^0$	1.	$\cos 70^0 + \sin 40^0$
2.	$\cos 10^0 - \sin 20^0$	2.	$\cos 75^0 + \cos 15^0$
3.	$\cos 20^0 - \cos 80^0$	3.	$tg25^0 - Ctg70^0$
4.	$\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$	4.	$\sin\frac{\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}$
5.	$\sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$	5.	$tg\,\frac{3\pi}{14} - tg\,\frac{5\pi}{14}$
6.	$tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$	6.	$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$
Вычислите:			
7.	$tg22^0 30' - tg67^0 30'$	7.	$tg13^0 30' + tg76^0 30'$
8.	$\sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}.$	8.	$\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12}.$
Преобразовать в произведение:			
9.	$2\cos\alpha + 1$	9.	$2\cos\alpha + \sqrt{3}$
Упростить:			
10.	$\cos^2(\alpha - \frac{\pi}{6}) - \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{6})$;	10.	$\cos^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) - \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{3})$;

Преобразуйте в сумму			
7.	$\sin 45^0 \sin 15^0$	11.	$\cos 35^0 \sin 33^0$
8.	$\cos 50^0 \cos 15^0$	12.	$\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$
9.	$4\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$	13.	$12\sin(-9\alpha)\sin 4\alpha$
10.	$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$	14.	$\cos(\alpha + \beta)\cos(2\alpha + \beta)$
11.	$4\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$	15.	$4\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 35

Название практической работы: *Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.*

Цель работы: На конкретных примерах научиться преобразовывать произведение тригонометрических функций в сумму.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 01, ПРу 06.

знания: Понятие о формулах преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

умения: Преобразование тригонометрических выражений с помощью формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Ход работы:

При выполнении заданий по данной теме нужно уметь применять следующие формулы:

1. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$cos\,\alpha\cdot\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Пример 1. Преобразовать произведение в сумму

$$\sin 43^\circ\cdot\cos 19^\circ=\frac{\sin(43^\circ-19^\circ)+\sin(43^\circ+19^\circ)}{2}=\frac{1}{2}(\sin 24^\circ+\sin 62^\circ)$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Замените произведение тригонометрических функций суммой:

1) $\cos 52^\circ\cos 22^\circ$;
2) $2\sin 52^\circ\cos 8^\circ$;
3) $\sin 52^\circ\sin 7^\circ$;
4) $2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{4}$;
5) $\cos 50^\circ\cos 58^\circ$;
6) $\sin 31^\circ\cos 41^\circ$;
7) $2\sin 24^\circ\sin 44^\circ$;
8) $2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{14}$.

2. Упростите выражения:

1) $\cos 3\alpha\cos\alpha-\cos 7\alpha\cos 5\alpha$;
2) $\cos 3\alpha\cos\alpha-\sin 3\alpha\sin\alpha$;
3) $\sin 4\beta\cos 3\beta-\sin 5\beta\cos 2\beta$;
4) $\sin 4\beta\cos 3\beta-\cos 4\beta\sin 3\beta$.

3. Проверьте равенства:

1) $\cos 50^\circ+2\sin 40^\circ\sin 10^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $2\sin 25^\circ\cos 5^\circ-\sin 20^\circ=\frac{1}{2}$;
3) $\sin 5\alpha-2\cos 4\alpha\sin\alpha=\sin 3\alpha$;
4) $2\cos 40^\circ\cos 10^\circ-\cos 50^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\sin 20^\circ+2\cos 25^\circ\sin 5^\circ=\frac{1}{2}$;
6) $\cos 3\alpha-2\sin 2\alpha\sin 5\alpha=\cos 7\alpha$.

4. Вычислите:

1) $\text{tg}\,15° + \text{tg}\,75°$;

2) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cos 2$;

3) $\text{tg}\,41°\,\text{tg}\,43°\,\text{tg}\,45°\,\text{tg}\,47°\,\text{tg}\,49°$;

4) $\text{tg}\,20°\,\text{tg}\,40°\,\text{tg}\,50°\,\text{tg}\,70°$;

5) $\sin^4\frac{3\pi}{8} - \cos^4\frac{3\pi}{8}$;

6) $\sin^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8}$;

7) $\sin^6\frac{3\pi}{8} + \cos^6\frac{3\pi}{8}$;

8) $\cos^8\frac{\pi}{8} - \sin^8\frac{\pi}{8}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 36

Название практической работы: *Преобразование тригонометрических выражений.*

Цель работы*:* Формирование умений преобразования тригонометрических выражений на основе ранее изученных тригонометрических формул.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 01, ПРу 06.

знания: Понятие о тригонометрических формулах.

умения: Преобразование тригонометрических выражений с помощью различных тригонометрических формул.

Ход работы:

Перед выполнением работы повторите все изученные ранее формулы:

Вариант 1.

А1. Упростите выражение $\sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \cos 2\alpha \cdot \cos 3\alpha - \cos 5\alpha$.

А2. Вычислите $2\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$, если $\cos^2\alpha = \frac{2}{7}$.

А3. Упростите выражение $\sin\frac{2\pi}{15} \cdot \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{15} \cdot \sin\frac{\pi}{5}$.

А4. Упростите выражение $\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{12}$.

А5. Вычислите: $\sin\left(180^{o} - 60^{o}\right) + \cos\left(270^{o} + 30^{o}\right)$.

А6. Упростите выражение $\frac{1 - \text{tg}^2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

А7. Вычислите: $\cos\left(270^{o}+60^{o}\right)+\cos\left(180^{o}-60^{o}\right)$.

А8. Упростите выражение $\left(1+\mathrm{ctg}^{2}\alpha\right)\left(\cos^{2}\alpha-1\right)$.

А9. Найдите значение выражения

$5\cos x\cdot\sin 2x-5\cos 2x\cdot\sin x$, если $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{3}{5}$.

А10. Найдите значение выражения

$5\cos x\cdot\sin 2x+5\cos 2x\cdot\sin x$, если $5\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=-2$.

А11. Упростите выражение $\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+3-\sin 2x$.

А12. Упростите выражение $\cos x\cos(2\pi-x)+2-\sin^{2}x$.

А13. Упростите выражение $\sin 5\alpha\cdot\sin 3\alpha+\cos 5\alpha\cdot\cos 3\alpha-\cos 8\alpha$.

А14. Вычислите $4\sin^{2}\alpha-12\cos^{2}\alpha$, если $\sin^{2}\alpha=\frac{3}{8}$.

В1. Найдите значение выражения $\sqrt{7}\cos\alpha-\frac{1}{2}$, если $\sin\alpha=-\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\alpha\in\left[90^{o};\ 270^{o}\right]$

В2. Найдите значение выражения $\sqrt{6}\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Вариант 2.

А1. Найдите значение выражения $7-24\sin^{2}\alpha\cdot\cos^{2}\alpha$, если $\sin 2\alpha=-\frac{1}{6}$.

А2. Вычислите $4\sin^{2}\alpha-5\cos^{2}\alpha$, если $\sin^{2}\alpha=\frac{2}{3}$.

А3. Упростите выражение $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{42}-\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{42}$.

А4. Упростите выражение $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{42}+\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{5\pi}{42}$.

А5. Вычислите: $\cos\left(180^{o}+60^{o}\right)-\cos\left(90^{o}+60^{o}\right)$.

А6. Упростите выражение $\left(\frac{1}{\cos^{2}\alpha}-\mathrm{tg}^{2}\alpha\right)-2\sin^{2}\alpha$.

А7. Вычислите: $\cos\left(360^{o}+45^{o}\right)+\cos\left(270^{o}-45^{o}\right)$.

А8. Упростите выражение $\dfrac{8\sin^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$.

А9. Найдите значение выражения

$3\cos x\cdot\sin 2x-3\cos 2x\cdot\sin x$, если $\sin(3\pi+x)=-\dfrac{2}{3}$.

А10. Найдите значение выражения
$5\sin 2x\cdot\sin x+5\cos 2x\cdot\cos x$, если $5\cos(5\pi-x)=3$.

А11. Упростите выражение $2(\cos 4x\cdot\cos 7x+\sin 2x)+2\cdot\sin 4x\cdot\sin 7x$.

А12. Упростите выражение $\sin\alpha\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)-1-\cos^2\alpha$.

А13. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}$.

А14. Вычислите $9\sin^2\alpha-4$, если $\cos\alpha=-\dfrac{2}{9}$.

В1. Найдите значение выражения $\sqrt{6}\cos(2\pi+\alpha)$, если $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$.

В2. Найдите значение выражения $-\sqrt{26}\cos\alpha-\dfrac{1}{5}$, если $\sin\alpha=-\sqrt{\dfrac{5}{13}}$, $\alpha\in\left[-90^\circ;\ 90^\circ\right]$.

Вариант 3.

А1. Найдите $\cos^2\alpha$, если $\cos 2\alpha=\dfrac{2}{3}$.

А2. Вычислите $4\sin^2\alpha-5\cos^2\alpha$, если $\sin^2\alpha=\dfrac{2}{3}$.

А3. Упростите выражение $\cos\dfrac{\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{\pi}{20}-\sin\dfrac{\pi}{5}\cdot\sin\dfrac{\pi}{20}$.

А4. Упростите выражение $\sin\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{21}+\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{4\pi}{21}$.

А5. Вычислите: $\cos\left(90^\circ+30^\circ\right)+\cos\left(360^\circ-60^\circ\right)$.

А6. Упростите выражение $\dfrac{16\cos^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

А7. Вычислите: $\cos\left(360^\circ+45^\circ\right)+\cos\left(270^\circ-45^\circ\right)$.

А8. Упростите выражение $\dfrac{8\sin^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$.

А9. Найдите значение выражения

$3\sin 2x\cdot\sin x-3\cos 2x\cdot\cos x$, если $\cos(3\pi-3x)=\frac{2}{3}$.

A10. Найдите значение выражения

$3\sin x\cdot\sin 3x-3\cos x\cdot\cos 3x$, если $3\cos(4\pi-4x)=-1$.

A11. Упростите выражение $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(2\pi-x)\right)-3-\sin^2\frac{x}{2}$.

A12. Упростите выражение $\cos 2\alpha\cdot\cos(2(2\pi+\alpha))-3-\sin^2 2\alpha$.

A13. Вычислите $8-14\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{7}$.

A14. Упростите выражение $\sin 6\alpha\cdot\cos 4\alpha+\sin 4\alpha\cdot\cos 6\alpha-2\sin 10\alpha$.

B1. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{13}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha=\sqrt{\frac{5}{13}}$, $\alpha\in\left[180^{\circ};\ 360^{\circ}\right]$

.**B2.** Найдите значение выражения $\sqrt{6}\cos(2\pi+\alpha)$, если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Вариант 4.

A1. Найдите $\cos^2\alpha$, если $\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$.

A2. Вычислите $5\cos^2\alpha-1$, если $\sin\alpha=\frac{1}{4}$.

A3. Упростите выражение $\cos 54^{\circ}\cdot\cos 9^{\circ}+\sin 54^{\circ}\cdot\sin 9^{\circ}$.

A4. Упростите выражение $\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{15}-\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{15}$.

A5. Вычислите: $\cos\left(360^{\circ}-60^{\circ}\right)+\cos\left(270^{\circ}+60^{\circ}\right)$.

A6. Упростите выражение $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\cos 2\alpha}$.

A7. Вычислите: $\sin\left(360^{\circ}-45^{\circ}\right)+\cos\left(270^{\circ}+45^{\circ}\right)$.

A8. Упростите выражение $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+\sin 2\alpha$.

A9. Найдите значение выражения

$7\cos 2x\cdot\cos x+7\sin 2x\cdot\sin x$, если $7\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=2$.

A10. Найдите значение выражения

$1{,}5\sin x\cdot\sin 3x+1{,}5\cos 3x\cdot\cos x$, если $4\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-2$.

A11. Упростите выражение $\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)+1-\cos^2\frac{x}{3}$.

А12. Упростите выражение $\cos 3\beta \cdot \sin\left(3\left(\pi+\beta\right)\right)-2+1{,}5\cdot\sin 6\beta$.

А13. Вычислите $10\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, если $\cos^2\alpha=\dfrac{3}{5}$.

А14. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{3}{7}$.

В1. Найдите значение выражения $1-\sqrt{\dfrac{14}{3}}\sin\left(\alpha+\pi\right)$, если $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{7}}$, $\alpha\in\left[0^{\circ};\ 180^{\circ}\right]$

.

В2. Найдите значение выражения $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cos\left(\pi-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha\in\left[0^{\circ};\ 90^{\circ}\right]$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 37

Название практической работы: *Исследование свойств и построение графиков тригонометрических и обратных тригонометрических функций.*

Цель работы: На конкретных примерах научиться строить тригонометрические функции, определять их основные свойства.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 01, ПРу 06.

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02

предметные: ПРб 04, ПРб 05, ПРу 08

знания:

– Понятие о графиках тригонометрических функций.
– Понятие о области определения и значения, монотонности, экстремумах и нулях функции.

умения: Построение графиков тригонометрических функций.

Ход работы:

Графики функций $y=\sin \mathrm{A}$, $y=\cos \mathrm{A}$, $y=tg\,A$, построенные для диапазона от 0º до 360º, показаны на рисунках ниже.

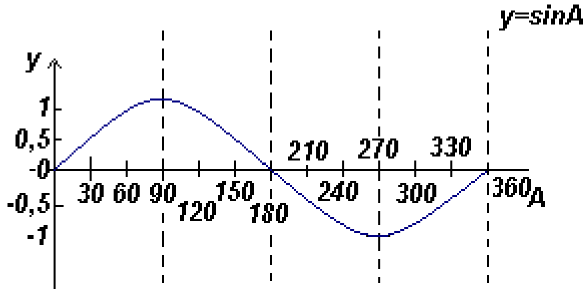


График функции $y=sinA$(синусоида)

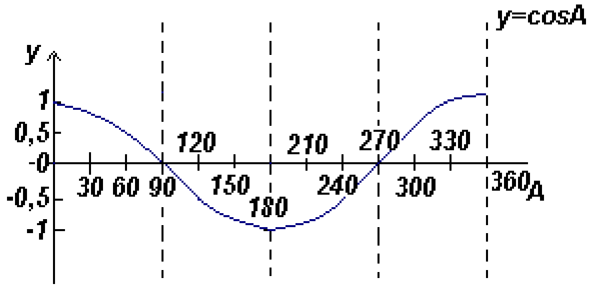


График функции $y=cosA$(косинусоида)

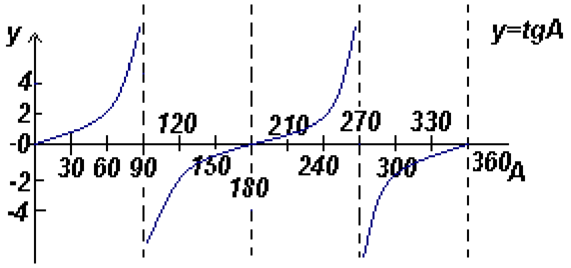


График функции $y = tgA$(тангенсоида)

Синусоидальные и косинусоидальные графики

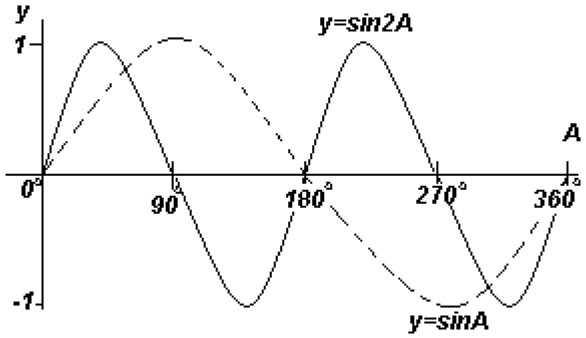


График. $y = sinA$ и $y = sin2A$ (синусоиды).

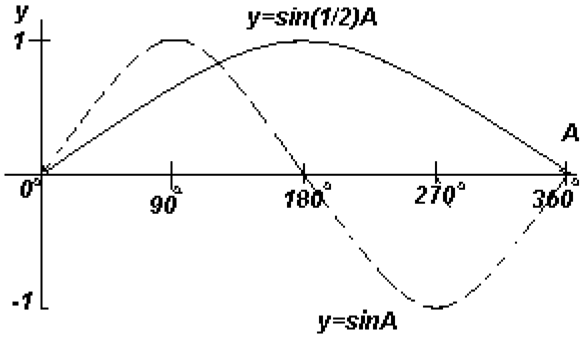


График. $y = sinA$ и $y = sin(1/2)A$ (синусоиды).

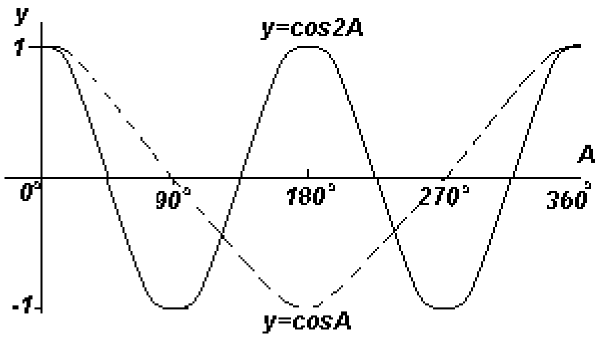


График. $y = cosA$ и $y = cos2A$ (косинусоиды)

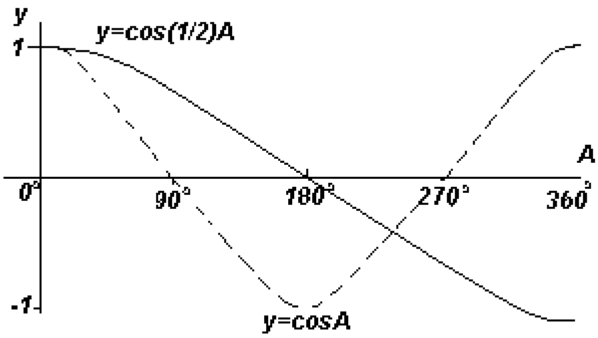


График. $y = cosA$ и $y = cos(1/2)A$ (косинусоиды).

Периодические функции и период

Каждый из графиков функций, показанных на четырех рисунках выше, повторяется при увеличении угла A, поэтому их называют **периодическими функциями**. Функции $y = sinA$ и $y = cosA$ повторяются через каждые 360° (или 2π радиан), поэтому 360° называется **периодом** этих функций. Функции $y = sin2A$ и $y = cos2A$ повторяются через каждые 180° (или π радиан),поэтому 180° - это период для данных функций.

В общем случае если $y = \sin pA$ и $y = \cos pA$ (где p - константа), то период функции равен 360°/p (или 2π/p радиан). Следовательно, если $y = \sin 3A,$ то период этой функции равен 360°/3= 120°, если $y = cos4A$, то период этой функции равен 360°/4= 90°.

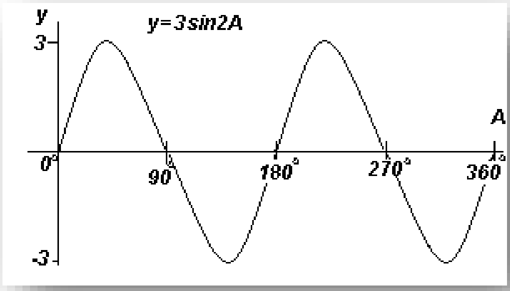
Амплитуда

Амплитудой называется максимальное значение синусоиды. Каждый из графиков 1-4 имеет амплитуду +1 (т.е. они колеблются между +1 и -1). Однако, если $y = 4sinA$, каждая из величин $sinA$ умножается на 4, таким образом, максимальная величина амплитуды - 4. Аналогично для $y = 5cos2A$ амплитуда равна 5, а период - 360°/2= 180°.

Пример 1. Построить $y = 3sin2A$ в диапазоне от А= 0° до А=360°.

Решение: Амплитуда =3, период = 360°/2 =180°.

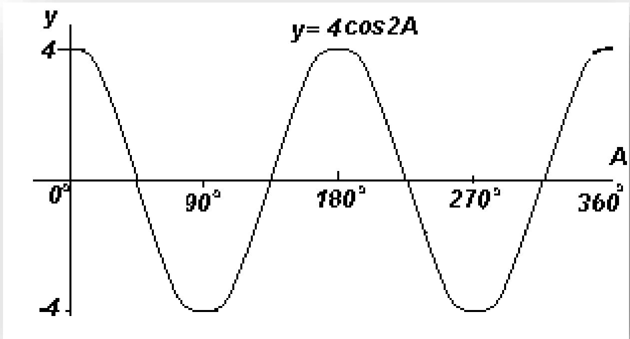
График. Построение $y = 3sin2A$ (синусоида).



Пример 2. Построить график $y = 4cos2x$ в диапазоне от x=0° до x=360°

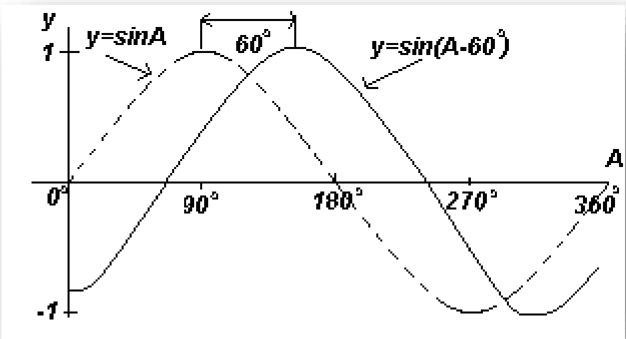
Решение: Амплитуда = 4. период = 360°/2 =180°.

График. Построение $y = 4cos2x$ (косинусоида).

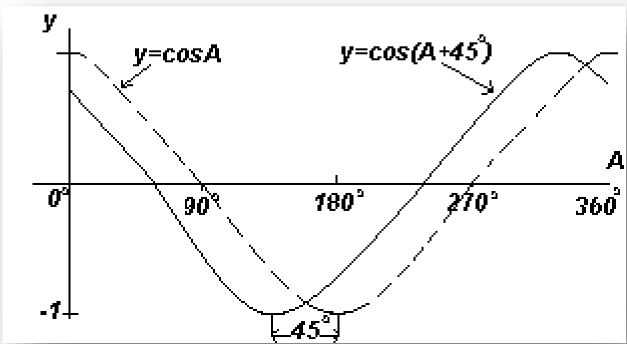


Углы запаздывания и опережения

Кривые синуса и косинуса не всегда начинаются в 0°. Чтобы учесть это обстоятельство, периодическая функция представляется в виде $y = \sin(A \pm \alpha)$, где α - сдвиг фазы относительно $y = sinA$ и $y = cosA$.

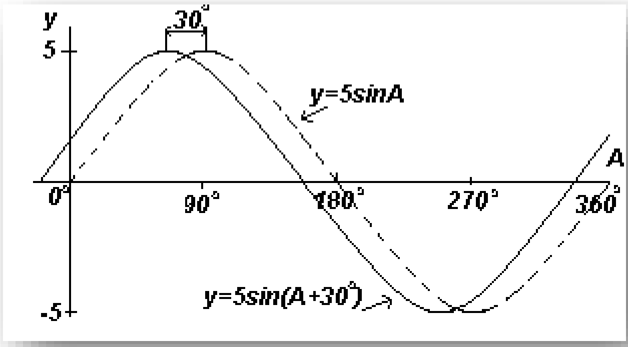


Составив таблицу значений, можно построить график функции $y = sin(A - 60o)$, показанный на рис. слева. Если кривая $y = sinA$ начинается в 0°, то кривая $y = sin(A - 60^0)$ начинается в 60° (т.е. ее нулевое значение на 60° правее). Таким образом, говорят, что $\mathrm{y} = \sin(\mathrm{A} - 60^0)$ **запаздывает** относительно $y = sinA$ на 60^0. График. y=sin(A-60°) (синусоида).



Составив таблицу значений, можно построить график функции $y = cos(A + 45^0)$, показанный на рис. ниже. Если кривая $y = cosA$ начинается в 0°, то кривая$y = cos(A + 45^0)$ начинается на 45° левее (т.е. ее нулевая величина находится на 45° раньше). Таким образом, говорят, что графику$= cos(A + 45^0)$ **опережает** график $y = cosA$ на 45°. График. y=cos(A+45°) (косинусоида).

В общем виде, график $y = sin(A - \alpha)$ запаздывает относительно $y = sinA$на угол α. Косинусоида имеет ту же форму, что и синусоида, но начинается на 90° левее, т.е. опережает

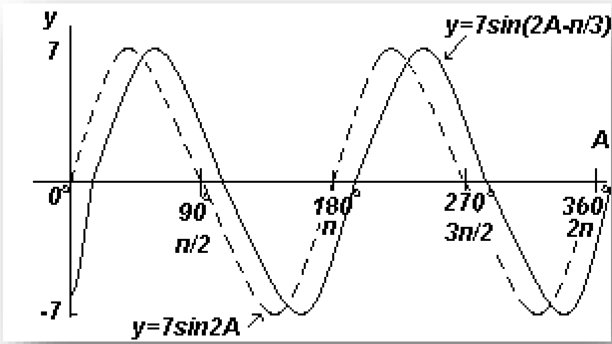


ее на 90°. Следовательно, $cosA = sin(A + 90^0)$. **Пример 3.** Построить график $y = 5sin(A + 30^0)$ в диапазоне от A=0° до $A = 360^0$

Решение: Амплитуда = 5, период = 360°/1 = 360°. $5sin(A + 30^0)$опережает $5sinA$ на 30° т.е. начинается на 30° раньше.

График y=5sin(A+30°) (синусоида).

Пример 4.Построить график $y = 7sin(2A - \pi/3)$ в диапазоне от A=0° до A=360°. **Решение:**
Амплитуда = 7, период =2π/2= π радиан
В общем случае $\boldsymbol{y = sin(pt - \alpha)}$ **запаздывает относительно** $\boldsymbol{y = sinpt}$ на $\boldsymbol{\alpha/p}$, следовательно $7sin(2A - \pi/3)$ запаздывает относительно $7sin2A$ на (π/3)/2, т.е. на π/6 радиан или на 30°.
График. $y = 7sin2A$ и $y = 7sin(2A - \pi/3)$ (синусоиды).



Задания для самостоятельной работы:

Постройте графики функций:

1 вариант		*2 вариант*	
1.	$y = 3\sin x$	1.	$y = 2\cos x$
2.	$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	2.	$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
3.	$y = tg\frac{x}{2}$	3.	$y = \mathrm{Ctg}\frac{x}{3}$
4.	$y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	4.	$y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
Определите свойства функции в задании под № 2.			

Тест № 1 по теме: «Распознавание графиков тригонометрических функций»

Вариант №1

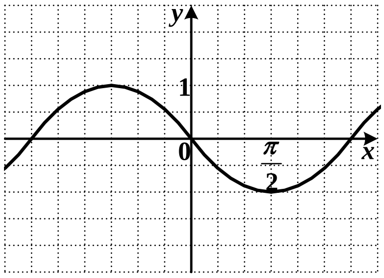
1.График какой функции изображен на рисунке?

1) $y = \sin x$

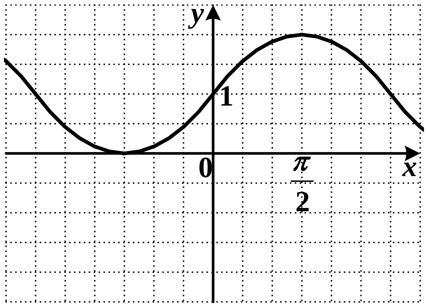
2) $y = -\cos x$

3) $y = -\sin x$

4) $y = \cos x$



2.График какой функции изображен на рисунке?



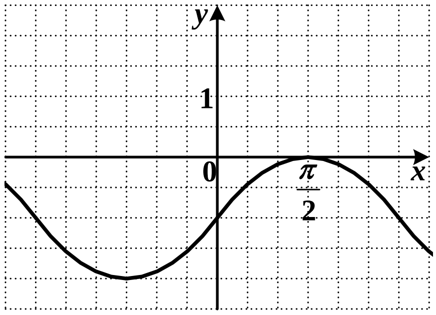
1) $y = \cos x + 1$

2) $y = \sin x - 1$

3) $y = \cos x - 1$

4) $y = \sin x + 1$

3. График какой функции изображен на рисунке?



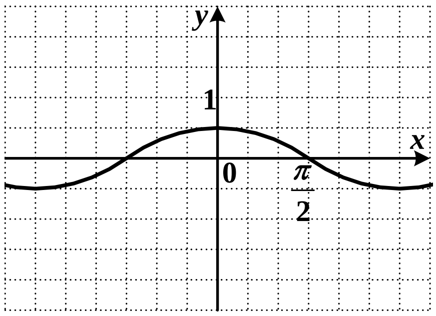
1) $y = \cos x - 1$

2) $y = \sin x - 1$

3) $y = \cos x + 1$

4) $y = \sin x + 1$

5.График какой функции изображен на рисунке?



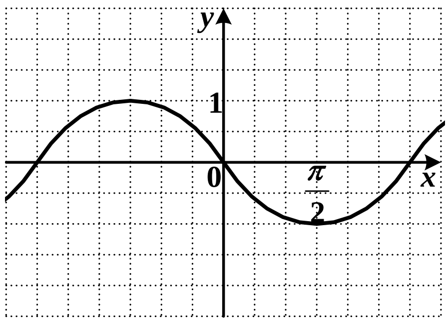
1) $y = \frac{1}{2}\cos x$

2) $y = -2\sin x$

3) $y = \frac{1}{2}\sin x$

4) $y = -\frac{1}{2}\cos x$

5. График какой функции изображен на рисунке?



1) $y = \sin x$

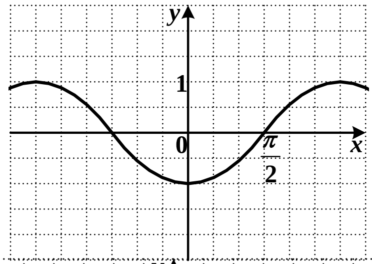
2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

3) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

4) $y = -\cos x$

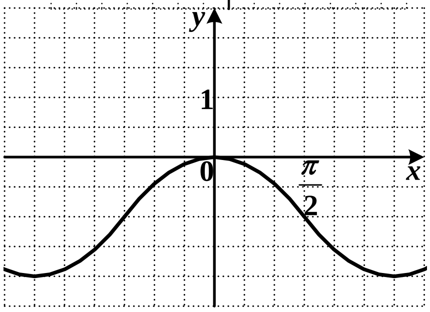
Вариант №2

1.График какой функции изображен на рисунке?



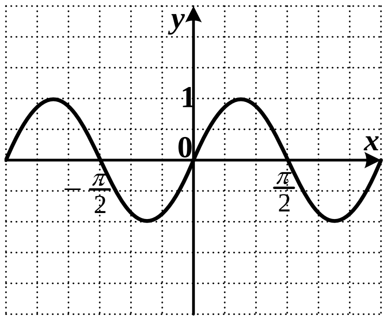
1) $y = \sin x$
2) $y = \cos x$
3) $y = -\sin x$
4) $y = -\cos x$

2.График какой функции изображен на рисунке?



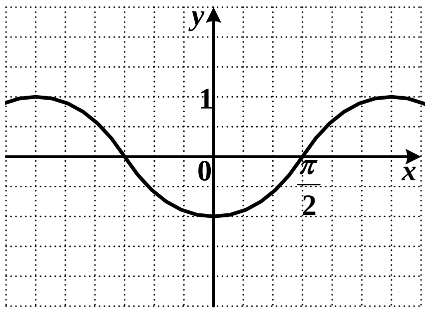
1) $y = \sin x - 1$
2) $y = \cos x - 1$
3) $y = \sin x + 1$
4) $y = \cos x + 1$

3.График какой функции изображен на рисунке?



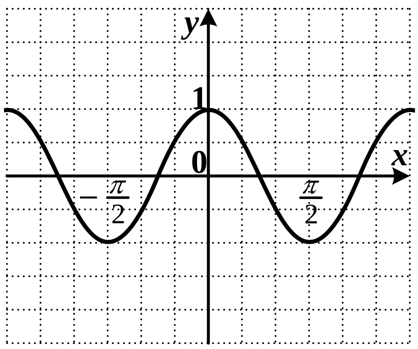
1) $y = -2\cos x$
2) $y = \cos\frac{x}{2}$
3) $y = \frac{1}{2}\sin x$
4) $y = \sin 2x$

4. График какой функции изображен на рисунке?



1) $y = -\sin x$
2) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
3) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
4) $y = -\cos x$

5 .График какой функции изображен на рисунке?



1) $y = \frac{1}{2}\cos x$
2) $y = \cos 2x$
3) $y = \sin\frac{x}{2}$
4) $y = -2\sin x$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 38

Название практической работы: *Использование свойств тригонометрических функций в профессиональных задачах.*

Цель работы: Выяснить области применения тригонометрических функций в различных областях науки и практики.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные: ПРб 01, ПРб 04, ПРб 05, ПРб 06, ПРб 14, ПРу 16, ПРу 18, ПРу 19.

знания: свойства и графики тригонометрических функций.

умения: применение тригонометрических формул для решения практических задач.

Ход работы:

Используя различные источники информации, найдите ответ на следующий на вопрос: как используются тригонометрические функции в:

1) Астрономии;
2) Навигации;
3) Акустике;
4) Оптике;
5) Биологии;
6) Медицине;
7) Сейсмологии;
8) Метеорологии;
9) Архитектуре и строительстве;
10) Картографии;
11) Разработке компьютерных игр.

А также приведите ещё свои примеры использования тригонометрических функций.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 39

Название практической работы: *Решение уравнений вида sin x= a и cos x=a.*

Цель работы: Выработать навыки решения простейших тригонометрических уравнений.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные: ПРб 03, ПРу 07.

знания: Понятие о простейших тригонометрических уравнениях и методах их решения.

умения: Нахождение корней простейших тригонометрических уравнений.

Ход работы:

Уравнения вида: $\cos x = a$, $\sin x = a$, называются **простейшими тригонометрическими уравнениями.**

Для решения простейших тригонометрических уравнений применяем формулы:

$$\cos x = a,\ |a| \le 1$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in z \text{ при } a\rangle 0$$

$$x = \pm(\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in z \text{ при } a\langle 0.$$

Частные случаи:

при $a = 1$ $x = 2\pi n$, $n \in z$;

при $a = 0$ $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$;

при $a = -1$ $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$.

$$\sin x = a,\ |a| \le 1$$

$$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k,\ k \in z, \text{ при } a\rangle 0,$$

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin a + \pi k, k \in z, \text{ при } a\langle 0.$$

Частные случаи:

при $a = 1$ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$;

при $a = -1$ $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$;

при $a = 0$ $x = \pi k$, $k \in z$.

Необходимо помнить: $\arcsin(-a) = -\arcsin a$;

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

Рассмотрим примеры решения уравнений.

1. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Используем формулу $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, $k \in z$.

Подставим в формулу $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, получим $x = (-1)^k \cdot \arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $k \in z$.

Найдем $\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ по таблице: $\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Записываем ответ: $x = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in z$.

2. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Используем формулу $x = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin a + \pi k$, $k \in z$.

Подставим в формулу $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, получим $x = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $k \in z$.

Найдем $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ по таблице: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

Записываем ответ: $x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in z$.

3. $\cos x=\frac{1}{2}$.

Используем формулу $x=\pm\arccos a+2\pi n$, $n\in z$.

Подставляем в формулу $a=\frac{1}{2}$, получаем $x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n$, $n\in z$.

Находим значение $\arccos\frac{1}{2}$ по таблице.

Записываем ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in z$.

4. $\cos x=-\frac{1}{2}$.

Используем формулу $x=\pm(\pi-\arccos a)+2\pi n$, $n\in z$.

Подставляем в формулу , получаем $x=\pm(\pi-\arccos\frac{1}{2})+2\pi n$, $n\in z$.

Находим значение $\arccos\frac{1}{2}$ по таблице, выполняем необходимые вычисления.

Записываем ответ: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in z$.

Задания для самостоятельной работы:

1 вариант.

Решите уравнения:

1) $2\cos x+\sqrt{3}=0$

2) $2\sin x-1=0$

3) $2\sin(-\frac{x}{3})=\sqrt{2}$

4) $2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$

5) $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\sin 2x\cos 2x=-\frac{1}{4}$

2 вариант.

Решите уравнения:

1) $2\cos x+\sqrt{2}=0$

2) $2\sin x-\sqrt{3}=0$

3) $2\cos(-2x)=-\sqrt{3}$

4) $2\sin(3x-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$

5) $2(\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{5})=\sqrt{2}$

6) $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=1$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 40

Название практической работы: *Решение уравнений вида tg x= a и ctg x=a.*

Цель работы: Выработать навыки решения простейших тригонометрических уравнений.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 03, ПРу 07.

знания: Понятие о простейших тригонометрических уравнениях и методах их решения.

умения: Нахождение корней простейших тригонометрических уравнений.

Ход работы:

Уравнения вида: $tgx = a$, $ctgx = a$ называются **простейшими тригонометрическими уравнениями.** Для решения простейших тригонометрических уравнений применяем формулы:

$$tgx = a$$

$$x = arctga + \pi n,\ n \in z \text{, при } a\rangle 0$$

$$x = -arctga + \pi n, n \in z \text{, при } a\langle 0$$

$$ctgx = a$$

$$x = arcctga + \pi k,\ k \in z \text{, при } a\rangle 0$$

$$x = \pi - arcctga + \pi k,\ k \in z \text{, при } a\langle 0$$

Необходимо помнить:

$$arctg(-a) = -arctga$$

$$arcctg(-a) = \pi - arcctga.$$

Рассмотрим примеры решения уравнений.

1. $tgx = 1$

Используем формулу $x = arctga + \pi n$, $n \in z$.

Подставляем $a = 1$, получаем $x = arctg1 + \pi n$, $n \in z$.

По таблице находим значение $arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

Записываем ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in z$.

2. $tgx = -1$

Используем формулу $x = -arctga + \pi n$, $n \in z$.

Подставляем $a = 1$, получаем $x = -arctg1 + \pi n$, $n \in z$.

По таблице находим значение $arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

Записываем ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in z$.

3. $ctgx = \sqrt{3}$.

Используем формулу $x = arcctga + \pi n$, $n \in z$.

Подставляем $a = \sqrt{3}$, получаем $x = arcctg\sqrt{3} + \pi n$, $n \in z$.

По таблице находим $arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

Записываем ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in z$.

4. $ctgx = -\sqrt{3}$.

Используем формулу $x = \pi - arcctga + \pi n$, $n \in z$.

Подставляем $a = \sqrt{3}$, получаем $x = \pi - arcctg\sqrt{3} + \pi n$, $n \in z$.

По таблице находим $arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, выполняем необходимые вычисления.

Записываем ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in z$.

Вариант 1	*Вариант 2*
1) $tg(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{7}) = 1$ 2) $\frac{2tgx}{1-tg^2x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 3) $\frac{tg5x - tg3x}{1+tg5x \cdot tg3x} = 0$	1) $ctg(2x - \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ 2) $\frac{tg\frac{\pi}{4} - tgx}{1+tg\frac{\pi}{4} \cdot tgx} = \sqrt{3}$ 3) $\frac{2tgx}{1-tg^2x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 41

Название практической работы: *Основные методы решения тригонометрических уравнений.*

Цель работы: Выработать навыки решения тригонометрических уравнений.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 03, ПРу 07.

знания: Понятие о тригонометрических уравнениях и методах их решения.

умения: Нахождение корней тригонометрических уравнений.

Ход работы:

Уравнение	Способ решения	Формулы
1. Уравнение содержит только синусы или косинусы (синусы и косинусы) вида $a\sin^2 f(x) + b\sin f(x) + c = 0$	Уравнение сводится к квадратному (биквадратному) относительно синуса (косинуса)	$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ $ax^2 + bx + c = 0$

$a\cos^2 f(x)+b\cos f(x)+c=0$ и т.д.		$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
2. Однородное уравнение I степени вида $a\sin x+b\cos x=0$ $(a\neq 0,\quad b\neq 0)$	Деление обеих частей на $\cos x\neq 0$. Получаем: $atgx+b=0$	$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha$
3. Однородное уравнение II степени вида $a\sin^2 f(x)+b\sin f(x)\cdot$ $\cdot\cos f(x)+k\cos^2 f(x)=0$	Деление обеих частей на $\cos^2 x\neq 0$. Получаем: $atg^2 f(x)+btgx+k=0$	$tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
4. Уравнение вида $atgx+bctgx+c=0$	Уравнение сводится к квадратному относительно тангенса заменой $ctgx=\dfrac{1}{tgx}$	$tgx\cdot ctgx=1$ $ctgx=\dfrac{1}{tgx}$
5. Уравнение вида $asinx+bcosx=c$	Уравнение сводится к виду $sin(x+\varphi)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где $\varphi=arctg\dfrac{b}{a}$	
6. Уравнения вида $sin\alpha(x)\pm sin\beta(x)=0$ $cos\alpha(x)\pm cos\beta(x)=0$	Левая часть уравнения раскладывается на множители с помощью тригонометрических формул	1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

Используя методические рекомендации, решите уравнения:

1. $6\sin^2 x-5\cos x+5=0$;
2. $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+\cos^2 x=0$;
3. $\sin^2 x-9\sin x\cos x+3\cos^2 x=-1$.
4. $\sqrt{3}sin\,2x=cos2x$
5. $sin5x=sin6x$
6. $\sqrt{3}cos3x+sin3x=-1$
7. $7\,tg\,x-10ctg\,x+9=0$
8. $\sin x=\sin 2x$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 42

Название практической работы: *Решение простейших тригонометрических неравенств.*

Цель работы: Выработать навыки решения простейших тригонометрических неравенств.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные: ПРб 03, ПРу 07.

знания: Понятие о простейших тригонометрических неравенствах и методах их решения.

умения: Нахождение корней простейших тригонометрических неравенств.

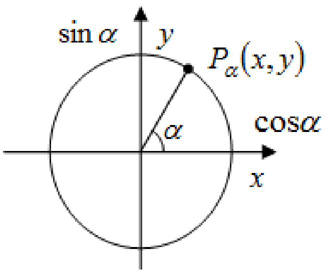
Ход работы:

Тригонометрическими неравенствами называются неравенства, которые содержат переменную под знаком тригонометрической функции.

Решение тригонометрических неравенств зачастую сводится к решению простейших тригонометрических неравенств вида:

$$\sin x < a, \quad \cos x < a, \quad \mathrm{tg} x < a, \quad \mathrm{ctg} x < a,$$
$$\sin x > a, \quad \cos x > a, \quad \mathrm{tg} x > a, \quad \mathrm{ctg} x > a,$$
$$\sin x \leq a, \quad \cos x \leq a, \quad \mathrm{tg} x \leq a, \quad \mathrm{ctg} x \leq a,$$
$$\sin x \geq a, \quad \cos \geq a, \quad \mathrm{tg} x \geq a, \quad \mathrm{ctg} x \geq a.$$

Решаются простейшие тригонометрические неравенства графически или с помощью единичной тригонометрической окружности.



По определению, <u>синус угла</u> α есть ордината точки $P(x,y)$ единичного круга (рис. 1), а <u>косинусом</u> – абсцисса этой точки. Этот факт используется при решении простейших тригонометрических неравенств с косинусом и синусом с помощью единичного круга.

Рис. 1

Рассмотрим схему решения тригонометрических неравенств с помощью единичного круга.

1. Неравенства $\sin x < a$

$-1 < a \leq 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k, k \in Z$
$a > 1$	R
$a \leq -1$	$\varnothing$

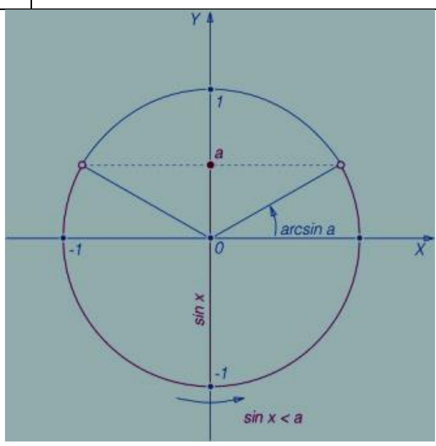


Рис. 2

2. Неравенства $\sin x > a$

$-1 \le a < 1$	$\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z$
$a \ge 1$	$\varnothing$
$a < -1$	R

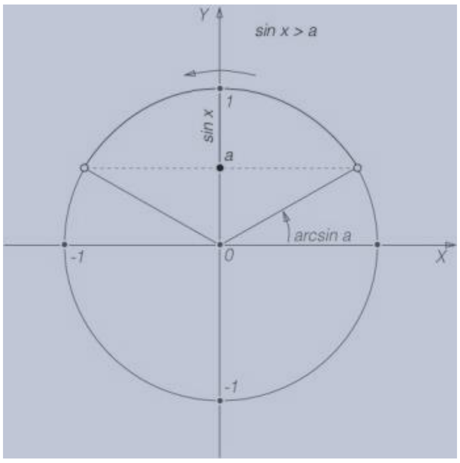


Рис. 3

3. Неравенства $\cos x < a$

$-1 < a \le 1$	$\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k, k \in Z$
$a > 1$	R
$a \le -1$	$\varnothing$

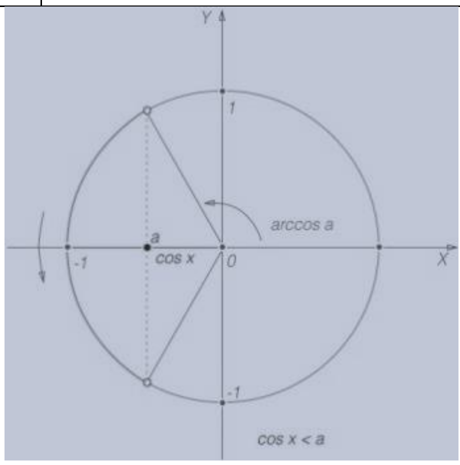


Рис. 4

4. Неравенства $\cos x > a$

$-1 < a \le 1$	$-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k, k \in Z$
$a \ge 1$	$\varnothing$
$a < -1$	R

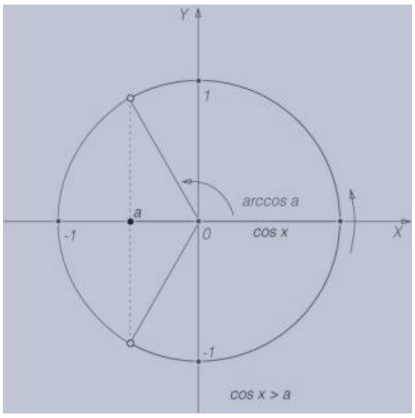


Рис. 5

5. Неравенства $tgx < a$

$a \in R$	$-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \mathrm{arctg}\, a + \pi k, k \in Z$

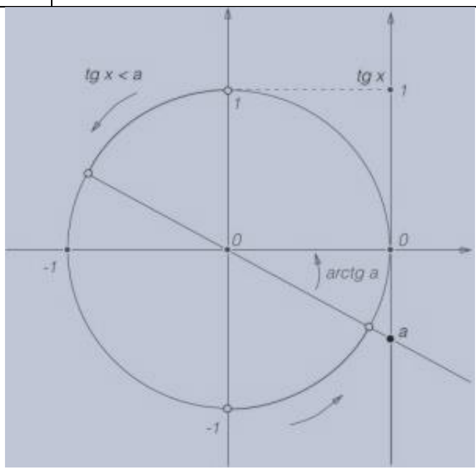


Рис. 6

6. Неравенства $tgx > a$

$a \in R$	$\mathrm{arctg}\, a + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

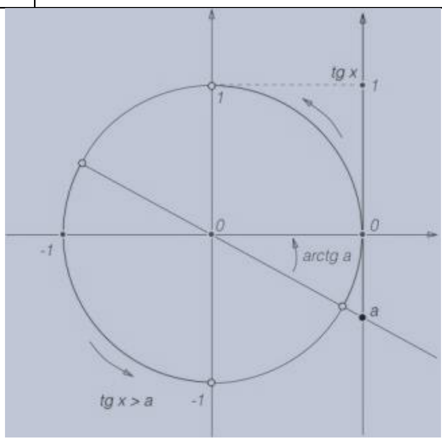


Рис. 7

7. Неравенства $ctgx < a$

$a \in R$	$\mathrm{arcctg}\, a + \pi k < x < \pi + \pi k, k \in Z$

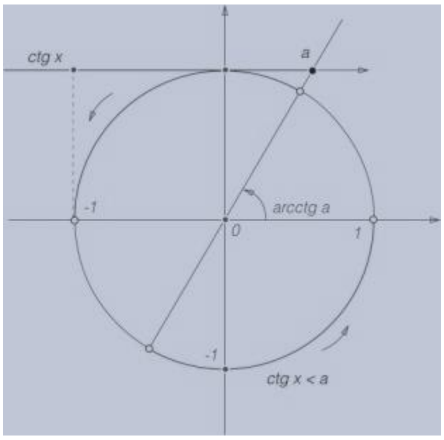


Рис. 8

8. Неравенства $ctgx > a$

$a \in R$	$\pi k < x < \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in Z$

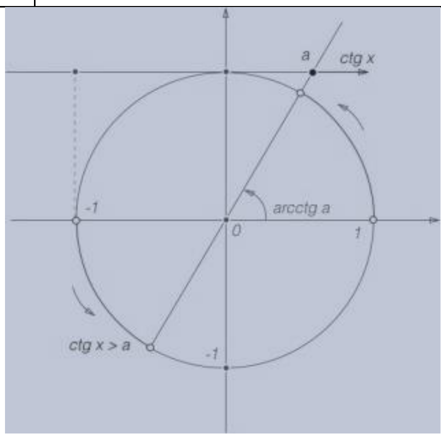


Рис. 9

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

Решите неравенства:

1. $\operatorname{tg} x \geq -1$
2. $1 - 2\cos\frac{x}{2} > 0$
3. $2\sin x \geq 1$
4. $\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{4}$
7. $\cos 3x < -2$

Вариант 2.

Решите неравенства:

1. $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$
2. $-\sqrt{3} - 2\sin 3x < 0$
3. $2\cos x < \sqrt{2}$
4. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\cos\left(x + \frac{1}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{3}$
7. $\sin 2x > -\sqrt{3}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 43

Название практической работы: *Числовая последовательность, Вычисление предела последовательности.*

Цель работы: На конкретных примерах научиться задавать числовые последовательности и находить их пределы.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** ПК 2.3, ОК 01, ОК 02, ЛР 24, ЛР 26, МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 04, ПРу 08, ПРу 10.

знания:

- Понятие о числовой последовательности.
- Понятие о числовой прогрессии.

умения: Нахождение пределов последовательностей.

Ход работы:

Множество чисел, каждое из которых снабжено своим номером, называется числовой последовательностью.

Элементы этого числового множества называются членами последовательности и обозначают: первый член - a_1, второй - a_2, n- й член - a_n и т.д. Вся последовательность обозначается : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ или (a_n).

Числовая последовательность представляет собой не что иное, как множество нумерованных чисел, упорядоченных наподобие натурального ряда, т.е. располагаемое в порядке возрастания номеров. Последовательность может содержать как конечное, так и бесконечное число членов.

Последовательность, состоящая из конечного числа членов, называется конечной, а последовательность, состоящая из бесконечного числа членов, - бесконечной последовательностью.

Иногда бесконечную числовую последовательность вводят, используя понятие функции:

Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают: $y = f(n)$, или $y_1, y_2, y_3..., y_n$ или $y(n)$.

Последовательности можно задавать различными способами, например, ***словесно***, когда правило задавания последовательности описано словами, без указания формулы. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,...

Особенно важны ***аналитический и рекуррентный*** способы задания последовательности.

Говорят, что последовательность задана ***аналитически***, если указана формула ее n-го члена.

Приведем три примера.

1) $y_n = n^2$. Это аналитическое задание последовательности: $1,4,9,16,\ldots, n^2\ldots$

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если. Например, n= 9, то $y_9 = 9^2 = 81$, если

2) $y_n = C$. Здесь речь идет о последовательности C, C, C, …., C, …. . Такую последовательность называют **постоянной** (или стационарной).

3) $y_n = 2^n$. Это аналитическое задание последовательности 2, 2^2, 2^3, ….,2^n, …

Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить *n*- й член последовательности, если известны ее предыдущие члены. Например, **арифметическая прогрессия – это числовая последовательность (a_n), заданная рекуррентно соотношениями:**

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d$$

(*a* и *d – заданные числа, d – разность арифметической прогрессии*)

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность (b_n)? Заданная рекуррентно соотношениями:

$$b_1 = b, \quad b_{n+1} = b_n \cdot q$$

(*b* и *q – заданные числа, b≠0, q ≠ 0; q знаменатель геометрической прогрессии прогрессии*).

Пример: Выписать первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно: $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$

Решение. n –й член последовательности равен сумме двух предшествующих ему членов. Значит, последовательно получаем:

$y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_3 = 1+1 = 2$; $y_4 = 1+2 = 3$; $y_5 = 2+3 = 5$; и т.д.

Ограниченные последовательности

- Последовательность (x_n) называется ограниченной, если существуют такие два числа m и M, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $m \le x_n \le M$.
- Последовательность (x_n) называется ограниченной сверху, если существует такое число M, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $x_n \le M$.
- Последовательность (x_n) называется ограниченной снизу, если существует такое число m, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $m \le x_n$

Например: последовательность (x_n), заданная формулой общего члена $x_n = n$, ограничена снизу (например, число 0) и не ограничена сверху.

Монотонные последовательности

Последовательность (x_n) называется *возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$.

Последовательность (x_n) называется *убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$.

Последовательность (x_n) называется *невозрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, не более предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} \le x_n$.

Последовательность (x_n) называется *неубывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} \ge x_n$.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности образуют класс *монотонных* последовательностей.

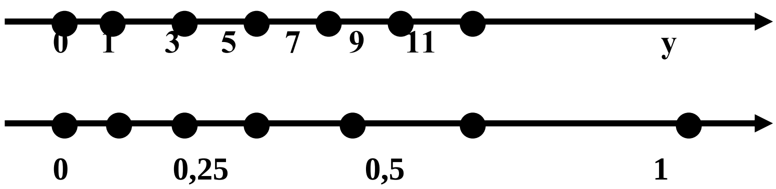
Предел числовой последовательности

Рассмотрим две числовые последовательности – (y_n) и (x_n).

(y_n): 1, 3,5, 7, 9, … 2n – 1, …;

(x_n): 1, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},....\frac{1}{n},....$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатной прямой.



Замечаем, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0 – говорят последовательность ***сходятся***, а у последовательности (y_n) такой точки сгущения нет – и говорят, что последовательность ***расходится.***

Математики не используют термин точка сгущения, а они говорят *предел последовательности.*

Число b называется пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержится все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут так: $y_n \to b$ *или* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ читают так: предел последовательности y_n *при стремлении n к бесконечности равен b.*

На практике используется еще одно истолкование равенства $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, связанное с приближенными вычислениями: если последовательность y_n = f($_n$) сходится к числу b, то выполняется приближенное равенство f($_n$)≈b, причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

Необходимое условие сходимости произвольной числовой последовательности:

Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной.

Достаточное условие сходимости последовательности.

Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится. (теорема К.Вейерштрасса)

Свойства сходящихся последовательностей

1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.
2. Если последовательность сходится, то она ограничена.
3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Если $|q| > 1$***, то последовательность*** $y_n = q^n$ ***расходится.***

Теоремы о пределах последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. Если $|q| < 1 mo \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то

4. Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо

соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^m}=0$

5. Предел суммы равен сумме пределов: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=b+c$

6. Предел произведения равен произведению пределов: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=bc$;

7. Предел частного равен частному пределов: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n:y_n)=b:c$, где c≠0.

8. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n)=kb$

Нахождение пределов последовательности:

Найти предел последовательности:

а) $x_n=\frac{1}{n^2}$ б) $x_n=\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^2+4}$

Решение: а) применив правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$$

б) применим правило «предел суммы» и получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim_{n\to\infty}3=0-0+3=3$$

в) в подобных случаях применяют искусственный прием: делят числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной n. В данном примере разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{2+0}{1+0}=\frac{2}{1}=2$$ (здесь мы применили правило «предел дроби»).

Задания для самостоятельной работы:

1.Вычислите пределы числовой последовательности.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-17}{n^3}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}+\frac{9}{n^3}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(6-\frac{7}{n^2}-\frac{3}{n}-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+3}{n+1}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-1}{n^4}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-3)}{n^2}$

2.Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n), если

$1) b_1 = 3; q = \frac{1}{3};$

$2) 32, 16, 8, 4, 2, ...;$

$3) b_n = (-1)^n \frac{5}{3^{n-3}}.$

3.Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n),если

$1) S = -10; b_1 = -5;$ $2) S = 2; b_1 = 3.$

4.Решите уравнение, если известно, что $|x|<1$:

$1) x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ... = 4;$

$2) 2x - 4x^2 + 8x^3 - 16x^4 + ... = \frac{3}{8};$

$3) \frac{1}{x} + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ... = \frac{7}{2};$

$4) 2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... = \frac{13}{6}.$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 44

Название практической работы: *Геометрический и механический смысл производной.*

Цель работы: На конкретных примерах научиться составлять уравнения касательной и решать задачи, используя геометрический смысл производной.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: ПК 2.3, ОК 01, ОК 02, ЛР 24, ЛР 26, МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 04, ПРу 08, ПРу 10.

знания:

– Понятие о производной функции и её свойствах.
– Понятие об уравнении касательной.

умения:

– Вычисление производных функций.
– Составление уравнение касательной.

Ход работы

Цель работы:

Содержание работы:

Производная $y'(x_0)$ от функции y = y(x), вычисленная при значении аргумента x = x_0, представляет собой ***скорость изменения этой функции*** относительно независимой переменной x в точке x = x_0.

В частности, если зависимость между пройденным путем s и временем t при прямолинейном движении выражается формулой $s = s(t)$, то скорость движения в любой момент времени t есть $\frac{ds}{dt}$, а ускорение (т. е. скорость изменения скорости) есть $\frac{d^2s}{dt^2}$

Пример.

1. Точка движется прямолинейно по закону s = $\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - t$ (s выражается в метрах, t - в секундах). Найти скорость и ускорение движения через 1 с после начала движения.

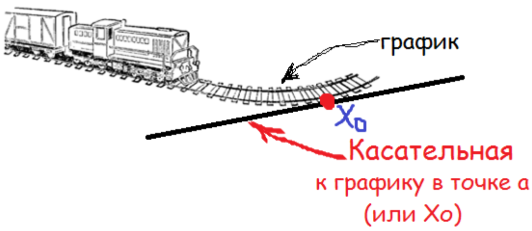
Решение:

Скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени:

v(t) = $\frac{ds}{dt}$ = $t^2 + 4t - 1$, откуда v(1) = 4 (м/с)

Ускорение прямолинейного движения равно второй производной пути по времени: a(t) = $\frac{d^2s}{dt^2}$ = 2t + 4.

Следовательно, a(1) = 6(м/с^2)



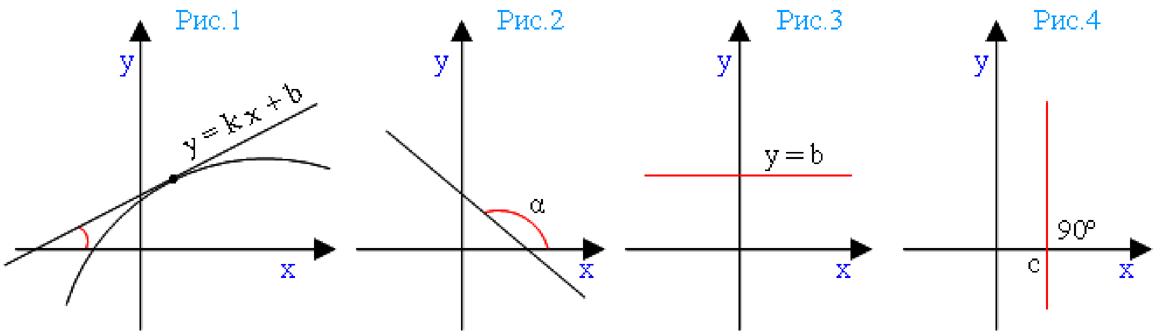
Определение касательной:

Касательная к графику функции f, дифференцируемой в точке хо, - это прямая, проходящая через точку (хо; f(xo)) и имеющая угловой коэффициент f ′(xo).

Угловой коэффициент имеет прямая вида y = kx + b. Коэффициент k и является угловым коэффициентом этой прямой.

Угловой коэффициент равен тангенсу острого угла, образуемого этой прямой с осью абсцисс: ***k* = tg α= *f* (*x₀*).**

Здесь угол α – это угол между прямой y = kx + b и положительным (то есть против часовой стрелки) направлением оси абсцисс. Он называется углом наклона прямой.



Если угол наклона прямой y = kx + b острый, то угловой коэффициент является положительным числом. График возрастает (рис.1).

Если угол наклона прямой y = kx + b тупой, то угловой коэффициент является отрицательным числом. График убывает (рис.2).

Если прямая параллельна оси абсцисс, то угол наклона прямой равен нулю. В этом случае угло-вой коэффициент прямой тоже равен нулю (так как тангенс нуля есть ноль). Уравнение прямой будет иметь вид y = b (рис.3).

Если угол наклона прямой равен 90º (π/2), то есть она перпендикулярна оси абсцисс, то прямая задается равенством x = c, где c – некоторое действительное число (рис.4).

Уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Алгоритм решения уравнения касательной к графику функции y = f(x):

1. Вычислить $f(x_0)$.

2. Вычислить производные $f'(x)$ и $f'(x_0)$.

3. Внести найденные числа x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$ в уравнение касательной.

Пример1. Найдем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.

Решение.

1) Точка касания x_0 равна 2. Вычислим $f(x_0)$:

$$f(x_0) = f(2) = 23 - 2 \cdot 22 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$$

2) Находим $f'(x)$. Для этого применяем формулы дифференцирования.

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)' = 3x^2 - 2 \cdot 2x = 3x^2 - 4x.$$

Теперь, используя полученное значение $f'(x)$, вычислим $f'(x_0)$:

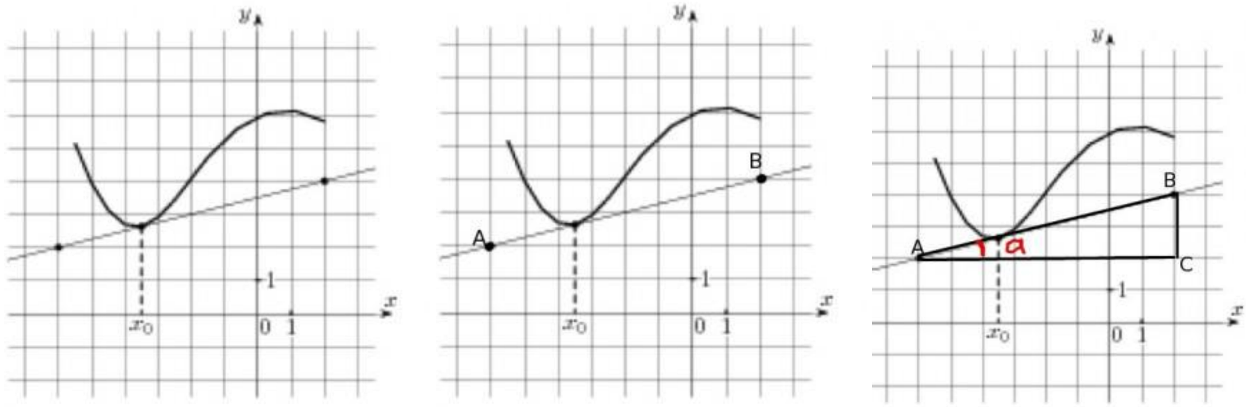
$$f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4.$$

3) Итак, у нас есть все необходимые данные: $x_0 = 2, f(x_0) = 1, f'(x_0) = 4.$ Подставляем эти числа в уравнение касательной и находим окончательное решение:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + 4(x - 2) = 1 + 4x - 8 = 4x - 7$$

Ответ. y = 4x – 7.

Пример 2. На рисунке изображены график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции в точке x_0.



Значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 равно тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси OX. Чтобы его найти, выделим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной, а катеты параллельны осям координат. Обозначим точки с целыми координатами буквами A и B - эти точки выделены на касательной:

Проведем через точку A прямую параллельно оси OX, а через точку B - параллельно оси OY. Получим прямоугольный треугольник ABC. Угол A треугольника ABC равен углу между касательной и положительным направлением оси OX.

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Длины катетов считаем по количеству клеточек

$$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

Ответ. 0,25.

Пример 3. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \frac{x^4}{4}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Находимпроизводную функции

$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$$

Тогда при $x_0=1$ значение производной равно $f'(1) = 1^3 = 1$

Отсюда получаем, что угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой $x_0=1$ равен $k = f'(1) = 1$

Ответ. 1.

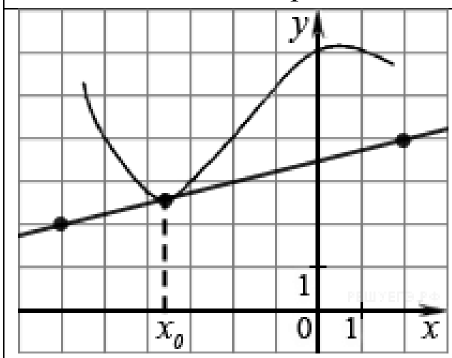
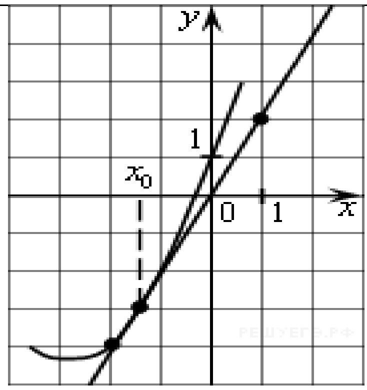
Пример 4. Прямая $y= 8x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2 +7x +7$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов, следовательно $k=8$**.** Угловой коэффициент касательной – это есть значение производной функции в точке x_0.

$f'(x_0) = 2x_0+7 = 8$, $2x_0 = -1$, $x_0 = -0,5$.

Ответ. -0,5.

Задания для самостоятельной работы:

<table>
<tr><th>Вариант 1</th><th>Вариант 2</th></tr>
<tr><td colspan="2">Задание №1. Составьте уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке x_0.</td></tr>
<tr><td>$y = \frac{1}{4}x^4 - 3x, x_0 = 1$</td><td>$y = \frac{1}{8}x^4 - 3, x_0 = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание №2. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке x_0</td></tr>
<tr><td>$y=2x+7\ln x$, $x_0=14$</td><td>$y=6x+4\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание №3. Прямая параллельна касательной к графику функции y=f(x). Найдите абсциссу точки касания.</td></tr>
<tr><td>$y = 3x - 2$, $y = -x^2 -12x+5$</td><td>$y=5x$, $y = 2x^2-8x-3$</td></tr>
<tr><td>Задание №4.
Тело массой 25 кг движется прямолинейно по закону $s = ln(1 + t^2)$. Найти кинетическую энергию тела ($E = \frac{mv^2}{2}$) через 2с после начала движения.</td><td>Задание №4.
Маховик, задерживаемый тормозом, поворачивается за t секунд на угол α = $2t - 0,04t^2$(рад). Определите угловую скорость вращения маховика в момент $t = 12c$ и выяснить, в какой момент маховик остановится.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание №5.
На рисунке изображён график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 45

Название практической работы: *Применение основных правил дифференцирования.*

Цель работы*:* Закрепить навыки вычисления производных, используя основные правила дифференцирования.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** ПК 2.3, ОК 01, ОК 02, ЛР 24, ЛР 26, МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 04, ПРу 08, ПРу 10.

знания: Понятие о производной функции и её свойствах.

умения: Вычисление производных функций.

Ход работы:

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу. Если *C* — постоянное число и *f=f(x), g=g(x)* — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(Cf)' = Cf'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ …$(g \neq 0)$

Пример 1. Найдите производную функции:

1) $y = x^7 + x^3$; 2) $y = x^8(2x + x^4)$; 3) $y = \dfrac{x+2}{5-x}$.

Решение

1) $y' = (x^7 + x^3)' = (x^7)' + (x^3)' = 7x^6 + 3x^2$.

2) $y' = (x^8(2x + x^4))' = (x^8)' \cdot (2x + x^4) + x^8 \cdot (2x + x^4)'$;

Учитывая, что $(x^8)' = 8\,x^7$;

$(2x + x^4)' = (2x)' + (x^4)' = 2 \cdot x' + 4x^3 = 2 + 4x^3$, имеем

$y' = 8x^7(2x + x^4) + x^8 \cdot (2 + 4x^3) = 16x^8 + 8x^{11} + 2x^8 + 4x^{11} =$

$= 18x^8 + 12x^{11}$.

3) $y' = \left(\dfrac{x+2}{5-x}\right)' = \dfrac{(x+2)' \cdot (5-x) - (x+2) \cdot (5-x)'}{(5-x)^2}$.

Учитывая, что

$(x+2)' = x' + 2' = 1 + 0 = 1$, $(5-x)' = 5' - x' = 0 - 1 = -1$, имеем

$y' = \dfrac{1 \cdot (5-x) - (-1) \cdot (x+2)}{(5-x)^2} = \dfrac{5 - x + x + 2}{(5-x)^2} = \dfrac{7}{(5-x)^2}$.

Пояснения

В задании 1 надо найти производную суммы по формуле $(u + v - w)' = u' + v' - w'$; в задании 2 – производную произведения $(uv)' = u'v + uv'$; в задании 3 – производную частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$.

Также в заданиях 1 и 2 следует использовать формулу $x^n = nx^{n-1}$, а в задании 2 учесть, что при вычислении производной $2x$ постоянный множитель 2 можно вынести за знак производной.

Пример 2. Вычислите значение производной функции $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x}$ в точках $x = 4$ и $x = 0{,}01$.

Решение

$f'(x) = (x^2 - 5\sqrt{x})' = (x^2)' - 5(\sqrt{x})' = 2x - \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$.

Пояснения

Для нахождения производной в указанных точках достаточно найти производную данной функции и в полученное выражение

$$f'(4)=2\cdot 4-\frac{5}{2\sqrt{4}}=8-\frac{5}{4}=6\frac{3}{4}.$$

$$f'(0{,}01)=2\cdot 0{,}01-\frac{5}{2\sqrt{0{,}01}}=0{,}02-\frac{5}{2\cdot 0{,}1}=$$

$$=0{,}02-\frac{5}{0{,}2}=0{,}02-25=-24{,}98.$$

подставить заданные значения аргумента. При вычислении производной следует учесть, что заданную разность можно рассматривать, как алгебраическую сумму выражений x^2 и $(-5\sqrt{x})$, а при нахождении производной $(-5\sqrt{x})$ за знак производной вынести постоянный множитель (- 5).

Пример 3. Найдите значения *x*, при которых производная функции $f(x)=x^4-32x$ равна 0.

Решение

$f'(x)=(x^4-32x)'=(x^4)'-(32x)'=4x^3-32.$

$f'(x)=0.$ Тогда $4x^3-32=0, x^3=8, x=2.$

Ответ: *x* = 2.

Пояснения

Чтобы найти соответствующие значения *x,* достаточно найти производную данной функции, приравнять её к нулю и решить полученное уравнение.

Задания для самостоятельной работы:

1 Вариант.

1. . **Найдите производные следующих функций:**
   1. $y=4x^3+\frac{1}{2}x^2+3$
   2. $y=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-3x^2+9$
   3. $y=(2x^3-3)(2x^3-1)$
2. **Найти производную функции в точке** x_0**:**

   1) $y=3x^2, x_0=1;$

   2) $y=\cos x, x_0=\frac{\pi}{6};$

   3) $y=-2\sin x, x_0=\frac{\pi}{4};$

   4) $y=2+\sqrt{x}, x_0=4.$
3. **Найдите производную функции, приведя ее к виду** $k\cdot x^m$**:**

   1) $y=3x^2x^3$; 2) $y=\frac{2}{x^2}$; 3) $y=\frac{1}{3x^5}$; 4) $y=\frac{x^5}{175}$.
4. **Используя формулу производной суммы, найдите производную от функции:**

   1) $y=x^2-5x+\frac{1}{x};$

   2) $y=x(x^2-5x+1);$

   3) $y=\frac{x^3-5x^2+1x}{x}.$
5. **Используя формулы произведения и частного, найдите производные функций:**

1) $y=x\cos x;$

2) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

2 Вариант.

1. **Найдите производные следующих функций:**
   1. $y = 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3$
   2. $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9$
   3. $y = (2x^3 - 3)(2x^3 - 1)$
2. **Найти производную функции в точке x_0:**

1) $y = 2x^3, x_0 = -1$;

2) $y = \sin x, x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

3) $y = -2\cos x, x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

4) $y = 1 + 2\sqrt{x}, x_0 = 9$.

3. **Найдите производную функции, приведя ее к виду $k \cdot x^m$:**

1) $y = 2x \cdot x^3$; 2) $y = \dfrac{3}{x^3}$; 3) $y = \dfrac{1}{2x^4}$; 4) $y = \dfrac{x^6}{156}$.

4. **Используя формулу производной суммы, найдите производную от функции:**

1) $y = x^3 + 4x^2 - \dfrac{1}{x^2}$;

2) $y = x\left(x^3 + 4x^2 - 1\right)$;

3) $y = \dfrac{x^5 + 4x^4 - 1}{x^2}$.

5. **Используя формулы произведения и частного, найдите производные функций:**

1) $y = x\sin x$;

2) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 46

Название практической работы: *Вычисление производных основных элементарных функций.*

Цель работы: Закрепить навыки вычисления производных основных элементарных функций.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** ПК 2.3, ОК 01, ОК 02, ЛР 24, ЛР 26, МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 04, ПРу 08, ПРу 10.

знания:

– Понятие о производной функции и её свойствах.
– Таблица производных основных элементарных функций.

умения: Вычисление производных функций.

Ход работы:

Таблица производных

№ п/п	Функция	Производная	№ п/п	Функция	Производная	№ п/п	Функция	Производная
1	C - постоянная	0	**7**	e^x	e^x	**13**	ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
2	x^n	nx^{n-1}	**8**	$\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$	$\frac{1}{x \ln a}$	**14**	arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	x	1	**9**	ln x	$\frac{1}{x}$	**15**	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	**10**	sin x	cos x	**16**	arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$
5	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	**11**	cos x	–sin x	**17**	arcctg x	$-\frac{1}{1+x^2}$
6	a^x, $(a > 0)$	$a^x \ln a$	**12**	tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	**18**	lg x	$\frac{1}{x \ln 10}$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	Вариант 2
Найдите производную функции	Найдите производную функции
1) $y = 4x^5 - 10x^2 + 6x + 2$	1) $y = 3x^5 - 20x^2 + 8x + 1$
2) $y = \sin x$	2) $y = \cos x$
3) $y = \frac{2x+1}{x-3}$	3) $y = \frac{2x-3}{x+1}$
4) $y = \sqrt[5]{x^3}$	4) $y = \sqrt[7]{x^2}$
5) $y = 5^x$	5) $y = 8^x$
6) $y = 2x - 1$	6) $y = 4x - 4$
7) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 11$	7) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 15$
8) $y = x^{-16}$	8) $y = x^{-18}$
9) $y = \log_7 x$	9) $y = \log_6 x$
10) $y = (x^3 - 4x^2)(x^2 - 7)$	10) $y = (x^3 + 3x^2)(x^2 - 8)$
11) $y = \frac{2}{x^6}$	11) $y = \frac{2}{x^7}$
12) $y = 2^x - \log_7 x$	12) $y = 5^x - \log_2 x$
13) $y = \ln x + 5 \lg x$	13) $y = \ln x + 8 \lg x$
14) $y = 6x^8 - 6 \ln x + 3 \log_3 x$	14) $y = 2x^8 - 7 \ln x + 4 \log_7 x$
15) $y = 4 \cos x \cdot 9^x$	15) $y = 5 \sin x \cdot 4^x$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 47

Название практической работы: *Вычисление производных сложных функций.*

Цель работы: Закрепить навыки вычисления производных сложных функций.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** ПК 2.3, ОК 01, ОК 02, ЛР 24, ЛР 26, МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 04, ПРу 08, ПРу 10.

знания:

– Понятие о производной функции и её свойствах.
– Таблица производных основных элементарных функций.
– Понятие о сложной функции и производной от неё.

умения: Вычисление производных сложных функций.

Ход работы:

Пусть y = y(u) и u = u(x) – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция y = y(u(x)) есть также дифференцируемая функция, причем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: ***производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.***

Примеры:

1. $y(x) = \ln(x^3 - 3x^2 + 4x)$

$$y'(x) = (\ln(x^3 - 3x^2 + 4x))' \cdot (x^3 - 3x^2 + 4x)' = \frac{1}{x^3-3x^2+4x}(3x^2 - 6x + 4) =$$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4x}$$

2. $y(x) = e^{\arccos x}$

$$y'(x) = (e^{\arccos x})' \cdot (\arccos x)' = e^{\arccos x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $y(x) = \sin(\ln\sqrt{x})$

$$y'(x) = (\sin(\ln\sqrt{x}))' \cdot (\ln\sqrt{x})' \cdot (\sqrt{x})' = \cos(\ln\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\ln\sqrt{x})}{2x}$$

4. $y(x) = \ln\sqrt{\sin x}$

$$y'(x) = (\ln\sqrt{\sin x})' \cdot (\sqrt{\sin x})' \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{1}{2\sin x} \cdot \cos x = \frac{1}{2}\mathrm{tg}x$$

5. $y(x) = \mathrm{arctg}\ln 2x$

$y'(x) = \frac{1}{1+(\ln 2x)^2} \cdot (\ln 2x)' \cdot (2x)' = \frac{1}{1+(\ln 2x)^2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x(1+\ln^2 2x)}$

6. $y(x) = (6x^2 - \frac{2}{x^4}+5)^2$

$y(x) = (6x^2 – 2x^{-4}+5)^2$

$y'(x) = 2(6x^2 – 2x^{-4}+5) \cdot (6x^2 – 2x^{-4}+5)' = 2(6x^2 – 2x^{-4}+5) \cdot (12x+8x^{-5}) =$

$= (12x^2 - \frac{2}{x^4}+5) \cdot (12x + \frac{8}{x^5})$

Задания для самостоятельной работы:

I вариант

Вычислить производную:

1) $y = \left(\frac{x}{3}+2\right)^{12}$

2) $y = \sin(5-3x)$

3) $y = \sqrt{15-7x}$

Вычислить производную в точке x_0:

4) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{12}$

5) $y = tg6x$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{24}$

6) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{3}$

II вариант

Вычислить производную:

1) $y = \left(\frac{x}{4}+6\right)^{16}$

2) $y = \cos(5-3x)$

3) $y = \sqrt{42+0{,}5x}$

Вычислить производную в точке x_0:

4) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{12}$

5) $y = ctg6x$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{24}$

6) $y = \sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{3}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 48

Название практической работы: *Исследование функции на монотонность. Определение экстремумов функции.*

Цель работы: формирование умений исследовать функцию на монотонность.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** ПК 2.3, ОК 01, ОК 02, ЛР 24, ЛР 26, МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 04, ПРу 08, ПРу 10.

знания:

– Понятие о производной функции и её свойствах.
– Таблица производных основных элементарных функций.
– Понятие о монотонности функции.

умения: Определение интервалов монотонности.

Ход работы:

Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке $a < x < b$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в промежутке $a < x < b$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются *монотонными*, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - *промежутками монотонности*.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной:

если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает в этом промежутке;

если в некотором промежутке $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом промежутке.

Пример 1. Найти промежутки монотонности следующих функций:

а) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

б) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

а) Находим производную: $f'(x) = 2x - 8$, имеем $2x - 8 = 0 \iff x = 4$.

Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty < x < 4$	*4*	$4 < x < \infty$
$f'(x)$	_	*0*	+
$f(x)$	↘		↗

Таким образом, данная функция в промежутке $-\infty < x < 4$ убывает, а в промежутке $4 < x < \infty$ возрастает.

б) $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $(3x^2 - 12x = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Составим таблицу:

x	$-\infty < x < 0$	*0*	$0 < x < 4$	*4*	$4 < x < \infty$
$f'(x)$	+	*0*	-	*0*	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Итак, в промежутках $-\infty < x < 0$ и $4 < x < \infty$ функция возрастает, а в промежутке $0 < x < 4$ - убывает.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-2;12). Запишите промежутки возрастания функции $f(x)$.

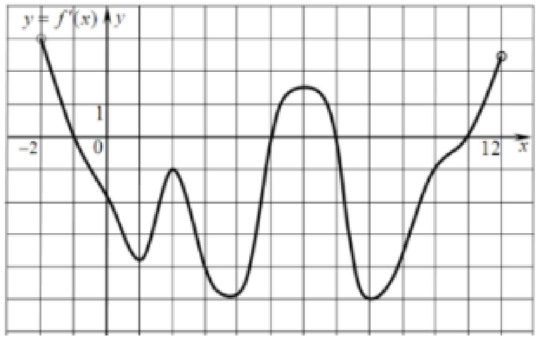


Рисунок 1 – График производной функции $f(x)$.

2. Найти промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

б) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

в) $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$

Вариант 2

1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-10;2). Запишите промежутки возрастания функции $f(x)$.

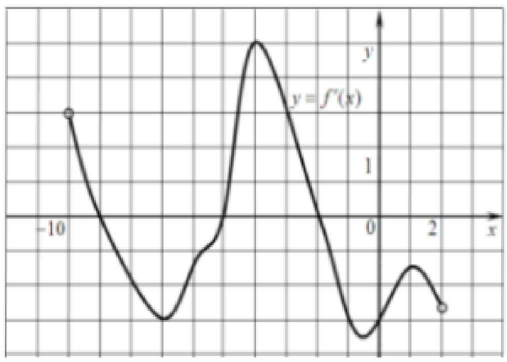


Рисунок 2 – График производной функции $f(x)$.

2. Найти промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

б) $2.f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 8$

в) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 49

Название практической работы: *Исследование функции с помощью производной.*

Цель работы*:* На конкретных примерах научиться исследовать функции с помощью производной и на основе исследования строить графики.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: ПК 2.3, ОК 01, ОК 02, ЛР 24, ЛР 26, МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 04, ПРу 08, ПРу 10.

знания:

– Понятие о производной функции и её свойствах.
– Таблица производных основных элементарных функций.
– Понятие об экстремумах функции, точках перегиба, асимптотах.

умения: Нахождение экстремумов, точек перегиба, асимптот функции и построение графика.

Ход работы:

Общая схема исследования функции и построение её графика.

1. Найдите область определения функции.
2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.
3. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найдите промежутки знакопостоянства.
5. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.
6. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.
7. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример:

Построить график функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

1. $D(y) = R$;

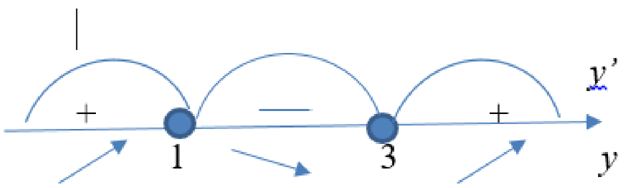
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической;

3. Найдем точку пересечения графика с осью Оу: пологая, что $x = 0$, получим $y = -3$. Точку пересечения графика с осью Ох в данном случае затруднительно.

4. Найдем промежутки монотонности функции ее экстремумы и промежутки знакопостоянства с помощью производной:

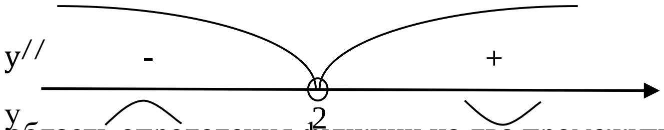
а. Найдем производную: $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

б. $y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = 1$ и $x = 3$. Отметим данные точки на числовой прямой и определим промежутки возрастания и убывания функции:

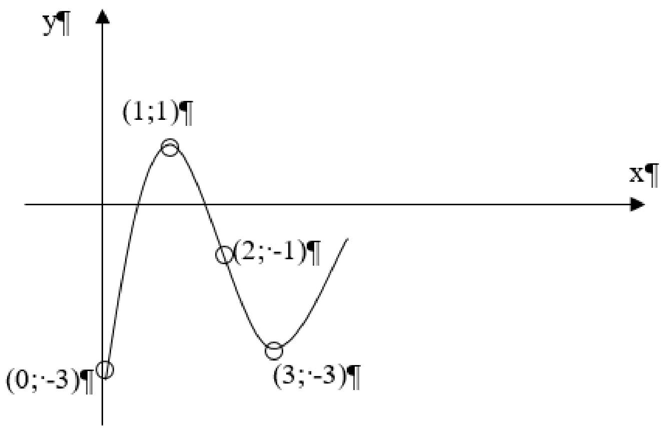


Точки x=1 и x=3 делят область определения функции на три промежутка: $-\infty < x < 1, 1 < x < 3$,

и $3 < x < \infty$. В промежутках $-\infty < x < 1$ и $3 < x < \infty$ $y^{/} > 0$, т. е. функция возрастает, а в промежутке $1 < x < 3$ $y^{/} < 0$, т. е функция убывает.
При переходе через точку x=1 производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку x=3 – с минуса на плюс. Значит $y_{max} = y(1) = 1$, $y_{min} = y(3) == -3$.
5. Найдем вторую производную: $y^{//} = 6x - 12; 6x - 12 = 0 \to x = 2$. Отметим данную точку на числовой прямой и исследуем функцию на выпуклость и вогнутость:



Точка x=2 делит область определения функции на два промежутка $-\infty < x < 2$ и$2 < x < \infty$ В первом из них $y^{//} < 0$, а во втором $y^{//} > 0$, т. е. в промежутке $-\infty < x < 2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2 < x < \infty$ выпукла вниз. Таким образом, точка перегиба $(2;\ -1)$.
6. Используя полученные данные, строим график функции:



Задания для самостоятельной работы:
Исследовать функции и построить их графики:

1 вариант		*2 вариант*	
1.	$y = x^2 + 5x + 4$	1.	$y = -x^2 + 2x + 15$
2.	$y = -x^3 + x$	2.	$y = 3x^3 - x$
3.	$y = x^3 - 6x^2 + 16$	3.	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$
4.	$y = x^4 - 5x^2 + 4$	4.	$y = -x^4 + 8x^2 + 9$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 50

Название практической работы: *Физический смысл производной в профессиональных задачах технологического профиля.*

Цель работы*:* Научиться решать задачи на применение производной.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, МРР 02, МРР 09

предметные: ПРб 01, ПРб 04, ПРб 06, ПРб 14, ПРу 08, ПРу 10, ПРу 16, ПРу 18, ПРу 19.

знания:

- Понятие о производной функции и её свойствах.
- Таблица производных основных элементарных функций.

умения:

- Вычисление производных.
- Нахождение экстремумов функции.

Ход работы:

1. **Применение производной в физике.**

Физический смысл производной: производная есть скорость изменения физической величины.

Пример 1. Найти мгновенную скорость при свободном падении.

Решение. Закон свободного падения имеет вид $x = \frac{gt^2}{2}$. Мгновенная скорость при свободном падении равна: $v_{\text{мгн}} = x'$, т.е. $v_{\text{мгн}} = gt$.

Пример 2 . Пусть $q = q(t)$ - количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t. Найдем силу тока в данный момент времени t

Решение. *Сила тока есть производная от количества электричества, как функции от времени, т.е.* $I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t)$,

Пример 3. Пусть дан неоднородный стержень длины l, $m = m(x)$ - масса части стержня длины x (один из концов стержня принимается за начало отсчета). Найдем линейную плотность стержня в данной точке x.

Решение. *Линейная плотность стержня в данной точке есть производная массы стержня как функции от его длины:* $\rho = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = m'(x)$,

Плотность стержня есть скорость изменения массы части стержня как функции его длины.

Решение физических задач, связанных с нахождением скорости, ускорения и т.д.

Пример 4. Дано уравнение прямолинейного движения тела: $S = 3t^2 + 2$, где S- путь, пройденный телом, м; t- время, с. Найдите скорость тела в момент времени t=1 с.

Решение. Скорость это производная пути по времени. Значит: $V = S' = 6t$ Подставив значение времени получим: $V(1) = 6\, m/c$

Пример 5. Точка движется по закону $S = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2$. Найти скорость и ускорение через 2 с после начала движения (движение считать прямолинейным).

Решение. Скорость это производная пути по времени. Значит: $V = S' = t^3 + t^2 + t$. Подставив значение времени получим $V(2) = 16\, m/c$

Пример 6. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 1 + t + t^2$. Найти его кинетическую энергию через 5 с после начала движения, если масса тела 3 кг.

Решение. Формула нахождения кинетической энергии: $E_k = \frac{mv^2}{2}$.Найдем скорость тела. $V = S' = 2t + 1, V(5) = 11$.Кинетическая энергия тела составит: $E_k = \frac{3*121}{2} = 181{,}5$.

Решение экономических задач с помощью производной.

Пример 1. Выбрать оптимальный объем производства N фирмой, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостью: F(q) = q^2 - 8q + 10.

Решение: Оптимальный объём производства есть производная от функции прибыли, т.е. $N = F(q)$

$$F'(q) = R'(q) - C'(q) = 2q - 8 = 0 \rightarrow q_{extr} = 4$$

При $q < q_{extr} = 4 \rightarrow F'(q) < 0$ и прибыль убывает

При $q > q_{extr} = 4 \rightarrow F'(q) > 0$ и прибыль возрастает

При $q = 4$ прибыль принимает минимальное значение.

Задания для самостоятельной работы:

1вариант.

1. Дано уравнение прямолинейного движения тела:,S=2t^3-8t+2, где S- путь, пройденный телом, м; t- время, с. Найдите скорость тела в момент времени t=3 с.

2. Точка движется по закону $S = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2$. Найти скорость и ускорение через 3 с после начала движения (движение считать прямолинейным).

3. Пусть q=t^3 - 4t +8- количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t. Найдем силу тока в данный момент времени t=2с.

4. Пусть дан неоднородный стержень длины l, масса неоднородного стержня меняется по закону: m=2x^3 -8x +12. Найти линейную плотность стержня в данной точке x=4

5. Прибыль фирмы задана зависимостью: $F(q) = 4q^2 - 4q + 12$. Найти оптимальный объём производства N фирмы.

2 вариант.

1. Дано уравнение прямолинейного движения тела:,S=3t^2-5t+2, где S- путь, пройденный телом, м; t- время, с. Найдите скорость тела в момент времени t=4 с.

2. Точка движется по закону $S = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2$. Найти скорость и ускорение через 4 с после начала движения (движение считать прямолинейным).

3. Пусть $q = 3t^2 - 5t + 8$- количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t. Найдем силу тока в данный момент времени t=3с.

4. Пусть дан неоднородный стержень длины l, масса неоднородного стержня меняется по закону: $m = 3x^2 - 5x + 12$. Найти линейную плотность стержня в данной точке x=4

5. Прибыль фирмы задана зависимостью: $F(q) = 5q^2 - 5q + 12$. Найти оптимальный объём производства N фирмы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 51

Название практической работы: *Использование производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.*

Цель работы: Научиться применять производную для решения прикладных задач.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные**:** МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, МРР 02, МРР 09

предметные**:** ПРб 01, ПРб 04, ПРб 06, ПРб 14, ПРу 08, ПРу 10, ПРу 16, ПРу 18, ПРу 19

знания:

- Понятие о производной функции и её свойствах.
- Таблица производных основных элементарных функций.

умения:

- Вычисление производных.
- Нахождение экстремумов функции.

Ход работы:

Перед выполнением работы ответьте на следующие вопросы:

1) Функция называется возрастающей на данном промежутке, если...
2) Функция называется убывающей на данном промежутке, если...
3) Точка x_0 называется точкой минимума, если...Точка x_0 называется точкой максимума, если...
4) Стационарными точками функции называют точки...
5) Физический смысл производной

Решите следующие задачи с прикладным содержанием:

Задание 1. Дан бак без крышки в виде прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат и объем равен 108 см^3. При каких размерах бака на его изготовление пойдет наименьшее количество материала?

Указание:

1) Обозначьте за x –сторону основания;
2) Выразите через x высоту параллелепипеда;
3) Определите какому промежутку принадлежит x;
4) Запишите формулу площади параллелепипеда;
5) Найдите точку минимума полученной функции.

Задание 2. Чтобы уменьшить трение жидкости о стены и дно канала, нужно смачиваемую ею площадь сделать возможно малой. Требуется найти размеры открытого прямоугольного канала с площадью сечения 4,5м^2, при которых смачиваемая площадь будет наименьшей.

Указание:

1) Обозначьте за x –глубину канавы;
2) Выразите через x ширину канавы;
3) Определите какому промежутку принадлежит x;
4) Запишите формулу периметра;
5) Найдите точку минимума полученной функции.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 52

Название практической работы: *Вычисление первообразной для данной функции*.

Цель работы***:*** Научиться вычислять первообразную для данной функции

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09

***предметные*:** ПРб 04, ПРу 10

знания: Понятие о первообразной функции и её свойствах.

умения: Вычисление первообразных.

Ход работы:

Определение. Если для любого x из множества X выполняется равенство $F'(x)=f(x)$, то функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке.

Функция $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$	**Функция** $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$
k-*постянная*	$kx+C$	$a^x, a\rangle 0, a\neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$x^p, p\neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$	$(kx+b)^p, p\neq -1, k\neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$	$\frac{1}{kx+b}, k\neq 0$	$\frac{1}{k}\ln(kx+b)+C$
e^x	e^x+C	$e^{kx+b}, k\neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\sin(kx+b), k\neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
$\cos x$	$\sin x+C$	$\cos(kx+b), k\neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx+C$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx+C$		

Основное свойство первообразной

Если F(x) – одна из первообразных для функции f(x) на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции определяется выражением

F(x)+C,

где C- действительное число

Три правила нахождения первообразных

Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют на промежутке первообразные соответственно $y=F(x)$ и $y=G(x)$, то

Функция	Первообразная
$y = f(x) + g(x)$	$y = F(x) + G(x)$
$y = k\,f(x)$	$y = k\,F(x)$
$y = f(kx+m)$	$y = \frac{1}{k}F(kx+m)$

Пример1. Найти одну из первообразных функции $f(x) = x^2 + 3\cos x$.

Решение: Используя, правила интегрирования и таблицу первообразных для функции x^p при $p = 2$ и для $\cos x$,находим одну из первообразных данной функции:

Ответ: $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3\sin x$.

Пример 2. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

Решение: Общим видом первообразных для f является функция $F(x) = tgx + C$ Решая уравнение: $0 = tg\frac{\pi}{4} + C \Rightarrow 0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$

Таким образом, искомая первообразная есть функция

Ответ: $F(x) = tgx - 1$.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	Вариант 2
1. Найти первообразные для следующих функций;	
1. $f(x) = 2$ 2. $f(x) = x - 2$ 3. $f(x) = 2x^2 - 3x^3$ 4. $f(x) = \frac{1}{x^2} - 3x$ 5. $f(x) = 5(2x - 4)$ 6. $f(x) = 5(1 - 2x)$ 7. $f(x) = cos(3x - 4)$ 8. $f(x) = 2^{1+x}$	1. $f(x) = -6$ 2. $f(x) = x + 3$ 3. $f(x) = 7x^5 + 3x^2$ 4. $f(x) = \frac{1}{x^3} + 5x$ 5. $f(x) = 4(3x + 2)$ 6. $f(x) = 4(1 - x)$ 7. $f(x) = sin(4x + 1)$ 8. $f(x) = e^{1-x}$

9. $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 10. $f(x) = \frac{5}{cos^2(x+5)}$	9. $f(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$ 10. $f(x) = \frac{5}{sin^2(x+3)}$
2. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M.	
$f(x) = 1 + x^2 \;\; M(-3; 9)$	$f(x) = 5 - x^3 \;\; M(2; -1)$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 53

Название практической работы: *Применение интеграла для вычисления физических величин и площадей.*

Цель работы*:* Научиться вычислять площади плоских фигур и физические величины с помощью определенных интегралов.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, МРР 02, МРР 09

предметные: ПРб 01, ПРб 04, ПРб 06, ПРб 14, ПРу 10, ПРу 16, ПРу 18, ПРу 19

знания:

– Понятие об определенном интеграле.
– Понятие о криволинейной трапеции.

умения: Вычисление определенных интегралов.

Ход работы:

Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена**:**

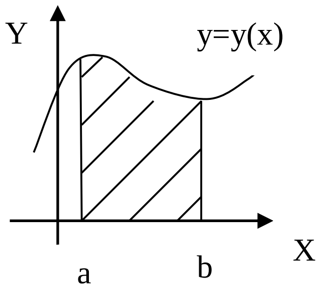


Рис.1

- сверху - графиком непрерывной функции *y=y(x)*
- снизу – осью ОХ (*y=0*)
- слева – прямой *x=a*
- справа – прямой *x=b*

Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b y(x)dx \quad (1)$$

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 2$, x=-1, x=2 и осью ОХ.

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

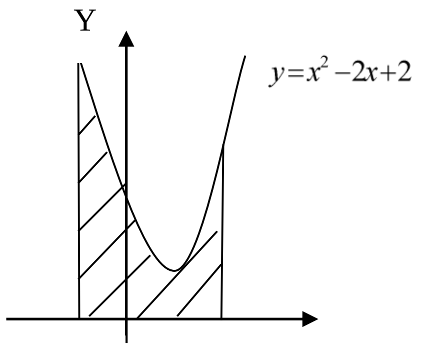


Рис. 2

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2}-\left.x^2\right|_{-1}^{2}+\left.2x\right|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)-\left(2^2-(-1)^2\right)+\left(2\cdot 2-2\cdot(-1)\right)=$$

$$=3-3+6=6.$$

Ответ: 6 кв.ед.

Пусть y=f(x) – непрерывная функция при $x\in[a, b]$, график которой расположен ниже оси OX (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

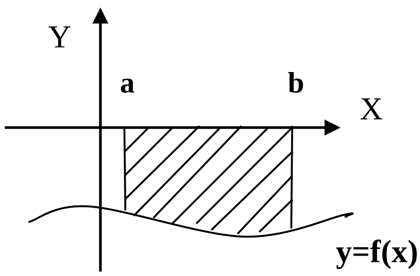


Рис. 3

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \quad (2)$$

Пример 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2-5x+6$ и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

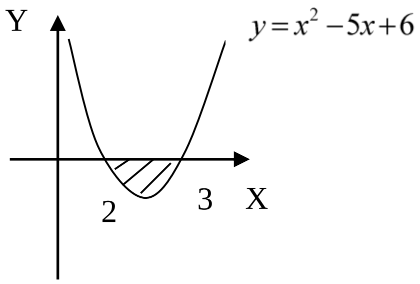


Рис. 4

$$S=\left|\int_{2}^{3}(x^2-5x+6)dx\right|=\left|\left.\frac{x^3}{3}\right|_{2}^{3}-\left.\frac{5x^2}{2}\right|_{2}^{3}+\left.6x\right|_{2}^{3}\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{5\cdot 3^2}{2}-\frac{5\cdot 2^2}{2}\right)+(6\cdot 3-6\cdot 2)\right|=$$

$$=\left|\frac{19}{3}-\frac{25}{2}+6\right|=\left|\frac{38-75+36}{6}\right|=\left|-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$$

Ответ: 1/6 кв.ед.

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2+1$ и $y=-x+3$.

Решение: данная фигура (рис. 5) представляет собой разность криволинейных трапеций Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: $x_1=-2$ и $x_2=1$.

$S=\int_{-2}^{1}(-x+3)dx-\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx$ **.** Можно записать под один интеграл:

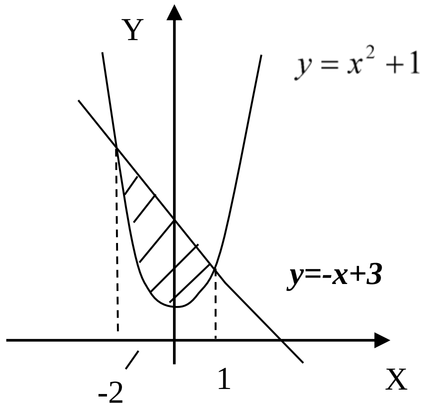


Рис. 5

$$S = \int_{-2}^{1}\left(-x + 3 - (x^2 + 1)\right)dx = \int_{-2}^{1}\left(2 - x - x^2\right)dx =$$

$$= 2x\Big|_{-2}^{1} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = \left(2\cdot 1 - 2\cdot(-2)\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) -$$

$$-\left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 6 - \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 = 4\frac{1}{2}$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

Пример 4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = -x + 3$, и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций $S=S_1+S_2$, где $S_1 = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)dx$ и $S_2 = \int_1^3 \left(-x + 3\right)dx$. Получим формулу:

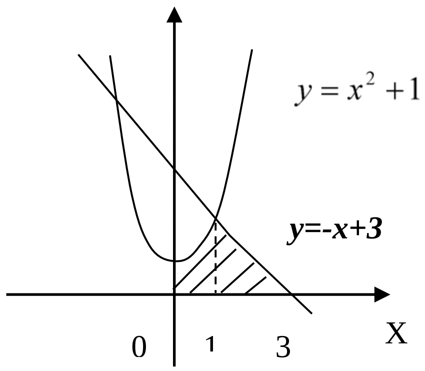


Рис. 6

$$S = \int_0^1\left(x^2 + 1\right)dx + \int_1^3\left(-x + 3\right)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + 3x\Big|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + (1 - 0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^3}{2}\right) + \left(3\cdot 3 - 3\cdot 1\right) =$$

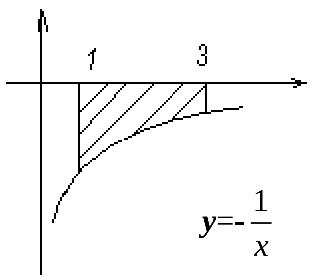
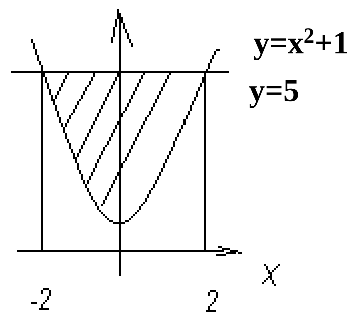
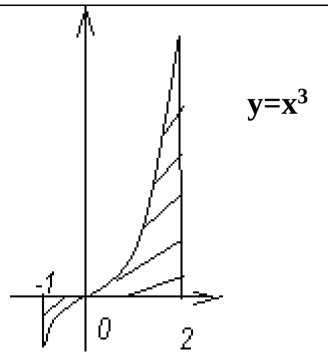
$$= \frac{1}{3} + 1 - 4 + 6 = 3\frac{1}{3}$$

Ответ: $3\frac{1}{3}$ **кв.ед.**

Применение определенного интеграла для вычисления физических величин

№ п/п	Физическая величина	Формула	Единицы измерения
1	Путь, пройденный точкой с переменной скоростью υ(t) за отрезок времени $[t_1, t_2]$	$S=\int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt$	t_1, t_2 - с; υ(t) – м/с; S – м.
2	Работа переменной силы f(x) на пути от точки a до точки b	$A=\int_a^b f(x)dx$	f(x) – Н; a; b – м; А – Дж.
3	Сила давления жидкости на вертикальную пластину	$P=g\int_a^b pxf(x)dx$	g=9,8 м/с^2; p – кг/м^3; a; b – м; p – Н.

Задания для самостоятельной работы:

№1	№2	№3
		

1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon=9t^2-2t-8$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 3 секунды от начала движения.

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1=(2t^2+4t)$ м/с, второе – со скоростью $v_2=(3t+2)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 с?

3. Сила упругости F пружины, растянутой на $l_1 = 0{,}02$м, равна 2Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на $l_2 = 0{,}05$м?

4. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для ее сжатия на 0,01 нужна сила 10 Н.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 54

Название практической работы: *Нахождение уравнений окружности, сферы, плоскости. Вычисление расстояний между точками.*

Цель работы: Научиться составлять уравнения сферы и плоскости, вычислять расстояния между точками.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09

***предметные*:** ПРб 13, ПРу 17.

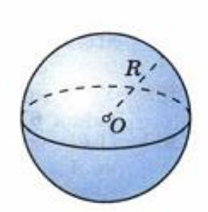
знания: Понятие о сфере, шаре, плоскости.

умения:

– Составление уравнений сферы и плоскости.

– Вычисление расстояния между точками.

Ход работы:



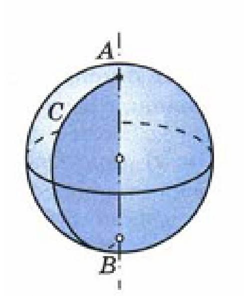
Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Данная точка О называется **центром сферы**, а данное расстояние – **радиусом сферы**. Обозначается **R.** Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы.

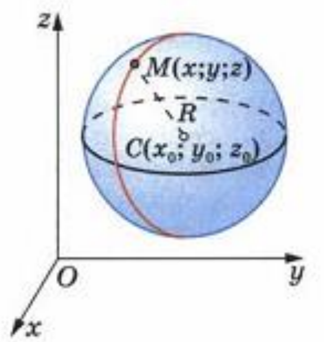
Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется **диаметром сферы**. Диаметр сферы равен **2R**.

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**.

Шаром радиуса R с центром в точке О называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки О на расстоянии, не превышающем R(включая О), и не содержит других точек.



Сфера может быть получена вращением полуокружности *(АСВ)* вокруг ее диаметра *(АВ),* а шар – вращение полукруга вокруг его диаметра.



Уравнение сферы радиуса R с центром С ($x_0; y_0; z_0$):.

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Расстояние от произвольной точки М ($x; y; z$) **до С** ($x_0; y_0; z_0$) вычисляется по формуле:

МС = $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Общее уравнение плоскости имеет вид

$Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю.

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса R = 5 с центром в начале координат.

Решение: Непосредственной подстановкой значения радиуса в уравнение

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ получим $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке С (2; —3; 5) и радиусом, равным 6.

Решение: Подставив значение координат точки С и значение радиуса в уравнение

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ получим

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 36$.

Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 100$.

Решение: Сравнивая данное уравнение с уравнением сферы

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ видим, что

$a = -4$, $b = 3$, $c = 0$, R =10. Следовательно, С(—4; 3; 0), R = 10.

Задача 4. Доказать, что уравнение

$x^2 + y^2 + z^2 — 2x + 4y — 6z + 5 = 0$
является уравнением сферы.
Решение: Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив квадраты двучленов, содержащих соответственно x, y и z:
$x^2 — 2x + y^2 + 4y + z^2 — 6z + 5 =$
$= (x — 1)^2 — 1 + (y + 2)^2 — 4 + (z — 3)^2 — 9 + 5 =$
$= (x — 1)^2 + (y + 2)^2 + (z — 3)^2 — 9.$
Следовательно, данная поверхность имеет уравнение
$(x — 1)^2 + (y + 2)^2 + (z — 3)^2 = 9.$
3) и радиусом R = 3
Задания для самостоятельной работы:
Вариант 1.

1. Сфера задана уравнением: $(x — 1)^2 + y^2 + (z — 2)^2 = 9$

а) выпишите координаты центра сферы и найдите ее радиус,

б) проверьте принадлежит ли этой сфере точка $A(1; 3; -1)$.

2. Составьте уравнение сферы, если *М (2;0; 0)* – центр сферы а радиус равен $\sqrt{3}$.

3. Запишите уравнение сферы с центром в точке $O(0; 1; -2)$ и проходящей через точку $\mathrm{C}\ (-3;\ 1;\ 2)$.

4. Приведите данное уравнение к стандартному виду уравнение сферы и найдите координаты ее центра и величину радиуса:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 2.$$

Вариант 2.

1. Сфера задана уравнением: $(x — 4)^2 + (y + 2)^2 + \mathrm{z}^2 = 4.$

а) выпишите координаты центра сферы и найдите ее радиус,

б) проверьте принадлежит ли этой сфере точка $A(4; 3; -1)$.;

2. Составьте уравнение сферы, если *Р (0;2; 0)* – центр сферы а радиус равен $\sqrt{5}$.

3. Запишите уравнение сферы с центром в точке $O(0; 2; -1)$ и проходящей через точку $K\ (-1;\ -1;\ 0)$.

4. Приведите данное уравнение к стандартному виду уравнение сферы и найдите координаты ее центра и величину радиуса:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z = 7.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 55

Название практической работы: *Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Вычисление угла между двумя векторами.*

Цель работы: Научиться выполнять операции над векторами, вычислять координаты векторов, определять угол между ними.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09

***предметные*:** ПРб 13, ПРу 17

знания: Понятие о векторе, его координатах.

умения: Построение суммы, разности векторов.

Ход работы:

Любой направленный отрезок прямой называется ***вектором***.

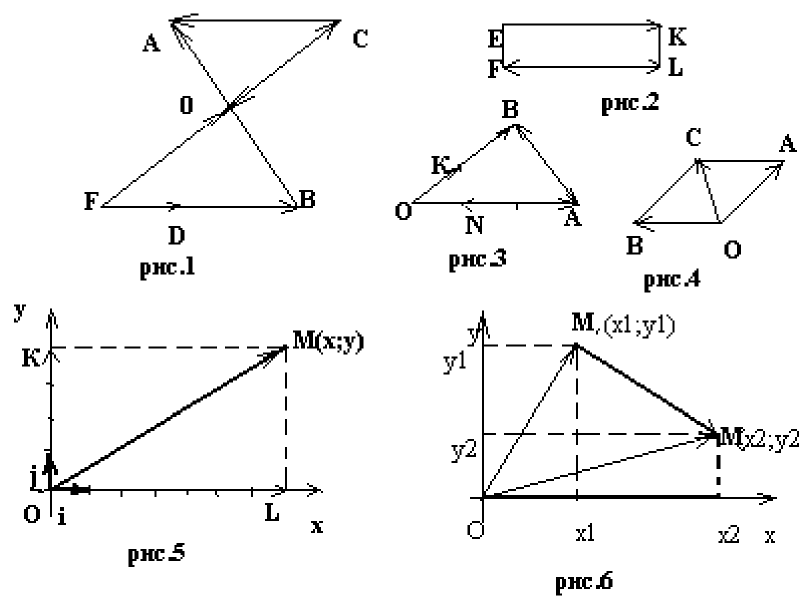
Вектор, заданный парой несовпадающих точек А и В, обозначается $\overrightarrow{AB}$, причем в этой записи А-начало вектора, В-его конец.

Векторы могут быть записаны с помощью строчных букв: $\vec{a}$; $\vec{в}$; $\vec{c}$, $\vec{d}$ …

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. Например, $\overline{AA}$ *или* $\overline{0}$ является нулевым вектором.

Длиной вектора называется длина порождающего его отрезка, обозначается, $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$, говорят «модуль вектора». Длина нулевого вектора $|\overline{AA}| = 0$.

Два вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.



Так, на рис.1 коллинеарными являются следующие векторы: $\overline{FD}$ *и* $\overline{FB}$; $\overline{CA}$ *и* $\overline{DB}$; $\overline{FO}$ *и* $\overline{CO}$.

Среди коллинеарных векторов есть такие, у которых направления совпадают. Эти векторы называются <u>сонаправленными</u> и пишут $\overline{FO}\uparrow\uparrow\overline{OC}$ (см. рис.1).

Если направления векторов противоположно направлены, то их и называют <u>противоположно направленными</u> и пишут $\overline{CA}\uparrow\downarrow\overline{FB}$; $\overline{FO}\uparrow\downarrow\overline{CO}$. (см. рис.1)

Два коллинеарных вектора называют <u>равными</u>, если они сонаправлены и имеют равные длины; другими словами, $\overline{a} = \overline{b}$, *если* $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$ *и* $|\overline{a}| = |\overline{b}|$. На рис.2 $\overline{EK} = \overline{FL}$, *но* $\overline{EK} \neq \overline{LF}$.

Действия над векторами

1. ***Суммой*** векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец с - с концом вектора $\overline{b}$, при условии, что начало вектора $\overline{b}$ перенесено в

конец вектора $\overline{a}$ (правило треугольника). На рис.3 $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$ *или* $\overline{OB}+\overline{BA}=\overline{OA}$. На рис .4 $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$ (правило параллелограмма). Существует правило многоугольника.

Свойства суммы векторов:

- $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (переместительное свойство)
- $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ (сочетательное свойство)
- $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}.$

2. ***Разностью векторов*** $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ называют сумму вектора $\overline{a}$ *и* $-\overline{b}$, *т.е.* $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$. Векторы $\overline{b}$ *и* $-\overline{b}$ называются ***противоположными***. На рис.3 $\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$ *и* $\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{AB}$.

3. ***Произведением*** вектора $\overline{a}$ на вещественное число *k* называется вектор $\overline{ka}$, который имеет длину, равную $k|\overline{a}|$, и коллинеарен $\overline{a}$. При этом если k $\rangle 0$, *то* $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{ka}$; *если* $k\langle 0$, *то* $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{ka}$.

На рис.3 $\overline{OK}=\frac{1}{2}\overline{OB}$; $\overline{AN}=-\frac{2}{3}\overline{OA}$.

Декартова система координат

Если задана прямоугольная система координат ХОУ, на осях ОХ и ОУ взяты единичные векторы $\overline{i}$ *и* $\overline{j}$ соответственно, то справедливо равенство $\overline{OM}=x\overline{i}+y\overline{j}$ (см. рис.5).Докажите самостоятельно.

Числа х и у называются координатами вектора $\overrightarrow{OM}$. Пишут $\overrightarrow{OM}=\{x;y\}$ На рис.5 $\overrightarrow{OM}=\{7;4\}$.Объясните почему.

Если вектор $\overline{M_1M_2}$ не проходит через начало координат (рис.6), то $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{x_2;y_2\}-\{x_1;y_1\}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$, т.е**.** *для нахождения координат вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.*

Пример 1. Даны точки А (3;2), В(-1;5), С(0;3). Найти координаты векторов $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{AC}$.

Решение:

$$\overrightarrow{AB}=\{-1-3;5-2\}=\{-4;3\} \quad \overrightarrow{BC}=\{0-(-1);3-5\}=\{1;-2\}$$
$$\overrightarrow{AC}=\{0-3;3-2\}=\{-3;1\}$$

Действия над векторами, заданными своими координатами

Если векторы заданы в декартовой системе координат своими координатами, то:

1) при сложении двух и более числа векторов их одноименные координаты складываются, т.е. если $\vec{a}=\{x_1;y_1\},\vec{b}=\{x_2;y_2\}$, то $\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2;y_1+y_2\}$.

2) при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются, т.е. если $\vec{a}=\{x_1;y_1\},\vec{b}=\{x_2;y_2\}$, то $\vec{a}-\vec{b}=\{x_1-x_2;y_1-y_2\}$.

3) при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, т.е. если $\vec{a}=\{x_1;y_1\}$, то $k\cdot\vec{a}=\{k\cdot x_1;k\cdot y_1\}$.

Пример 2. Даны векторы $\vec{a}=\{-2;4\},\vec{b}=\{3;1\}$. Найти 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $0{,}4\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{b}$.

Решение. Согласно приведенным правилам, получим:

$$1)\ \vec{a}+\vec{b}=\{-2+3;4+1\}=\{1;5\}$$

$$2)\ \vec{a}-\vec{b}=\{-2-3;4-1\}=\{-5;3\}$$
$$3)\ 0{,}4\vec{a}=\{0{,}4\cdot(-2);0{,}4\cdot 4\}=\{-0{,}8;1{,}6\}$$
$$4)\ -\frac{1}{3}\vec{b}=\left\{-\frac{1}{3}\cdot 3;-\frac{1}{3}\cdot 1\right\}=\left\{-1;-\frac{1}{3}\right\}$$

Длина вектора, расстояние между двумя точками на плоскости

Длина вектора, выходящего из начала координат (см. рис.5), равна квадратному корню из суммы квадратов его координат, т.е.

$$\left|\overline{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad \textbf{(1)}$$

Если вектор задан двумя точками $M_1(x_1;y_1)$ *и* $M_2(x_2;y_2)$, *то* $\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. **(2)** По этой формуле можно найти расстояние между двумя точками, с заданными координатами (объясните почему).

Пример 3. Найти длину вектора $\overline{AB}$; если А (5; 2), В (8;-2).

Решение. Применяя формулу (2), получим $\overline{AB}=\sqrt{(8-5)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{9+16}=5.$

Ответ: $\overline{AB}=5.$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\bar{a};\bar{b}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Если векторы заданы своими координатами, $\bar{a}\{x_1;y_1\}$ *и* $\bar{b}\{x_2;y_2\}$ то скалярное произведение находят так:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2 \qquad \textbf{(4)}$$

Пример 4_ В равностороннем треугольнике АВС со стороной, равной 4, найти скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$.

Решение: так как углы в равностороннем треугольнике по 60^0, то, используя формулу (3), получим $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=4\cdot 4\cdot\cos 60^0=16\cdot\frac{1}{2}=8.$

Ответ: 8.

Используя формулы (1), (3), (4), можно вывести формулу для нахождения косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle\left(\bar{a};\bar{b}\right)=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

Пример 5 Найти угол А в треугольнике АВС, если А(6;7), В(3;3), С(1;-5).

Решение: Определим координаты векторов $\overline{AB}\{-3;-4\},\overline{AC}\{-5;-12\}$. Вычислим косинус угла между векторами по формуле (5):

$$\cos\angle\left(\overline{AB};\overline{AC}\right)=\frac{-3\cdot(-5)+(-4)\cdot(-12)}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}}=\frac{63}{5\cdot 13}=\frac{63}{65}.$$

$\angle(\overline{AB};\overline{AC}) = \arccos\frac{63}{65}$. *Ответ*: $\arccos\frac{63}{65}$.

Задания для самостоятельной работы

1.Найти координаты векторов $\overline{AB}; \overline{CB}; \overline{CA}$, если $\overline{AB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}; \overline{CB} = -5\bar{i}; \overline{CA} = \bar{i} - 7\bar{j}$.

2. Найти координаты векторов $\overline{BA}; \overline{BC}; \overline{AC}$, если $\overline{BA} = 3\bar{i} - 5\bar{j}; \overline{BC} = 4\bar{j}; \overline{AC} = -8\bar{i} + \bar{j}$.

3. Даны точки A(3;-1); B(0;-5); C(-2;1). Найти: $\overline{AB}; \overline{BC}; \overline{CA}; \overline{AB} + \overline{BC}; \overline{AC} - \overline{AB}; \overline{m} = 2\overline{AB} + 3\overline{BC} - 0{,}5\overline{CA}$.

4. Даны точки A(4;0), B(-1;3), C(5;7). Найти: $\overline{AC}; \overline{AB}; \overline{BC}; \overline{AB} + \overline{BC}; \overline{AB} - \overline{BC}; \overline{m} = -3\overline{AB} + 2\overline{BC} - 5\overline{AC}$.

5. Дан треугольник с вершинами F(7;7), D(4;3), C(3;4). Найти его периметр.

6. Дан треугольник ABC, A(-4;1), B(-2;4), C(0;1). Доказать, что данный треугольник равнобедренный.

7. Диагонали квадрата АВСД пересекаются в точке О. Найди угол между векторами: а) $\overline{ДС}$ *и* $\overline{АД}$, *б*) $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$, *в*) $\overline{OA}$ *и* $\overline{OC}$;

8. Диагонали ромба АВСД пересекаются в точке О, и диагональ ВД равна стороне ромба. Найди угол между векторами: а) $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$; *б*) $\overline{ДВ}$ *и* $\overline{OB}$; *в*) $\overline{OC}$ *и* $\overline{OД}$.

9. Вычислите скалярное произведение векторов $\bar{a}\{3;5\}, \bar{b}\{-2;7\}$ и определить вид угла между данными векторами.

10. Вычислите скалярное произведение векторов и определить вид угла, образованного между векторами $\bar{c}\{0{,}5;\ 7\}; \bar{d}\{7;-0{,}5\}$.

11. Найти угол между векторами $\overline{FD}$ *и* $\overline{DC}$, *если* $F(1;6), D(1;0), C(-2;3)$.

12. Найти угол между векторами $\overline{RL}$ *и* $\overline{OP}$, если R(0;3), O(6;-1), L(5;0), P(9;4).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 56

Название практической работы: *Вычисление скалярного произведения векторов.*

Цель работы: Научиться вычислять скалярное произведение векторов.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09

***предметные*:** ПРб 13, ПРу 17

знания:

– Понятие о векторе, его координатах.

– Понятие о скалярном произведении векторов, его свойствах.

Умения: Вычисление скалярного произведения

Ход работы:

Рассмотрим два вектора $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними: $\left(\bar{a},\bar{b}\right) = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot cos\varphi$.

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, тогда

- скалярное произведение этих векторов находится по формуле

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

- косинус угла между ними – по формуле

$$cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}}$$

Свойства скалярного произведения

1. При ПЕРЕСТАНОВКЕ МНОЖИТЕЛЕЙ скалярное произведение НЕ ИЗМЕНЯЕТСЯ :

$$(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a}) \qquad \bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$$

2. ЧИСЛО МОЖНО ВЫНОСИТЬ за скалярное произведение :

$$(\lambda\bar{a},\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\bar{b})$$

3. При скалярном умножении вектора на сумму векторов МОЖНО РАСКРЫТЬ СКОБКИ :

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$$

4. СКАЛЯРНЫЙ КВАДРАТ вектора(то есть скалярное произведение вектора на себя) равен КВАДРАТУ его ДЛИНЫ (МОДУЛЯ) :

$$\bar{a}^{\,2} = \bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos 0 = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot 1 = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}| = |\bar{a}|^2$$

ЗАМЕЧАНИЕ : поэтому если вектор $\bar{a}$ возвести СКАЛЯРНО в квадрат и затем извлечь КОРЕНЬ, то получим НЕ первоначальный ВЕКТОР, а его МОДУЛЬ :

$$\sqrt{\bar{a}^{\,2}} = |\bar{a}|$$

Пример: Найти $\left(3\bar{a} - 5\bar{b}\right)\cdot\left(2\bar{a} + 7\bar{b}\right)$, если $\left|\bar{a}\right| = 3, \left|\bar{b}\right| = 1, \bar{a} \perp \bar{b}$

Решение:$\left(3\bar{a} - 5\bar{b}\right)\cdot\left(2\bar{a} + 7\bar{b}\right) = 6\bar{a}^2 - 10\left(\bar{a},\bar{b}\right) + 21\left(\bar{a},\bar{b}\right) - 35\bar{b}^2 = 6\left|\bar{a}\right|^2 -$
$-11\left(\bar{a},\bar{b}\right) - 35\left|\bar{b}\right|^2 = 6\cdot 3^2 - 11\cdot 0 - 35\cdot 1 = 19$

($\left(\bar{a},\bar{b}\right) = 0$, т.к., $\bar{a} \perp \bar{b}$).

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

1. Даны точки $\mathrm{A}(1;\ 3), \mathrm{B}(4;\ 7), \mathrm{C}(-1;\ -1), D(7;\ 5), Q(\mathrm{x};\ 3)$.

а) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{CD}$.

б) Найдите длины векторов $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{CD}$.

в) Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{CD}$.

г) Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{CD}$.

д) Данный угол острый, прямой или тупой (ответ обоснуйте)?

е) При каком значении х векторы $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ и $\overrightarrow{DQ}$ перпендикулярны?

2. В равнобедренном треугольнике ABC угол B прямой, $AC = 2\sqrt{2}$, BD – медиана треугольника. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Вариант 2.

1. Даны точки $M(2;\ 3), P(-2;\ 0), O(0;\ 0), K(-5;\ -12), R(4;\ y)$.

а) Найдите координаты векторов MP и OK.

б) Найдите длины векторов $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$.

в) Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$.

г) Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$.

д) Данный угол острый, прямой или тупой (ответ обоснуйте)?

е) При каком значении у векторы $\overrightarrow{\mathrm{PK}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{M}R}$ перпендикулярны?

2. В равностороннем треугольнике MHP HK – биссектриса, MH = 2. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{\mathrm{HK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PM}}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 57

Название практической работы: *Координаты в пространстве. Действия над векторами.*

Цель работы*:* Научиться вычислять выполнять операции над векторами и скалярное произведение векторов в пространстве.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов
-
-

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09

***предметные*:** ПРб 13, ПРу 17

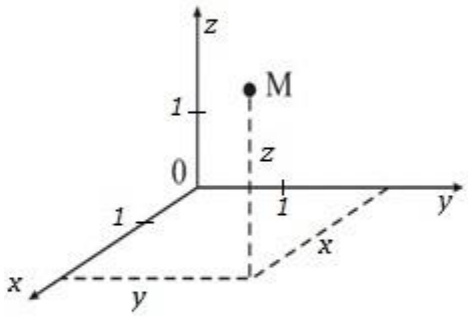
знания:

- Понятие о векторе, его координатах.
- Понятие о скалярном произведении векторов, его свойствах.

умения:

- Вычисление координат вектора и выполнение операций над векторами в пространстве.
- Вычисление скалярного произведения в пространстве.

Ход работы:

Плоскость Oxyz –<u>*координатная плоскость*</u> Прямые *Ox, Oy, Oz* называются ***<u>координатными осями</u>*** (или осями координат) Оси координат обозначаются так: Ox- ось абсцисс Oy- ось ординат Oz- ось аппликат точка их пересечения *O* – начало координат, плоскости *Oxy*, Oxz и *Oyz* – ***<u>координатные плоскости</u>*** . В прямоугольной системе координат каждой точке M пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются ее координатами. M(x; y; z).	<u>Прямоугольная система координат в пространстве</u> 
Формула разложения любого вектора по координатным векторам $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$, где x,y,z-коэффициенты разложения и они являются координатами вектора $\vec{a}\{x; y; z\}$	Запишите координаты вектора, если $\vec{a} = -\mathbf{5}\cdot\vec{i} + \mathbf{3}\cdot\vec{j} - \mathbf{2}\cdot\vec{k}$, Координаты вектора $\vec{a}\ \{-\mathbf{5}; \mathbf{3}; -\mathbf{2}\}$

Действия над векторами	*Примеры:*
Сложение векторов $\overline{a} + \overline{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$	$\vec{a}\{1; -4; -1\}$ $\vec{b}\{3; 0; -2\}$ $\vec{a} + \vec{b} = \{1; -4; -1\} + \{3; 0; -2\} =$ $\{4; -4; -3\}$
Вычитание векторов $\overline{a} - \overline{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$	$\vec{a}\{1; -4; -1\}$ $\vec{b}\{3; 0; -2\}$ $\vec{a} - \vec{b} = \{1; -4; -1\} - \{3; 0; -2\} =$ $\{-2; -4; 1\}$
Умножение вектора на число $k \cdot \overline{c} = \{kx_1; ky_1; kz_1\}$	$\vec{a}\{1; -4; -1\}$ $\vec{b}\{3; 0; -2\}$ $\overrightarrow{3a} = 3 \cdot \{1; -4; -1\} =$ $\{3; -12; -3\}$
Вычисление длины вектора $\vec{a}(x; y; z)$ по его координатам: $\boxed{\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$	Вычисление длины вектора $\vec{n}(3; -4; 0)$. $\lvert\vec{n}\rvert = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$
Расстояние между двумя точками. $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$. $\boxed{\lvert AB\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$	Вычислить расстояние между двумя точками C(2;-3;7) и D(-2;3;7). $\boxed{\lvert CD\rvert = \sqrt{(2+2)^2 + (-3-3)^2 + (7-7)^2}}$ $= \sqrt{16 + 36 + 0} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
Вычисление координат вектора $\overrightarrow{AB}$. Если $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$. $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$	В пространстве расположены три точки, заданные своими координатами: A(1; 6;

	3), B (3; − 1; 7) и C(− 4; 3; − 2). Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AB} = \{3-1; -1-6; 7-3\} = \{2; -7; 4\}$ $\overrightarrow{AC} = \{-4-1; 3-6; -2-3\} = \{-5; -3; -5\}$ $\overrightarrow{BC} = \{-4-3; 3+1; -2-7\} = \{-7; 4; -9\}$
Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$	Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}\{2; 1; 6\}$ и $\vec{b}\{3; 0; -1\}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + (-6) \cdot (-1) = 6 + 0 + 6 = 12$
Перпендикулярность векторов: $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$ $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$	Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}\{2; 1; 6\}$ и $\vec{b}\{3; 0; -1\}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) = 6 + 0 - 6 = 0$ Ответ: да
Коллинеарность векторов: $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$; $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$, если координаты векторов не равны нулю.	Задача. Коллинеарны ли векторы: a) $\vec{a}$\{-5;3;-1\} и $\vec{b}$\{-10; 6;-2\}; b) $\vec{c}$\{-6;3;-1\} и $\vec{d}$\{2; -9;3\}; Решение. a) $\frac{-5}{-10} = 0{,}5; \frac{3}{6} = 0{,}5; \frac{-1}{-2} = 0{,}5$ Да, векторы коллинеарны b) $\frac{-6}{2} = -3; \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}; \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$ Нет, векторы не коллинеарны Ответ: а) да b) нет
Косинус угла между ненулевыми векторами векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ вычисляется по формуле: $\boxed{cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$	Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ = \{4; 3; 0\} и $\vec{b}$ = \{0; 12; 5\}. $cos\varphi = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 12 + 0 \cdot 5}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 12^2 + 5^2}} = \frac{36}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{169}} = \frac{36}{65}$

Задания для самостоятельной работы

	Вариант 1		Вариант 2
1	Даны векторы $\vec{a}\{2; -4; 3\}$ и $\vec{b}\{-3; 0,5; 1\}$. Найдите координаты вектора a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$	1	Даны векторы $\vec{a}\{2; -4; 3\}$ и $\vec{b}\{-3; 0,5; 1\}$. Найдите координаты вектора a) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ b) $\vec{c} = \vec{a} + 2\overrightarrow{b}$
2	Даны векторы $\vec{a}\{1; -2; 0\}$, $\vec{b}\{3; -6; 0\}$ и $\vec{c}\{0; -3; 4\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$	2	Даны векторы $\vec{a}\{1; -2; 0\}$, $\vec{b}\{3; -6; 0\}$ и $\vec{c}\{0; -3; 4\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$
3	Найдите значения m и n , при которых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a}\{-4; m; 2\}$ и $\vec{b}\{2; -6; n\}$.	3	Найдите значения m и n , при которых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a}\{6; n; 1\}$ и $\vec{b}\{m; 16; 2\}$.
4	На каком расстоянии от плоскости (xOy) находится точка A (2; -3 ; 5)?	4	На каком расстоянии от плоскости (yOz) находится точка B (-3 ; 2 ; 4)?
5	На каком расстоянии от начала координат находиться точка A (-3 ; 4; 0)	5	На каком расстоянии от начала координат находиться точка B (3 ; 0; - 4)
6	Найдите координаты середины отрезка, если его концы имеют координаты A (5 3;2), B (3;-1;-4)	6	Найдите координаты середины отрезка, если его концы имеют координаты A (-3;2;-4), B (1;-4 ;2)
7	Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если A (5; 3 ; 2) , B (3 ; - 1 ; - 4)	7	Найдите длину вектора $\overrightarrow{BA}$, если A (-3; 2 ; - 4) , B (1 ; - 4 ; 2)
8	Записать координаты вектора $\vec{a}$, если $\overrightarrow{a} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$	8	Записать координаты вектора $\vec{b}$, если $\overrightarrow{b} = 5\vec{j} + 3\vec{i}$
9	Даны точки A (2; -1; 0) ; B (- 3 ; 2; 1) ; C (1 ; 1 ; 4). Найдите координаты точки D , если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.	9	Даны точки A (2; -1; 0) ; B (- 3 ; 2; 1) ; C (1 ; 1 ; 4). Найдите координаты точки D , если векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$равны.
10	Даны точки A (x^2; $y^3 - 3y$; $-z^2 - z$), B (1; $y^2 - 3$; $11z + 2$) и $\overrightarrow{AB}\{1; 0; -30\}$. Найти x, y, z	10	Дано точка A (x^2; $-6y + 12$; $-12z - 40$), B (4; $y^3 - 2y$; $z^2 + z$) и $\overrightarrow{AB}\{4; 0; -2\}$. Найти x, y, z
11	Даны вектор $\vec{a}\{2; -6; 3\}$ и $\overleftrightarrow{b}\{-1; 2; 2\}$. Найдите a) $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ b) $\|\vec{a} + \vec{b}\|$	11	Даны вектор $\vec{a}\{2; -6; 3\}$ и $\overleftrightarrow{b}\{-1; 2; 2\}$. Найдите a) $\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$ b) $\|\vec{a} - \vec{b}\|$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 58

Название практической работы: Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Цель работы: На основании знаний, полученных при изучении темы «Координаты и векторы» научиться решать стандартные задачи на нахождение и построение.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, .МРР 02, МРР 09

***предметные*:** ПРб 01, ПРб 06, ПРб 13, ПРб14, ПРу 16, ПРу 18, ПРу 19

Цель работы:

Знания:

- Понятие о векторе, его координатах.
- Понятие о скалярном произведении векторов, его свойствах.

умения:

- Вычисление расстояний между точками.
- Вычисление скалярного произведения.

Ход работы:

Задания для самостоятельной работы

Задача 1.

Парашютист опускается вертикально вниз со скоростью 4 м/с в безветренную погоду. С какой скоростью он будет двигаться при горизонтальном ветре, скорость которого относительно Земли 3 м/с. На какое расстояние отнесет его от места падения, если он спускается с высоты 2км?

Работа над задачей.

1. Запишем закон сложения скоростей в векторном виде.
2. Сделаем чертеж, произведя сложение векторов скоростей.
3. Искомый вектор является гипотенузой прямоугольного треугольника. По теореме Пифагора вычислим её, найдя тем самым модуль скорости.
4. Зная, что при прямолинейном равномерном движении модуль перемещения пропорционален скорости, составим пропорцию и найдем модуль искомого перемещения.

Задача 2.

Пусть $\vec{V}$ – скорость материальной точки, $\vec{F}$ – сила, действующая на нее. Чему равна мощность, развиваемая силой $\vec{F}$, если $\overrightarrow{|F|}$ = 5 Н, $\overrightarrow{|V|}$ = 3,5 м/с; $\left(\widehat{\vec{V}\vec{F}}\right)$ = 45^0. (Для решения задачи используется формула $W = \left|\vec{F}\right| * \left|\vec{V}\right| * \cos\widehat{FV}$)

Задача 3.

Вычислить работу, которую производит сила $\vec{F}$ = (6; 2), если ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A (-1; 3), в положение B (3; 4).

(Для решения задачи используется формула $A = \left|\vec{F}\right| * \left|\vec{S}\right| * \cos\widehat{FS}$)

Задача 4.

Мишень находится от лучника на расстоянии 50м. Мишень имеет форму концентрических окружностей. Диаметр центрального круга 10 см, толщина каждого кольца тоже 10 см. Стрела во время полете имеет скорость 50 м/с. Дует боковой ветер со скоростью 0,8 м/с. Попадет ли стрела в цель.? В какой круг должен целится стрелок, чтобы попасть в десятку? Сделайте чертеж и решите задачу.

Задача 5.

Скорость лодки относительно течения 10 м/с, скорость течения 5 м/с. Под каким углом к береговой линии должен лодочник вести лодку, чтобы попасть на противоположный берег строго против того места, от которого он отплыл? Сделайте чертеж.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 59

Название практической работы: *Определение взаимного расположения прямых и плоскостей.*

Цель работы: На основании знаний, полученных при изучении темы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве научиться решать стандартные задачи на определение их взаимного расположения.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09

***предметные*:** ПРб 01, ПРб 09, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания:

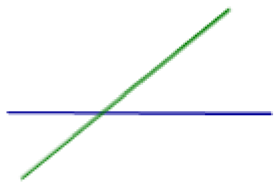
- Понятие о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве.
- Основные аксиомы стереометрии.

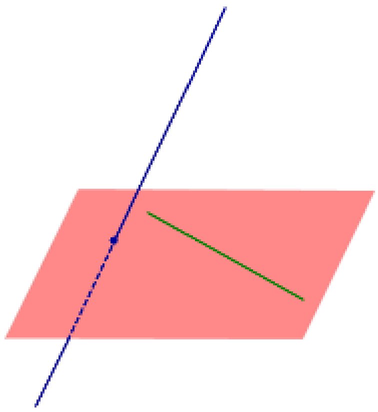
умения: Определение взаимного расположения двух прямых, прямой и плоскости.

Ход работы:

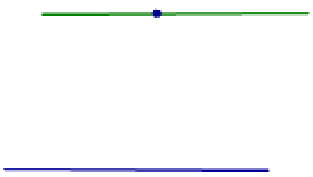
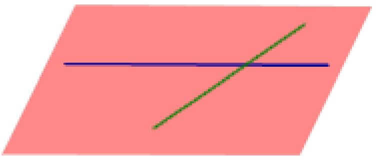
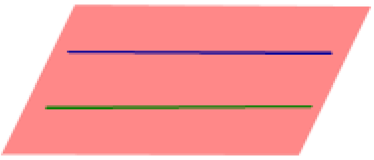
Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Все возможные случаи ***взаимного расположения двух прямых в пространстве*** представлены в следующей таблице.

Фигура	**Рисунок**	**Определение**
Две ***пересекающиеся прямые***		Две прямые называют ***пересекающимися прямыми***, если они имеют **единственную общую точку**.
Две ***параллельные прямые***		Две прямые называют ***параллельными прямыми***, если они **лежат в одной плоскости** и **не имеют общих точек**

Две ***скрещивающиеся прямые***		Две прямые называют ***скрещивающимися прямыми***, если **не существует плоскости, содержащей обе прямые**.

С перечисленными в предыдущей таблице случаями взаимного расположения двух прямых в пространстве близко связаны утверждения, представленные в следующей таблице.

Фигура	**Рисунок**	**Тип утверждения и формулировка**
Две различные точки		***Аксиома о прямой линии, заданной двумя точками*** Через две различные точки проходит одна и только одна прямая линия.
Прямая линия и точка, не лежащая на этой прямой		***Аксиома о параллельных прямых*** Через **точку, не лежащую на прямой**, проходит **одна и только одна прямая, параллельная** этой прямой.
Две пересекающиеся прямые		***Теорема о плоскости, определяемой двумя пересекающимися прямыми*** Через **две пересекающиеся прямые** проходит **одна и только одна плоскость**, содержащая обе эти прямые.
Две параллельные прямые		***Теорема о плоскости, определяемой двумя параллельными прямыми*** Через **две параллельные прямые** проходит **одна и только одна**

		плоскость, содержащая обе эти прямые.

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из двух прямых лежит на плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются (рис.1).

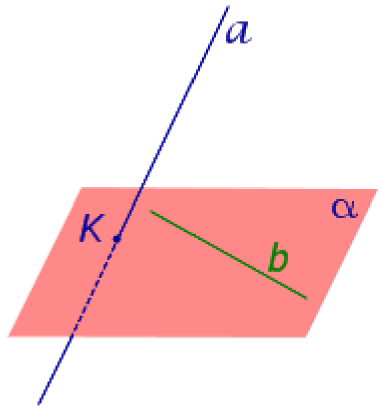


Рис.1

Углом между скрещивающимися прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым (рис. 2).

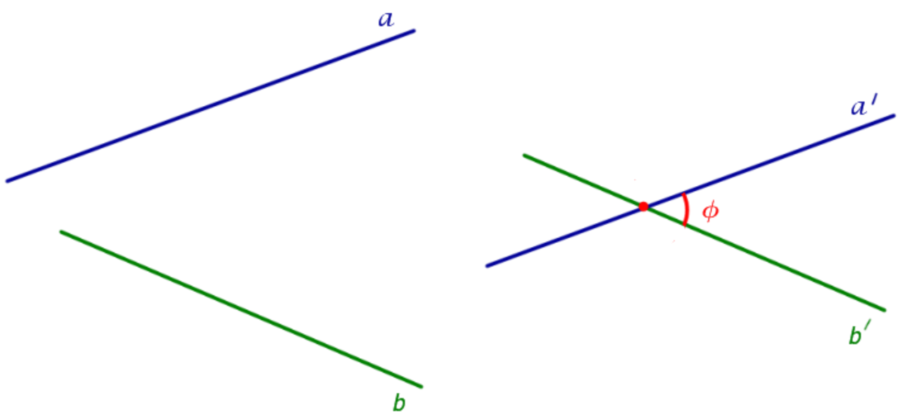


Рис.2

На рисунке 2 изображены скрещивающиеся прямые a и b. Прямая a' параллельна прямой a, прямая b' параллельна прямой b. Прямые a' и b' пересекаются. Угол φ и является углом между скрещивающимися прямыми a и b.

Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение. Поскольку прямая AB_1пересекает плоскость BB_1C_1 в точке B_1, которая не лежит на прямой BC_1, то по признаку скрещивающихся прямых прямые AB_1 и BC_1 скрещиваются (рис. 3).

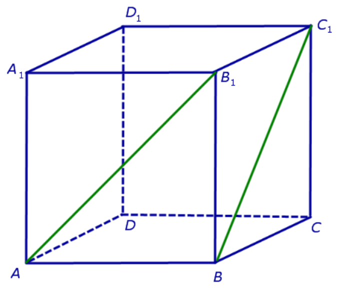


Рис.3

Для того, чтобы найти угол между прямыми AB_1 и BC_1, проведем в кубе диагональ боковой грани AD_1 и диагональ верхнего основания D_1B_1 (рис. 4).

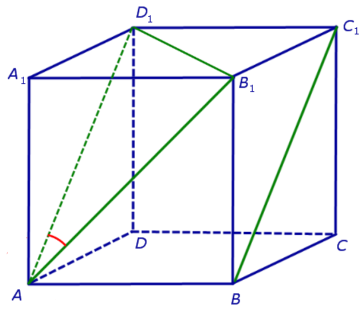
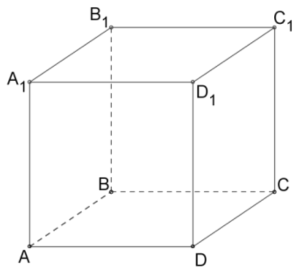


Рис.4

По определению угла между скрещивающимися прямыми угол D_1AB_1 и является углом между прямыми AB_1 и BC_1. Поскольку треугольник AD_1B_1 равносторонний, угол D_1AB_1 равен 60°.

Ответ. 60°.

Задачи для самостоятельного решения:

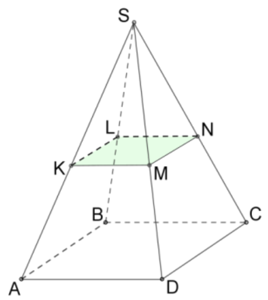


1. Дан куб $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

Определи взаимное расположение данных прямых

(параллельны, пересекающиеся, скрещивающиеся):

1) $\boldsymbol{AB}$ ***и*** $\boldsymbol{C_1D_1}$
2) $\boldsymbol{BC}$ ***и*** $\boldsymbol{A_1B_1}$
3) $\boldsymbol{CD}$ ***и*** $\boldsymbol{AD_1}$



2. Пирамида ***SABCD*** пересечена плоскостью ***KLM***, параллельной основанию

1. Как расположены прямые:

а) ***AS*** и ***SD***?

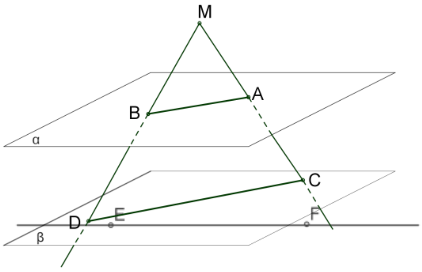
б) ***AB*** и ***KL***?

в) ***SD*** и ***LM***?

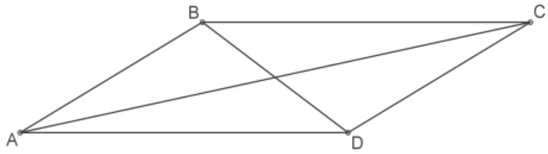
2. Как расположены плоскости:

а) ***ASD*** и ***DSC***?

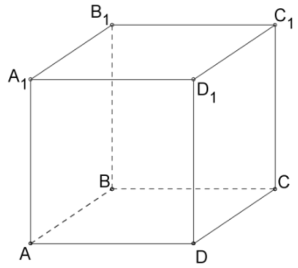
б) $\boldsymbol{ABD}$ и $\boldsymbol{ASD}$?



3. Прямые *MN* и *AB* параллельны, прямые *MP* и *AB* скрещивающиеся. Найти угол между прямыми *MP* и *AB*, если $\angle PMN = 80^0$.



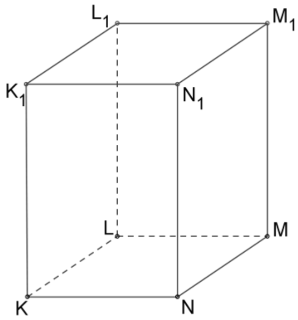
4. Прямая *EF* не лежит в плоскости квадрата *ABCD*, но параллельна стороне квадрата *BC*. Определи угол между прямыми *EF* и *AD*.



5. Дан куб $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$. Определи угол между прямыми DA_1 и DC_1

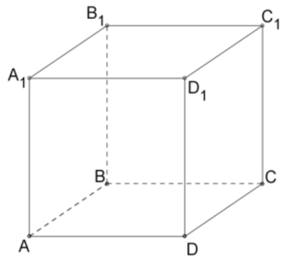
6. В плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ лежит правильный треугольник $\boldsymbol{ABC}$. Проведена медиана $\boldsymbol{A}D$. Прямая $\boldsymbol{a}$ расположена вне плоскости треугольника параллельно стороне

треугольника $\boldsymbol{BC}$. Рассчитайте величину угла между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{AD}$



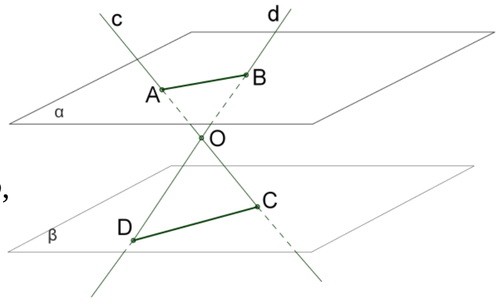
7. В основании прямого параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ ромб, один из углов которого 60^0. Найдите величину угла между *KM* и K_1L_1

8. Используя данный куб



1. определите взаимное расположение плоскостей *BB*1*C*1 и *AA*1*D*1
- параллельны
- пересекающиеся

2. назовите плоскость параллельную *A*1*B*1*C*1
- *ABC*
- *DD*1*C*1
- *A*1*D*1*D*
- *A*1*B*1*C*1
- *BB*1*C*1



9. Через точку *O*, которая находится между параллельными плоскостями *α* и *β*, проведены прямые *a* и *b*, пересекающие плоскости так, что точки *A* и *B* находятся в плоскости *α*,
а точки *C* и *D* - в плоскости *β*. *AB*=17 см, *DO*=27 см и *AC*=3·*AO*. Вычисли: *BD*;*CD*

Стороны ∡*M* пересекают параллельные плоскости *β* и *α* в точках *C*,*D* и *A*,*B*. Вычисли длину отрезка *AB*, если *MA*=14 см, *MC*=20 см и *CD*=58 см.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 60

Название практической работы: *Применение признаков и свойств параллельных и перпендикулярных плоскостей.*

Цель работы: На основании знаний, полученных при изучении темы о параллельности и перпендикулярности плоскостей научиться решать стандартные задачи.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09

предметные: ПРб 01, ПРб 09, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

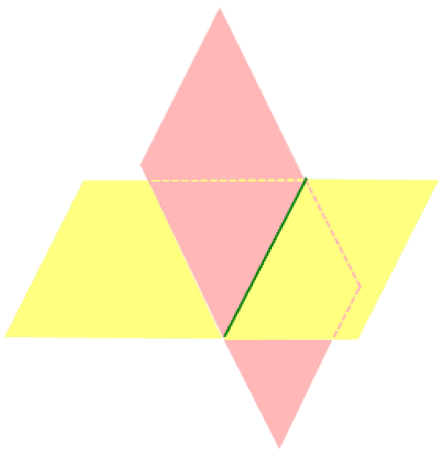
знания:

- Понятие о взаимном расположении плоскостей в пространстве.
- Основные аксиомы стереометрии.

умения: Определение взаимного расположения плоскостей.

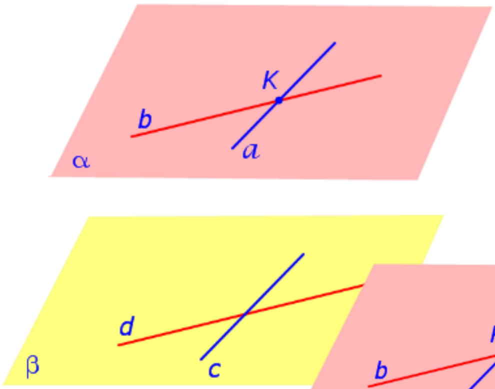
Ход работы:

Две плоскости в пространстве могут быть параллельными или могут пересекаться, как показано в следующей таблице.

Фигура	Рисунок	Определение
Две ***пересекающиеся плоскости***		Две плоскости называют ***пересекающимися***, если они **не совпадают**, и у них **есть общие точки**. В случае, когда две плоскости пересекаются, **пересечением** этих плоскостей **является прямая линия**.

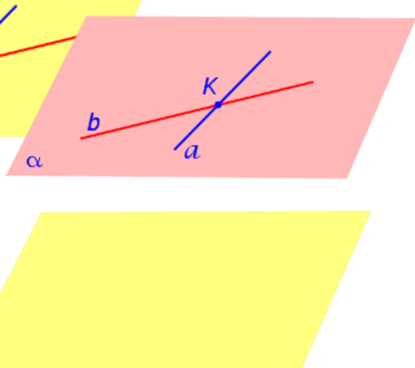
Две ***параллельные плоскости***		Две плоскости называют ***параллельными***, если они **не имеют общих точек**.

Признаки параллельности двух плоскостей



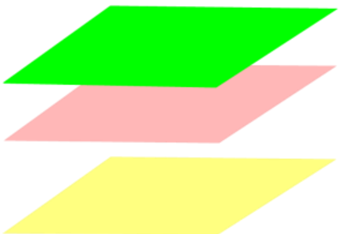
Первый признак параллельности двух плоскостей. Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

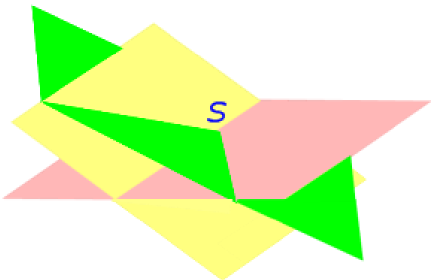
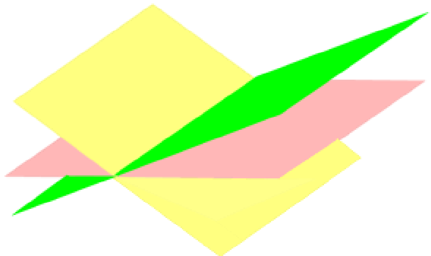
Рис.1



Второй признак параллельности двух плоскостей. Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Рис.2

Фигура	Рисунок	Свойство
Три параллельные плоскости		Плоскости **попарно не пересекаются**.

Две параллельные плоскости, пересечённые третьей плоскостью		**Прямые**, по которым третья плоскость пересекает две параллельные плоскости, **параллельны**.
Третья плоскость параллельна линии пересечения первых двух плоскостей		**Прямые**, по которым пересекаются каждые две плоскости, **параллельны**.
Третья плоскость пересекает линию пересечения первых двух плоскостей		Все три плоскости **имеют единственную общую точку** (на рисунке - это точка S)
Третья плоскость проходит через линию пересечения первых двух плоскостей		Все три плоскости **имеют общую прямую**

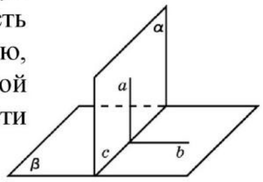
Взаимное расположение трех плоскостей в пространстве

Три плоскости в пространстве могут располагаться так и только так, как показано в следующей таблице.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.

Теорема. (*Признак перпендикулярности двух плоскостей*) Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



Теорема 2

Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно к линии пересечения плоскостей, перпендикулярна к другой плоскости.

Следствие 1

Если из точки одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей проведен перпендикуляр к другой плоскости, то он принадлежит первой плоскости.

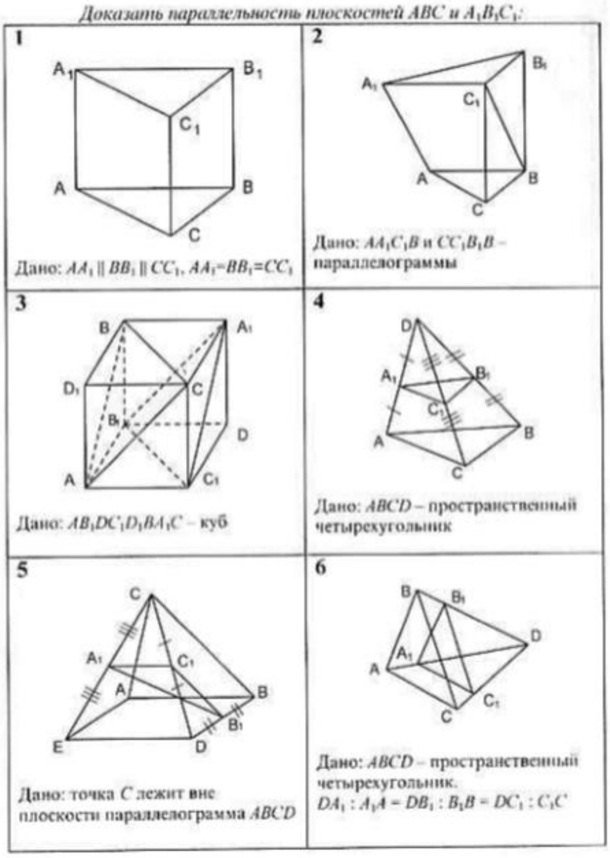
Следствие 2

Если две плоскости, перпендикулярные к третьей плоскости, пересекаются, то их линия пересечения есть перпендикуляр к этой плоскости.

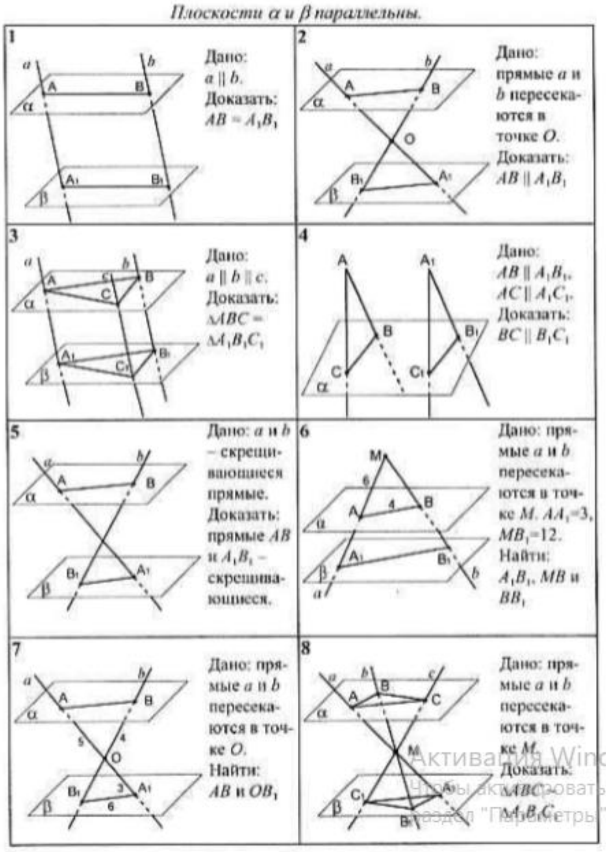
Задачи для самостоятельного решения:

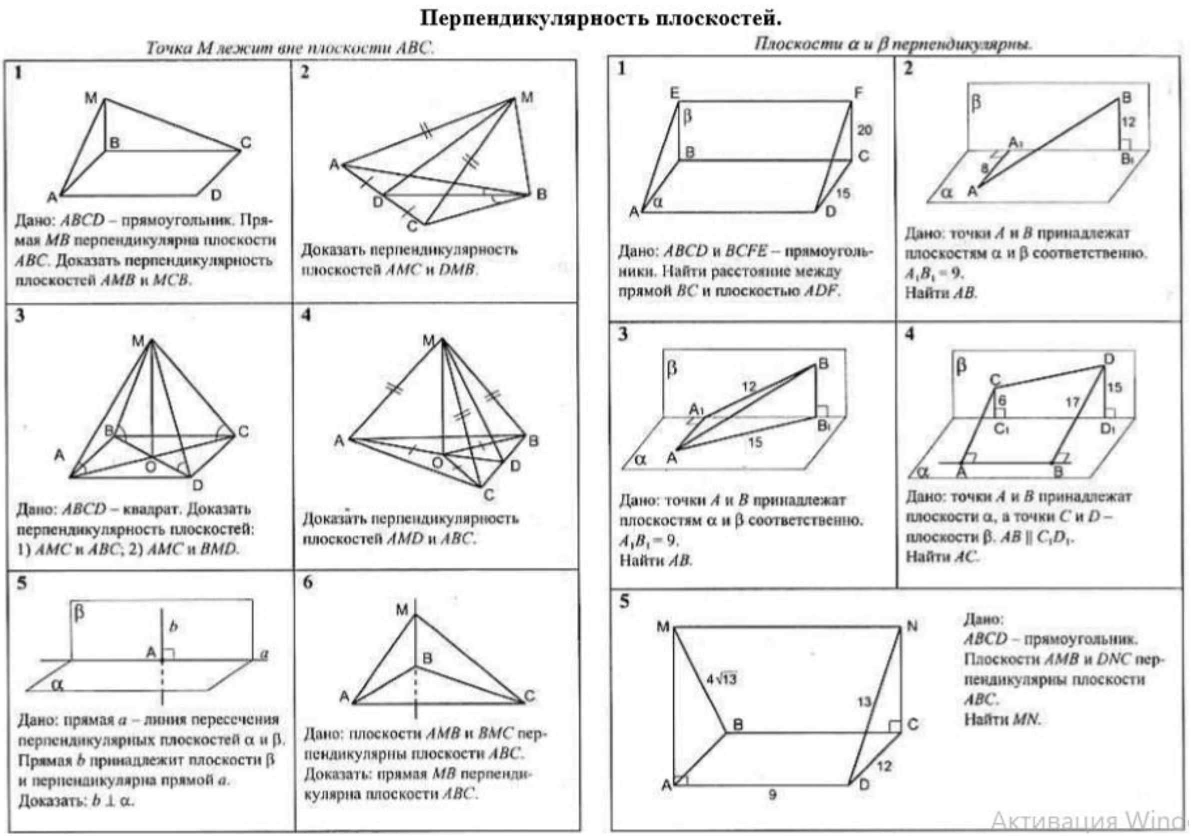
Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.

Доказать параллельность плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$:



Плоскости α и β параллельны.





Перпендикулярность плоскостей.

Точка M лежит вне плоскости ABC.

1. Дано: $ABCD$ – прямоугольник. Прямая MB перпендикулярна плоскости ABC. Доказать перпендикулярность плоскостей AMB и MCB.

2. Доказать перпендикулярность плоскостей AMC и DMB.

3. Дано: $ABCD$ – квадрат. Доказать перпендикулярность плоскостей: 1) AMC и ABC; 2) AMC и BMD.

4. Доказать перпендикулярность плоскостей AMD и ABC.

5. Дано: прямая a – линия пересечения перпендикулярных плоскостей α и β. Прямая b принадлежит плоскости β и перпендикулярна прямой a. Доказать: $b \perp \alpha$.

6. Дано: плоскости AMB и BMC перпендикулярны плоскости ABC. Доказать: прямая MB перпендикулярна плоскости ABC.

Плоскости α и β перпендикулярны.

1. Дано: $ABCD$ и $BCFE$ – прямоугольники. Найти расстояние между прямой BC и плоскостью ADF.

2. Дано: точки A и B принадлежат плоскостям α и β соответственно. $A_1B_1 = 9$. Найти AB.

3. Дано: точки A и B принадлежат плоскостям α и β соответственно. $A_1B_1 = 9$. Найти AB.

4. Дано: точки A и B принадлежат плоскости α, а точки C и D – плоскости β. $AB \parallel C_1D_1$. Найти AC.

5. Дано: $ABCD$ – прямоугольник. Плоскости AMB и DNC перпендикулярны плоскости ABC. Найти MN.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 61

Название практической работы: *Перпендикуляр и наклонная к плоскости.*

Цель работы*:* На основании знаний, полученных при изучении темы о перпендикуляре и наклонной научиться решать стандартные задачи.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09

***предметные*:** ПРб 01, ПРб 09, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания:

– Понятие о перпендикуляре и наклонной.
– Теорема о трех перпендикулярах.

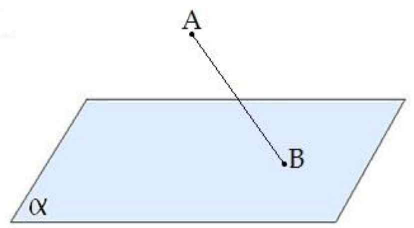
умения: Вычисление длины перпендикуляра, наклонной и проекции.

Ход работы:

Перпендикуляр и наклонная

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

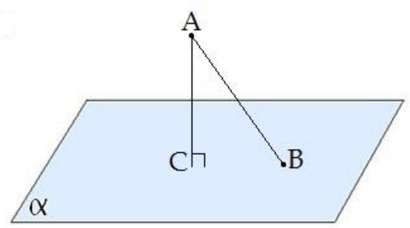
Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной**.



AB - наклонная. B - основание наклонной.

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием перпендикуляра**.

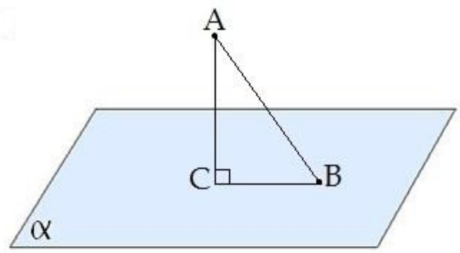


AC - перпендикуляр.

C - основание перпендикуляра.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости.

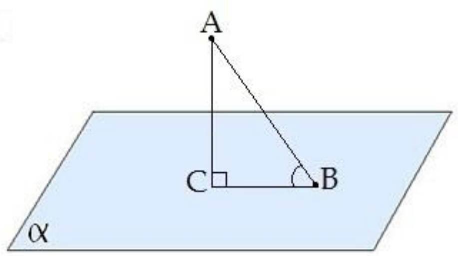
Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется проекцией наклонной.



CB - проекция наклонной AB на плоскость α.

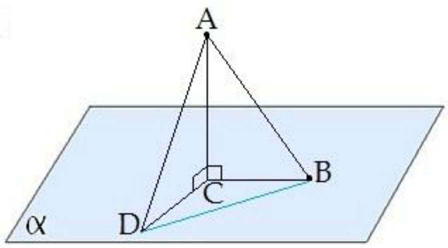
Треугольник ABC прямоугольный.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и её проекцией на плоскость.



∢CBA - угол между наклонной AB и плоскостью α.

Если из данной точки к данной плоскости провести несколько наклонных, то большей наклонной соответствует большая проекция.



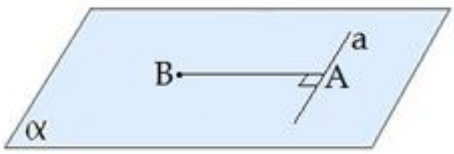
Если AD > AB, то DC > BC

∢DAB - угол между наклонными ∢DCB - угол между проекциями

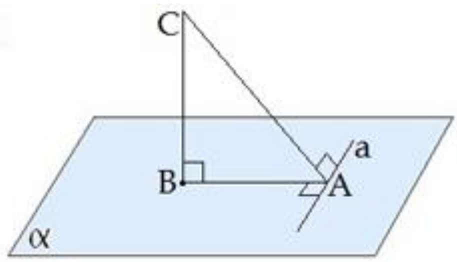
Отрезок DB - расстояние между основаниями наклонных.

Теорема о трех перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.



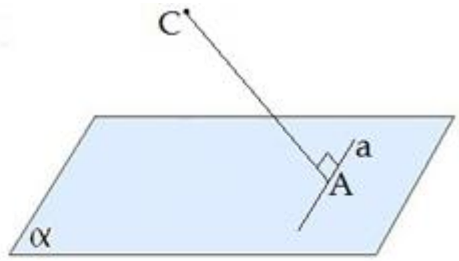
a ⊥ AB

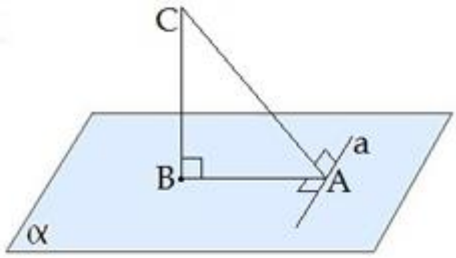


$\left.\begin{array}{l} a\perp AB\\ BC\perp BA\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp CA$

Справедлива также обратная теорема:

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

<table>
<tr>
<td>

a ⊥ AC</td>
<td>

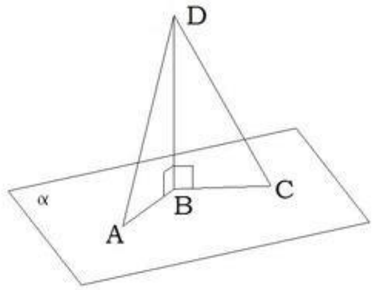
$a \perp AC BC \perp BA\} \Rightarrow a \perp BA$</td>
</tr>
</table>

Задачи для самостоятельного решения:

1. Прямая a пересекает плоскость β в точке C, и образует с плоскостью угол 60°. $P \in a$, точка R - проекция точки P на плоскость β. RC=7 см. Найдите PC.

2. К плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 8 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка, из которой проведена наклонная?

3. К плоскости α проведена наклонная AB ($A \in \alpha$). Длина наклонной равна 24 см, наклонная с плоскостью образует угол 60°. Вычислите, на каком расстоянии от плоскости находится точка B.



4. Наклонная AD с плоскостью α образует угол 30°, а наклонная DC с плоскостью α образует угол 45°. Длина перпендикуляра DB равна 19 см. Вычислите длины обеих наклонных.

5. Длина отрезка VB равна 20 м. Он пересекает плоскость в точке O. Расстояние от концов отрезка до плоскости соответственно равны 8 м и 2 м. Найдите острый угол, который образует отрезок VB с плоскостью.

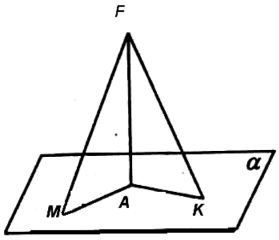
6. Равнобедренный треугольник ABE находится в плоскости α. Боковые стороны треугольника ABE равны по 10 см, а сторона основания AE = 12 см. К этой плоскости проведены перпендикуляр CB, который равен 6 см, и наклонные CA и CE. Вычислите расстояние от точки C до стороны треугольника AE.

7. Двугранный угол равен 45°. На одной грани двугранного угла дана точка B, расстояние от которой до ребра равно 22 см. Чему равно расстояние от точки B до второй грани двугранного угла?

8. Двугранный угол равен 120°. Внутри его дана точка A, которая находится на расстоянии 36 см от обеих граней угла. Чему равно расстояние от точки A до ребра двугранного угла?

ТЕСТ

Вариант 1

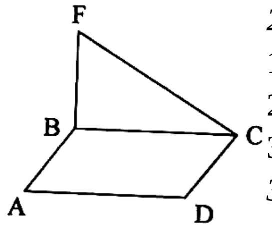


1. $AF \perp a$. Не верно, что...

1)$FM>AF$;

2)$FK>FM$;

3)$AK<FK$.



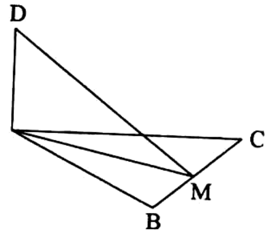
2.$BF\perp$ (ABC). Прямые CD и CF не будут перпендикулярными, если ABCD будет...

1) прямоугольником;

2) ромбом;

3) квадратом.

3. $AD\perp(ABC)$. Прямые DM и BC будут перпендикулярными, если AM будет...



1) биссектрисой;

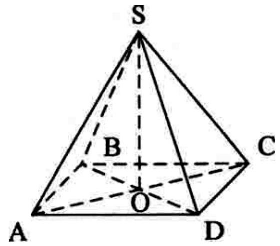
2) медианой;

3) высотой.

4. ABCD - прямоугольник, $AC\cap BD=O$.

$SO\perp AC$, $SO\perp BD$. Тогда угол между прямой CS и плоскостью (ABC) - это угол между прямой CS и...

1) CD 2) OC; 3) *BD*.



5. $ABCA_1$ *и* $B_1, С_1$ - правильная треугольная призма. $\angle(B\,С_1, (AA_1B_1))$=...

1) $\angle B\,С_1B_1$

2) $\angle\, B\,С_1М$;

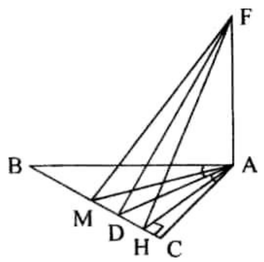
3) $\angle\, С_1BM$.

6. *Точка M равноудалена от вершин треугольника ABC. Тогда проекция точки M на плоскости C есть точка пересечения...*

1) высот треугольника;

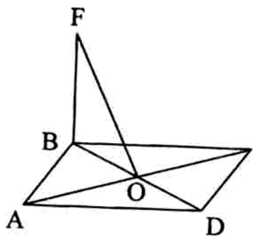
2) биссектрис углов треугольника;

3) серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



7. *В треугольнике ABC AM - медиана, AD - биссектриса, AH- высота. $AF\perp$ (ABC). Тогда расстояние от точки F до прямой BC- это длина отрезка...*

1)FM; 2)FD; 3)FH.

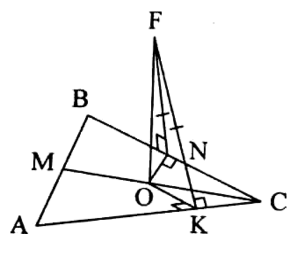


8. ABCD - параллелограмм, $AC\cap BD$ = 0. $FO\perp$ (ABC). FO - расстояние от точки F до прямой AC. Тогда ABCD не может быть...

1) прямоугольником;

2) ромбом;

3) квадратом.



9. Δ ABC. $FK\perp AC$, $FN\perp BC$, FK=FN. $FO\perp$ (ABC), $O\in CM$. Тогда CM-...

1) биссектриса;

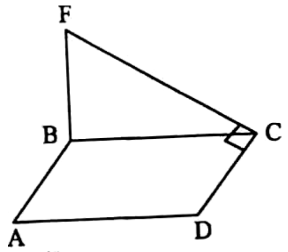
2) медиана;

3) высота.

Вариант 2

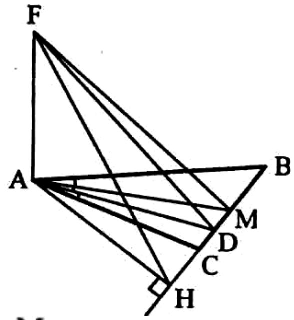
1. Точка М равноудалена от вершин треугольника ABC. Тогда проекция точки М на плоскость ABC есть...

1) точка пересечения высот;
2) центр описанной около Δ ABC окружности;
3) центр вписанной в Δ.ABC окружности.



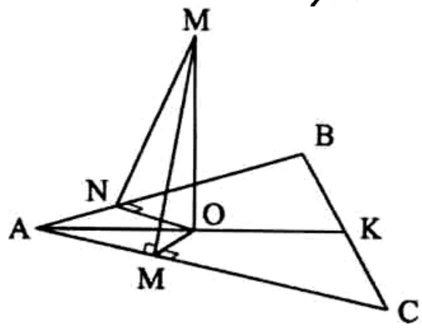
2. ABCD - параллелограмм. BF⊥ (ABC). CF -расстояние от F до прямой CD. Тогда ABCD не может быть...

1) ромбом;
2) квадратом;
3) прямоугольником.



3. В треугольнике ABC AM-медиана, AD - биссектриса, AH- высота. Тогда расстояние от точки F до прямой BC равно длине отрезка...

1) FM;
2) FD;
3) FN.
3) FH.



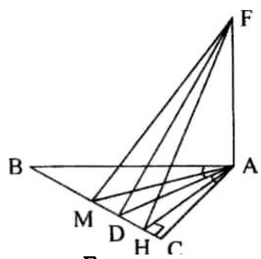
4. Точка М равноудалена от сторон AB и AC треугольника ABC Тогда проекция точки М на плоскость ABC лежит на прямой, содержащей...

1) биссектрису угла A треугольника ABC;
2) медиану, проведённую к стороне BC треугольника ABC
3) высоту, проведённую из вершины A треугольника ABC

5. $ABCA_1 и\ B_1, C_1$- правильная треугольная призма.
$\angle(B\ C_{1,}(AA_1B_1))$=...
1) $\angle B\ C_1B_1$
2) $\angle\ B\ C_1M$;
3) $\angle\ C_1BM$.

6. *Точка М равноудалена от вершин треугольника ABC. Тогда проекция точки М на плоскости С есть точка пересечения...*

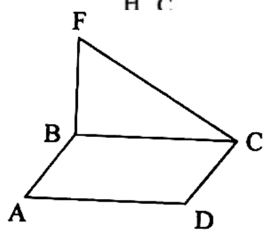
1) высот треугольника;
2) биссектрис углов треугольника;
3) серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



7. *В треугольнике ABC AM - медиана, AD - биссектриса, AH- высота. AF ⊥ (ABC). Тогда расстояние от точки F до прямой BC- это длина отрезка...*
1)FM; 2)FD; 3)FH.

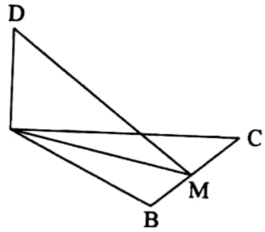
8.BF⊥ (ABC). Прямые CD и CF не будут перпендикулярными, если ABCD будет...

1) прямоугольником;
2) ромбом;



3) квадратом.

9. AD⊥(ABC). Прямые DM и BC будут перпендикулярными, если AM будет...



1) биссектрисой;
2) медианой;
3) высотой.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 62

Название практической работы: *Определение расстояний между прямыми и плоскостями. Вычисление двугранных углов.*

Цель работы: научиться определять меру двугранных углов, расстоянии от прямой до плоскости и между плоскостями.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09

***предметные*:** ПРб 01, ПРб 09, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания:

Понятие о расстоянии от точки до плоскости;

- Понятие о расстоянии между параллельными плоскостями;
- Понятие о расстоянии между прямой и параллельной ей плоскостью;
- Понятие о расстоянии между скрещивающимися прямыми;
- Понятие о двугранном угле.

умения:

- Вычисление расстояний между прямыми и плоскостями.
- Построение линейного угла для соответствующего двугранного.

Ход работы:

Расстоянием от точки до прямой называют длину перпендикуляра проведённого из данной точки к данной прямой. Ведь длина этого перпендикуляра наименьшая среди длин всевозможных отрезков, проведённых из данной точки к данной прямой.

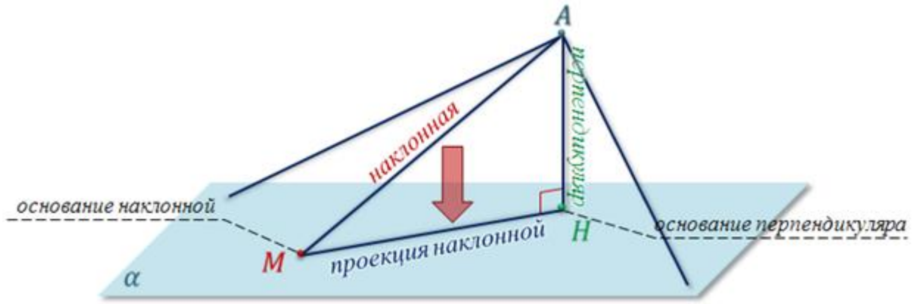
Рассмотрим случай точки и плоскости.

Понятно, что если точка лежит в плоскости, то расстояние между ними равно нулю. Что же на счет случая, когда точка не лежит в плоскости?

Итак, точку с плоскостью можно соединить различными способами. Но среди всех возможных проведённых отрезков можно выделить один особенный. Тот, который перпендикулярен к данной плоскости.

Давайте рассмотрим отрезок перпендикулярный к плоскости и любой из оставшихся.

Если соединить точки пересечения данных отрезков с плоскостью, то тем самым получим треугольник, причём он будет являться прямоугольным.



Действительно, если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой из этой плоскости.

AH называют **перпендикуляром**, проведённым из точки A к плоскости α, а точку H — **основанием перпендикуляра**.

Отрезок AM называю **наклонной к плоскости**, а точку M — **основанием наклонной**.

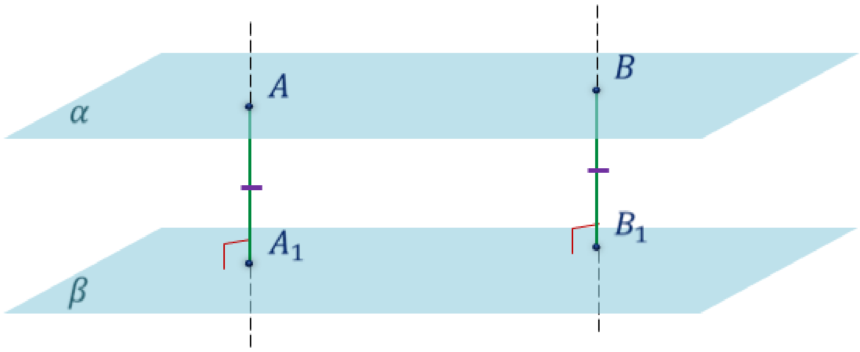
Отрезок HM называют **проекцией наклонной** на плоскость α.

Понятно, что гипотенуза всегда длиннее любого из катетов. Тогда можем сделать вывод, что перпендикуляр, проведённый из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой плоскости.

Тем самым можно утверждать, что расстоянием от точки A до плоскости α является длина перпендикуляра, проведённого из точки A к плоскости α.

Расстояние между параллельными плоскостями:

Рассмотрим параллельные плоскости α и β. В плоскости α отметим две произвольные точки A и B. И проведём перпендикуляры из этих точек к плоскости β.

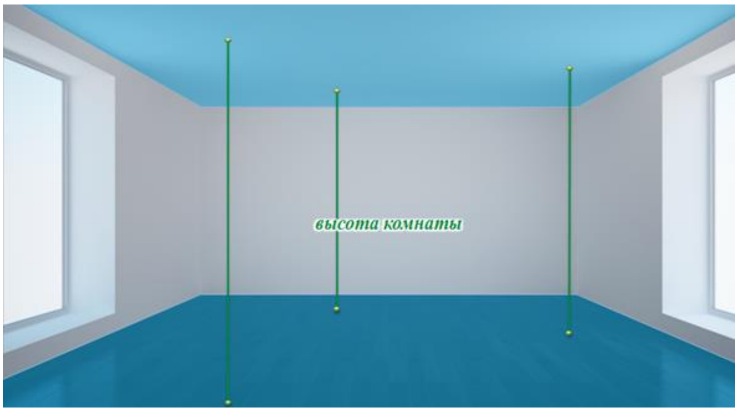


Мы получили отрезки AA_1 и BB_1. Каждый из них перпендикулярен плоскости β, а значит, AA_1 параллельно BB_1.

Можно сказать, что если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости.

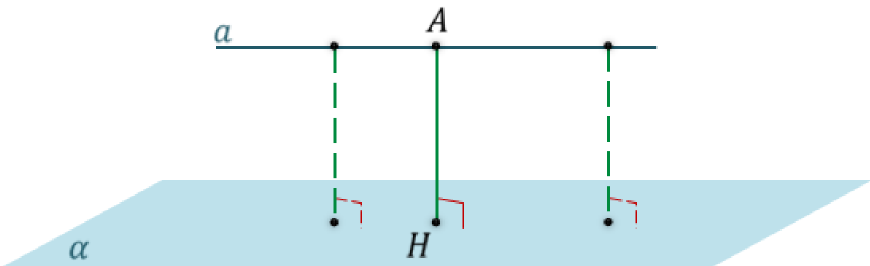
Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется расстоянием между параллельными плоскостями.

Хорошим примером может служить расстояние между плоскостями пола и потолка комнаты. Все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола, это расстояние и является высотой комнаты.



Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью

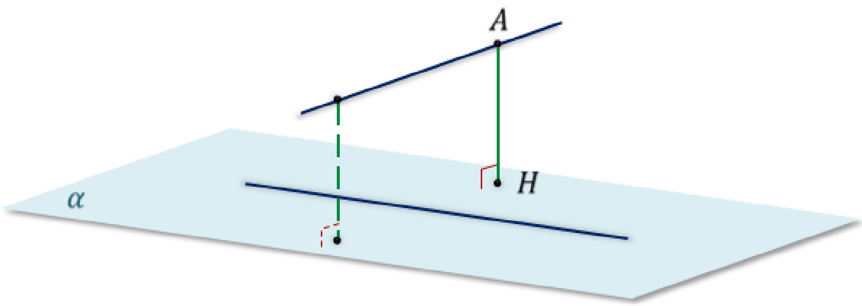
В данном случае на прямой нужно выбрать некоторую точку и провести перпендикуляр к плоскости. Ведь понятно, что все точки прямой равноудалены от данной плоскости.



Таким образом, *расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.*

Две скрещивающиеся прямые

Т.К. через одну из скрещивающихся прямых можно провести плоскость параллельную другой прямой и притом только одну. А определение расстояния между прямой и плоскостью нам уже известно.

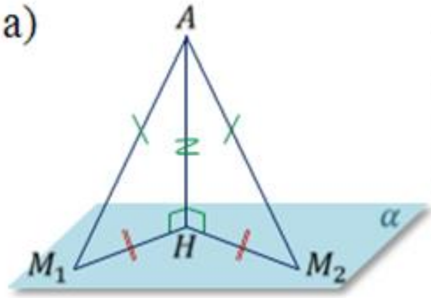


Тогда можно сказать, что *расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется расстоянием между скрещивающимися прямыми.*

Задача. Из некоторой точки плоскости проведены две наклонные. Доказать, что:
а) если наклонные равны, то равны и их проекции;
б) если проекции наклонных равны, то равны и наклонные;
в) если наклонные не равны, то большая наклонная имеет большую проекцию.

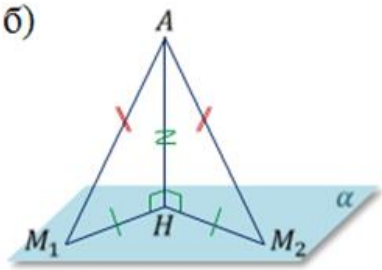
Доказательство.

а)



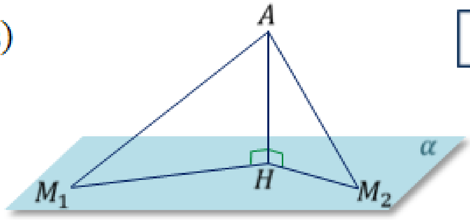
$AM_1 = AM_2$
AH – общий катет
$\Rightarrow \Delta AHM_1 = \Delta AHM_2$
(по катету и гипотенузе)
$HM_1 = HM_2$

б)



$HM_1 = HM_2$
AH – общий катет
$\Rightarrow \Delta AHM_1 = \Delta AHM_2$
(по двум катетам)
$AM_1 = AM_2$

в)



$\boxed{AM_1 > AM_2}$

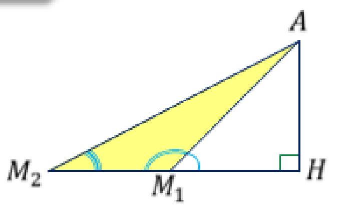
1. $HM_1 \not< HM_2$

   $AM_2 > AM_1$!?

2. $HM_1 \neq HM_2$

   $AM_2 = AM_1$!?

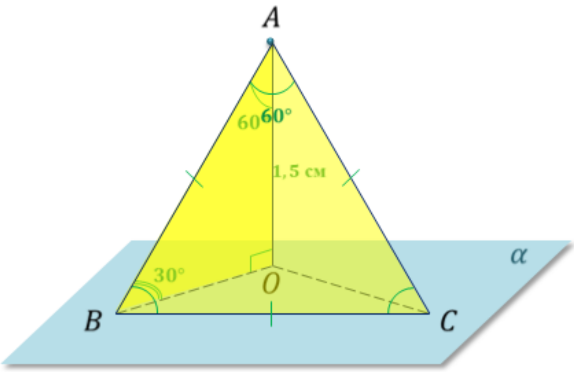
3. $HM_1 > HM_2$



Что и требовалось доказать.

Задача. AO - перпендикуляр к плоскости α, AB=AC наклонные к плоскости α. ∠OAB=∠BAC=60°, AO=1,5 см. Найти расстояние между основаниями наклонных.

Решение.



1. ΔABC:

   $\angle A = 60°,\ AB = AC$

   ΔABC – равнобедренный

   $\angle B = \angle C = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$

   $\Rightarrow \Delta ABC$ – правильный $(BC = AB = AC)$

2. ΔAOB(прямоугольный):

   $\angle A = 60° \Rightarrow \angle B = 30°$

   $AO = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = 2AO$

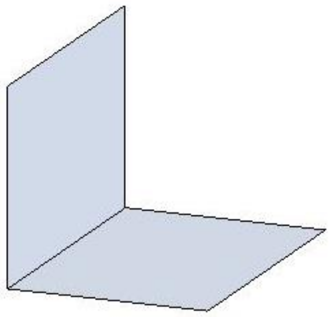
   $AB = 2 \cdot 1{,}5 = 3$ см

3. $BC = AB = 3$ см

Ответ. 3 см.

Двугранный угол

Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.



Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его **гранями**.
Прямая a (общая граница полуплоскостей) называется **ребром** двугранного угла.

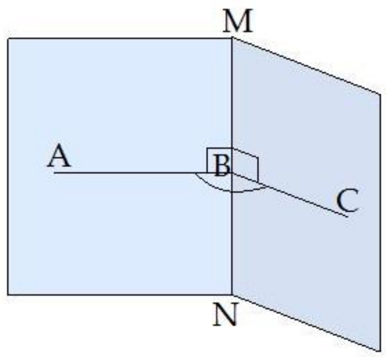
Если на ребре двугранного угла отметить какую-нибудь точку и в каждой грани из этой точки провести луч перпендикулярно к ребру, то образованный этими лучами угол называется **линейным углом** двугранного угла.

Чтобы обозначить линейный угол двугранного угла:

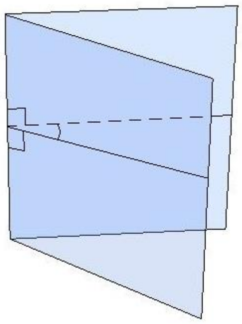
1) необходимо выбрать точку B на ребре двугранного угла NM

2) из B провести
$AB \perp MN$ и $BC \perp MN$

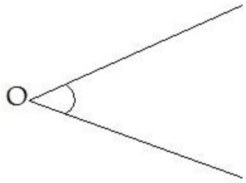
3) угол ABC является линейным углом двугранного угла.



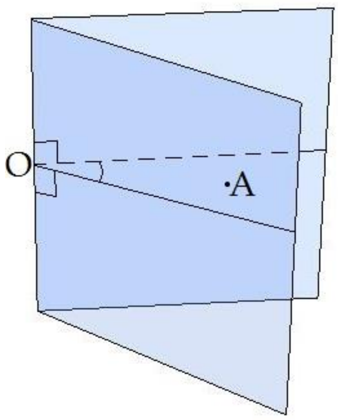
Двугранный угол можно изображать различными способами. Например:



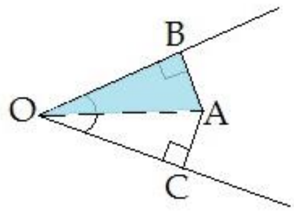
Часто в заданиях используется схематическое изображение двугранного угла:



Пример, в котором выгодно использовать схематическое изображение двугранного угла. Величина двугранного угла равна 60 градусам. Внутри взята точка А, которая находится на равном расстоянии 8 см от обеих граней. Каково расстояние от точки А до ребра двугранного угла?



На этом рисунке будет легче увидеть соотношения в прямоугольных треугольниках.



Задачи для самостоятельного решения:

Вариант 1

1. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AD = 12$ см. Найдите расстояния от концов отрезка AD до прямой BC.
2. Прямая AK перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC, а точка M — середина стороны BC. Докажите, что $MK \perp BC$.
3. Концы отрезка AB лежат на двух параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно d, причем $d < AB$. Докажите, что проекции отрезка AB на эти плоскости равны. Найдите эти проекции, если AB = 13 см, d = 5 см.
4. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что KD - 6 см, $KB = 7$ см, KC - 9 см. Найдите: а) расстояние от точки K до плоскости прямоугольника $ABCD$, б) расстояние между прямыми AK и CD.

Вариант 2

1. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что AB = AC = 5 см, BC = 8 см, AD = 12 см. Найдите расстояния от концов отрезка AD до прямой BC.
2. Прямая AN перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC, а точка K — середина стороны *BC.* Докажите, что K N⊥BC.
3. Концы отрезка *AB* лежат на двух параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно *d,* причем *d* < *AB.* Докажите, что проекции отрезка *AB* на эти плоскости равны. Найдите эти проекции, если *AB* = 5 см, *d* = 3 см.
4. Через вершину *A* прямоугольника *ABCD* проведена прямая *АК,* перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что *KD* - 8 см, *КВ* = 7 см, *КС* - 9 см. Найдите: а) расстояние от точки *К* до плоскости прямоугольника *ABCD,* б) расстояние между прямыми *АК* и *CD.*

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 63

Название практической работы: *Построение куба, параллелепипеда и их сечений*.

Цель работы*:* ознакомление с методами построений сечений куба и параллелепипеда.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания:

– Понятие о кубе, параллелепипеде;
– Понятие о методах построения сечений;

умения:

– Построение куба и параллелепипеда.
– Построение сечений куба и параллелепипеда.

Ход работы:

Задача состоит в построении пересечения двух фигур: многогранника и плоскости (рис.1). Это могут быть: пустая фигура (а), точка (б), отрезок (в), многоугольник (г). Если пересечение многогранника и плоскости есть многоугольник, то этот многоугольник называется *сечением многогранника плоскостью.*

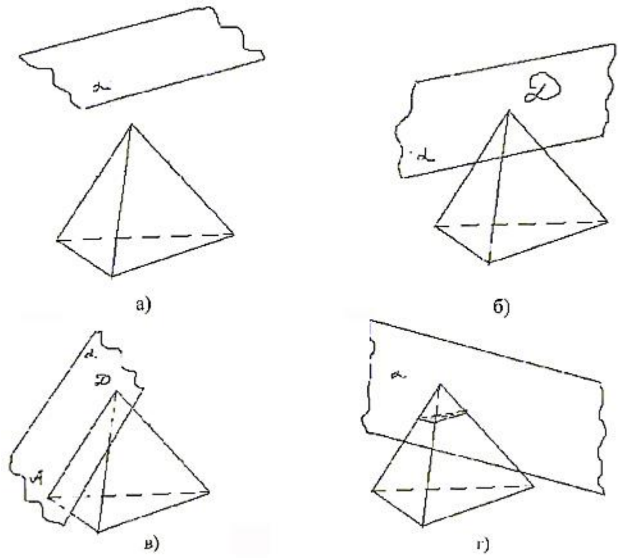


Рис. 1

Будем рассматривать только случай, когда плоскость пересекает многогранник по его внутренности. При этом пересечением данной плоскости с каждой гранью многогранника будет некоторый отрезок. Таким образом, задача считается решенной, если найдены все отрезки, по которым плоскость пересекает грани многогранника.

Исследуйте сечения куба (рис.2) и ответьте на следующие вопросы:

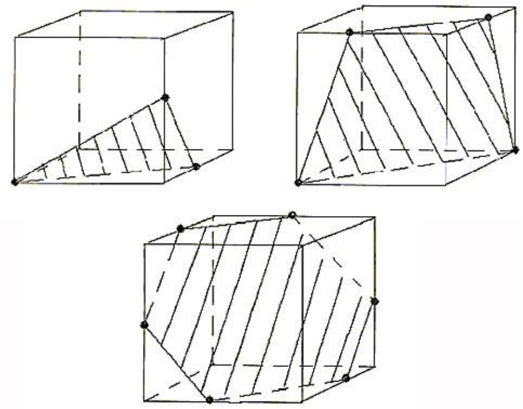


Рис. 2

- какие многоугольники получаются в сечении куба плоскостью? (Важно число сторон многоугольника);

[Предполагаемые ответы: треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник.]

- может ли в сечении куба плоскостью получиться семиугольник? А восьмиугольник и т.д.? Почему?

Метод следов заключается в построении следов секущей плоскости на плоскость каждой грани многогранника. Построение сечения многогранника методом следов обычно начинают с построения так называемого основного следа секущей плоскости, т.е. следа секущей плоскости на плоскости основания многогранника.

Метод вспомогательных сечений построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь ввиду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются “скученными”. Тем не менее в некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным.

Метод следов и метод вспомогательных сечений являются разновидностями *аксиоматического метода* построения сечений многогранников плоскостью.

Суть *комбинированного метода* построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.

А теперь на примере решения задач рассмотрим *метод следов.*

Задача 1.

Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки P, Q, R (точки указаны на чертеже (рис.3)).

Решение.

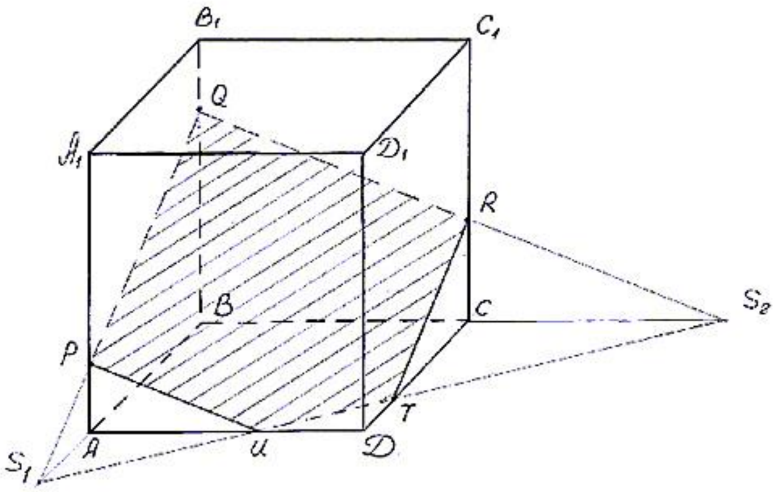


Рис. 3

1. Построим след секущей плоскости на плоскость нижнего основания призмы. Рассмотрим грань AA_1B_1B. В этой грани лежат точки сечения P и Q. Проведем прямую PQ.
2. Продолжим прямую PQ, которая принадлежит сечению, до пересечения с прямой AB. Получим точку S_1, принадлежащую следу.
3. Аналогично получаем точку S_2 пересечением прямых QR и BC.
4. Прямая S_1S_2 - след секущей плоскости на плоскость нижнего основания призмы.
5. Прямая S_1S_2 пересекает сторону AD в точке U, сторону CD в точке T. Соединим точки P и U, так как они лежат в одной плоскости грани AA_1D_1D. Аналогично получаем TU и RT.
6. PQRTU – искомое сечение.

Задача 2.

Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N, P (точки указаны на чертеже (рис.4)).

Решение.

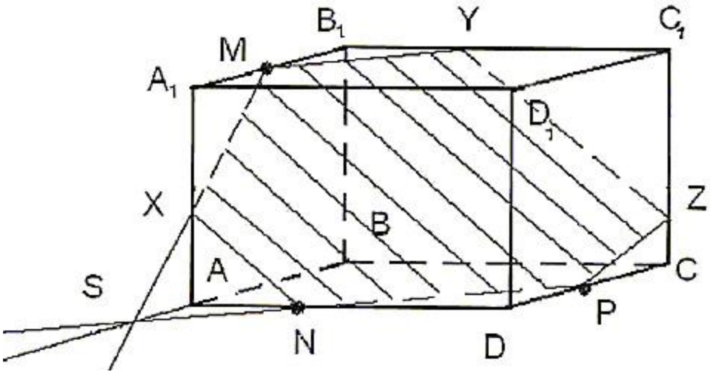
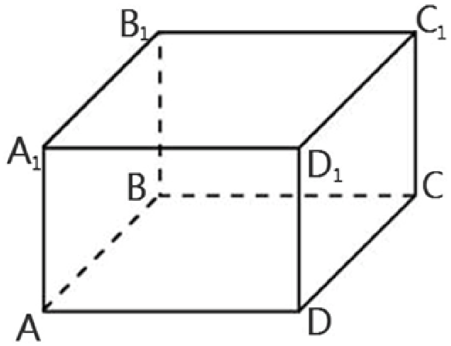


Рис. 4

1. Точки N и P лежат в плоскости сечения и в плоскости нижнего основания параллелепипеда. Построим прямую, проходящую через эти точки. Эта прямая является следом секущей плоскости на плоскость основания параллелепипеда.
2. Продолжим прямую, на которой лежит сторона AB параллелепипеда. Прямые AB и NP пересекутся в некоторой точке S. Эта точка принадлежит плоскости сечения.
3. Так как точка M также принадлежит плоскости сечения и пересекает прямую AA_1 в некоторой точке X.
4. Точки X и N лежат в одной плоскости грани AA_1D_1D, соединим их и получим прямую XN.
5. Так как плоскости граней параллелепипеда параллельны, то через точку M можно провести прямую в грани $A_1B_1C_1D_1$, параллельную прямой NP. Эта прямая пересечет сторону B_1C_1 в точке Y.
6. Аналогично проводим прямую YZ, параллельно прямой XN. Соединяем Z с P и получаем искомое сечение – MYZPNX.

Задачи для самостоятельного решения:



Вариант 1

1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, D, D_1.
2. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, C, D_1
3. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую BB_1 и точку D
4. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую AB и точку C_1

Вариант 2

1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, A_1, C_1
2. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B, D1
3. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую DD_1 и точку B

4. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую AD и точку B1.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 64

Название практической работы: *Вычисление основных элементов куба и параллелепипеда.*

Цель работы: научиться решать стандартные задачи на нахождение и построение.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

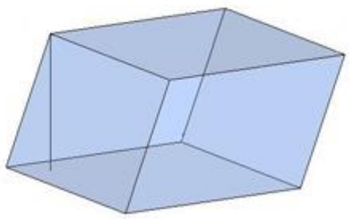
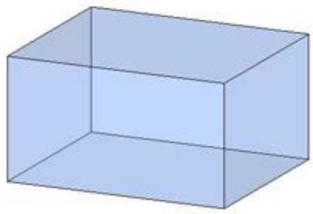
знания: Понятие о кубе, параллелепипеде.

умения: Вычисление основных элементов куба и параллелепипеда.

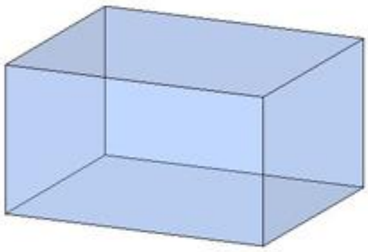
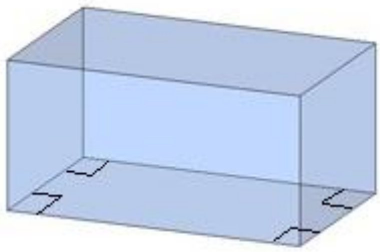
Ход работы:

Параллелепипед - это четырёхугольная призма, все грани которой являются параллелограммами. Параллелепипеды - особая группа призм. Как видно на данных рисунках, объёмные рисунки прямых параллелепипедов практически не отличаются.

Виды параллелепипедов:

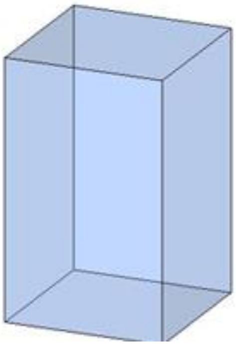
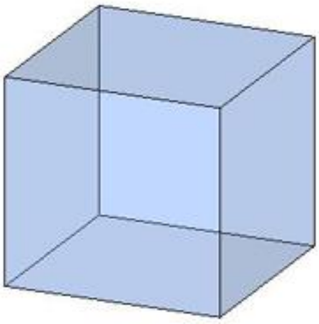
Наклонный  Основание - параллелограмм.	Прямой 

Виды прямых параллелепипедов:

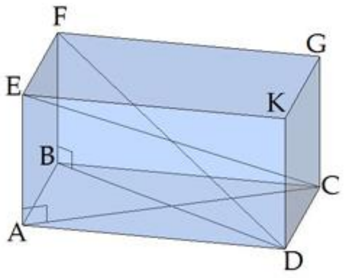
Прямой параллелепипед 	Прямоугольный параллелепипед 

Основание - параллелограмм 	Основание - прямоугольник 

Специальные случаи прямоугольного параллелепипеда:

Правильная четырёхугольная призма 	Куб 
Основание - квадрат, но высота призмы не равна стороне основания. 	Все рёбра куба равны, все грани - квадраты. У куба 12 рёбер и 6 граней. Площадь поверхности куба находится умножением площади одной грани на 6. $S_{куба}=6 \cdot a^2$, где а - ребро куба.

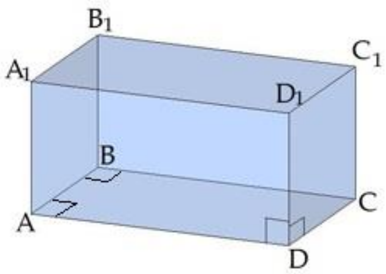
У куба, правильной четырёхугольной призмы, прямоугольного параллелепипеда диагонали равны (DF = EC, т.к. DB = CA), а у параллелепипеда, в основании которого находится параллелограмм, диагонали только попарно равны ($DF \neq EC$, т.к. $DB \neq CA$).



Обратите внимание! Объёмные рисунки прямоугольного и прямого параллелепипедов не отличаются.

Прямая призма, основанием которой является прямоугольник, называется **прямоугольным параллелепипедом.**

Длины трех ребер, имеющих общую вершину, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.



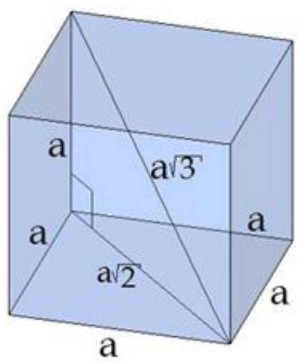
Например,
три измерения - это длины трех ребер DA, DC, DD_1

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений:

$D^2=a^2+b^2+c^2$, где a, b, c - измерения прямоугольного параллелепипеда, т.е., его длина, ширина и высота.
(Подобно теореме Пифагора, только здесь добавляется третье измерение.)

На рисунке: $DB_1^2=DA^2+DC^2+DD_1^2$

Запомните: у прямоугольного параллелепипеда все диагонали равны: $DB_1=CA_1=AC_1=BD_1$



Так как у куба все измерения равны, обозначаем их за **a**, тогда
$\boldsymbol{D^2=a^2+a^2+a^2=3a^2}$.
Упрощаем и получаем формулу диагонали куба:

$$\boldsymbol{D = a\sqrt{3}}$$

Углы, образованные диагоналями призмы и ее гранями:

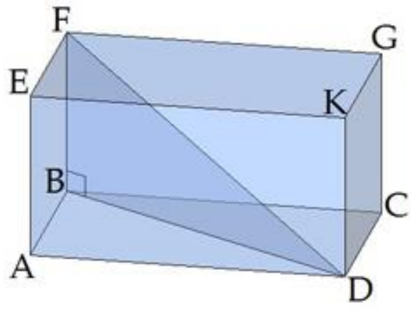
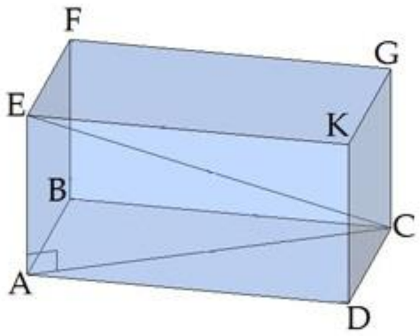
При решении задач очень важно уметь обозначать углы, образованные диагоналями призмы и её боковыми гранями.

Угол между наклонной и плоскостью - это угол между наклонной и её проекцией на эту плоскость.

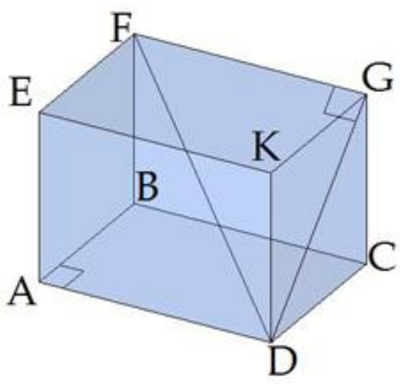
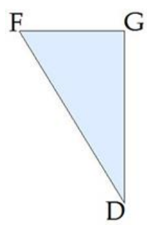
Чтобы найти угол между наклонной и плоскостью, необходимо:

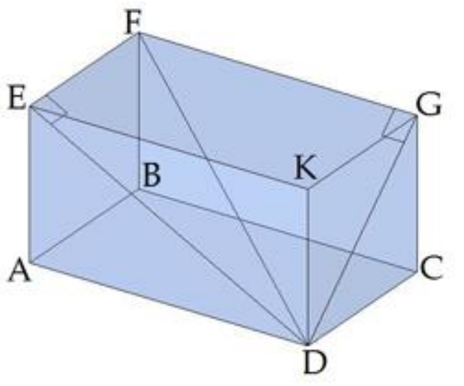
1) провести наклонную;
2) из конца наклонной провести перпендикуляр к плоскости;
3) провести проекцию наклонной;
4) обозначить угол между наклонной и её проекцией.

Угол между диагональю и плоскостью основания в прямом параллелепипеде:

	Угол BDF - угол, образованный меньшей диагональю DF и плоскостью основания ABCD (обычно на изображении параллелепипеда меньшая диагональ (DB) та, которая выглядит меньше). Треугольник DBF - прямоугольный.
	Угол ECA - угол, образованный большей диагональю EC и плоскостью основания ABCD Треугольник ECA - прямоугольный.

Угол между диагональю и боковой гранью прямоугольного параллелепипеда

	Угол FDG - угол, образованный диагональю FD и боковой гранью DKGC. Обратите внимание: ребро прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно боковой грани, поэтому треугольник DFG -прямоугольный. 

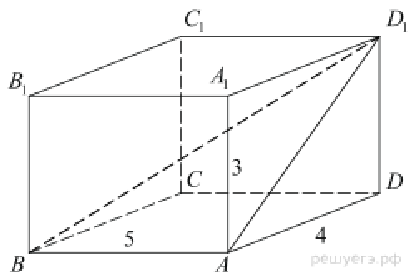


Угол FDE - угол, образованный диагональю FD и боковой гранью AEKD Обратите внимание: ребро прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно боковой грани, поэтому треугольник FDE - прямоугольный.

Задачи для самостоятельного решения:

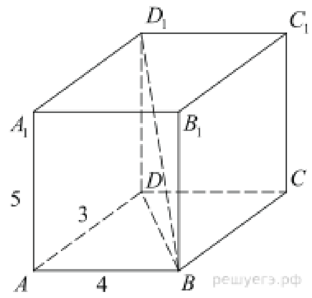
1. Вычислите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его длина равна 16 см, ширина - 8 см и высота - 2 см.

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда с плоскостью основания образует угол 45°, стороны основания равны 12 и 16 см. Вычислите высоту параллелепипеда.



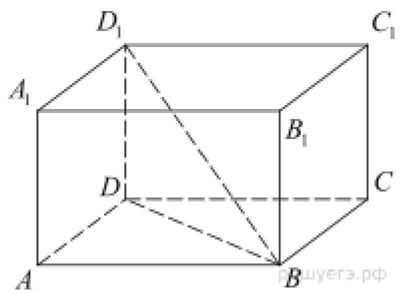
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра AA_1, точка L — середина ребра A_1D_1, точка M — середина ребра A_1B_1. Найдите угол MLK.

4. Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$.



5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что AB = 4, AD = 3, AA_1 = 5. Найдите угол DBD_1.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1 = 3$, $CD = 2$, $AD = 2$. Найдите длину ребра AA_1.



7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DD_1 = 1$, $CD = 2$, $AD = 2$. Найдите длину диагонали CA_1

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB = 2$, ребро $AD = \sqrt{5}$, ребро $AA_1 = 2$. Точка K — середина ребра BB_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и K.

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 24$, $AD = 10$, $AA_1 = 22$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, A_1 и C.

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 8$, $AD = 6$, $AA_1 = 21$. Найдите синус угла между прямыми CD и A_1C_1.

11. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: AB = 3, AD = 5, AA_1 = 12. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 65

Название практической работы: *Построение прямой и наклонной призмы и их сечений.*

Цель работы: ознакомление с методами построений сечений призм.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания:

– Понятие о призмах.

– Понятие о методах построения сечений.

умения:

– Построение призм.

– Построение сечений призм.

Ход работы:

Призма - это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, находящимися в параллельных плоскостях, а остальные грани - параллелограммами.

Грани, которые находятся в параллельных плоскостях, называются основаниями призмы, а остальные грани - боковыми гранями призмы.

В зависимости от основания призмы бывают треугольными (рис. 1), четырёхугольными (рис. 2 и 3), шестиугольными (рис. 4) и др.

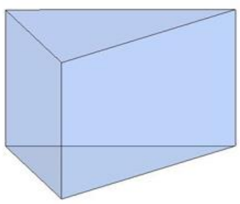


Рис. 1.

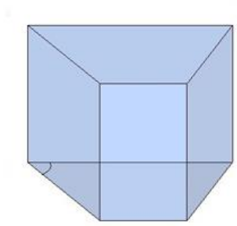


Рис. 2.

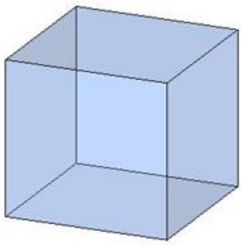


Рис. 3.

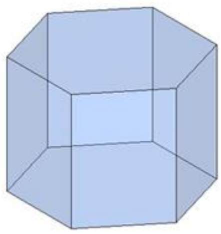


Рис. 4.

Призма с боковыми рёбрами, перпендикулярными её основаниям, называется прямой призмой (рис. 1 - 4).

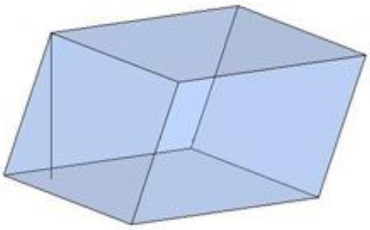


Рис. 5.

Призма, боковые рёбра которой не перпендикулярны основаниям, называется наклонной призмой (рис. 5).

Расстояние между основаниями призмы называется **высотой призмы**.

Высота прямой призмы совпадает с боковым ребром.

Высота наклонной призмы видна на рис. 5. Без дополнительных условий невозможно определить, в какую точке проектируется высота наклонной призмы.

Прямая призма называется правильной, если её основания - правильные многоугольники.

Диагонали и диагональное сечение призмы:

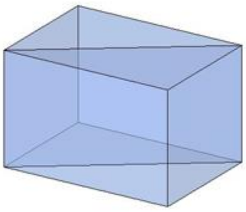
Диагональ призмы - это отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани.

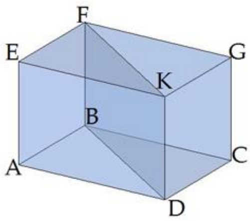
Диагональ не существует только у треугольной призмы.

Если диагонали основания прямой призмы равны, то диагонали самой призмы тоже равны.

Диагональное сечение призмы - это сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.

Каждое диагональное сечение содержит две диагонали призмы.

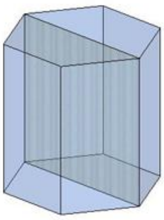


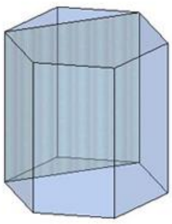


Диагональное сечение наклонной призмы - параллелограмм.

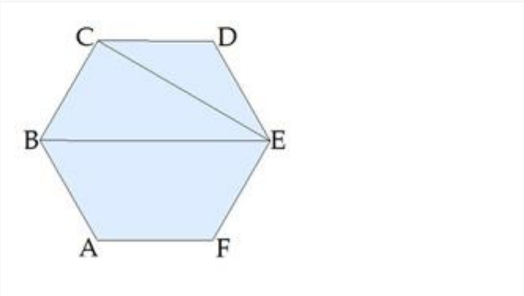
Запомните!

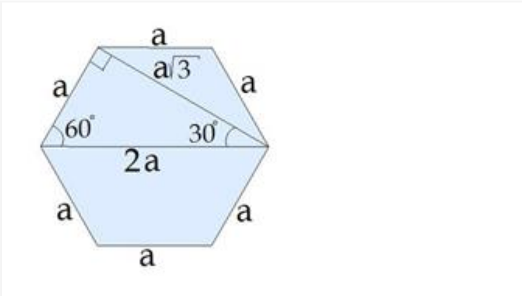
У правильного шестиугольника диагонали бывают 2 видов - короткие и длинные. В связи с этим существует два вида диагональных сечений шестиугольной призмы:





Как найти диагонали правильного шестиугольника, если известна длина его стороны?
CE - одна из коротких диагоналей шестиугольника, BE - одна из длинных диагоналей. Учитывая то, что углы правильного шестиугольника равны по 120 градусов, легко найти прямоугольный треугольник, в котором есть угол 30 градусов, и использовать соотношения в этом треугольнике.



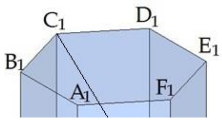


Диагональное сечение прямой призмы является прямоугольником.

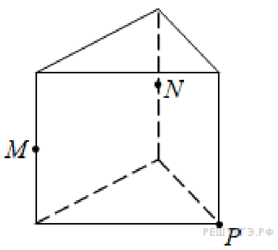
Угол, образованный диагональю и плоскостью основания правильной шестиугольной призмы

Задачи для самостоятельного решения:

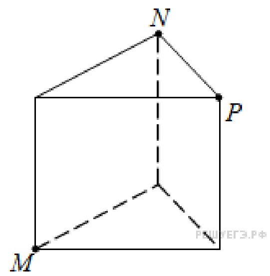
1.



Угол $CFC1$ - угол, образованный большей диагональю призмы и плоскостью основания ABCDEF.
Треугольник $CFC1$ - прямоугольный

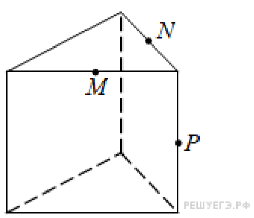


Постройте сечение треугольной призмы, проходящее через точки M, N и P. Для случая, когда все рёбра призмы равны, определите вид четырёхугольника, являющегося сечением.



2. Постройте сечение треугольной призмы, проходящее через точки M, N и P. Для случая, когда все рёбра призмы равны, определите вид четырёхугольника, являющегося сечением.

3. Постройте сечение треугольной призмы, проходящее через точки M, N и P. Для случая, когда все рёбра призмы равны, определите вид четырёхугольника, являющегося сечением.



4. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

б) Найдите периметр этого сечения.

5. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой стороны основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M — середина ребра AC, а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.

а) Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.

б) Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 66

Название практической работы: *Вычисление основных элементов призмы.*

Цель работы: научиться вычислять основные элементы призмы.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания: Понятие о призме и её основных элементах.

умения: Построение призм и их основных элементов.

Ход работы:

Используя теоретический материал практической работы № 68, решите следующие задания.

Задачи для самостоятельного решения:

1. В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро и высоту основания равна $12\sqrt{3}$, сторона основания 4. Найти боковое ребро.

2. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ основание ABC: $AB=AC=10$; $BC=12$; $AA_1=15$. Найти площадь сечения, проходящего через точку A_1и противоположную ей сторону нижнего основания.

3. Основание прямоугольного параллелепипеда ромб с диагоналями 10 и 24. Высота параллелепипеда 10. Найти большую диагональ параллелепипеда.

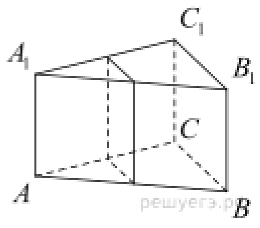
4. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 и 3 и углом 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней 35. Найдите площадь боковой поверхности.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками B и E.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол DAB..

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 8, найдите угол между прямыми FA и D_1E_1..

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 2, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.



ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 67

Название практической работы: *Построение пирамиды и ее сечений.*

Цель работы: научиться строить пирамиду и её сечения.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

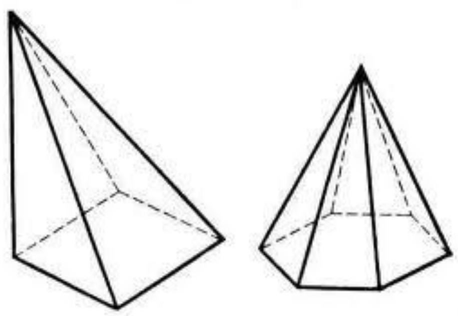
знания: Понятие о пирамидах и их основных элементах, сечениях пирамиды.

умения: Построение сечений пирамиды.

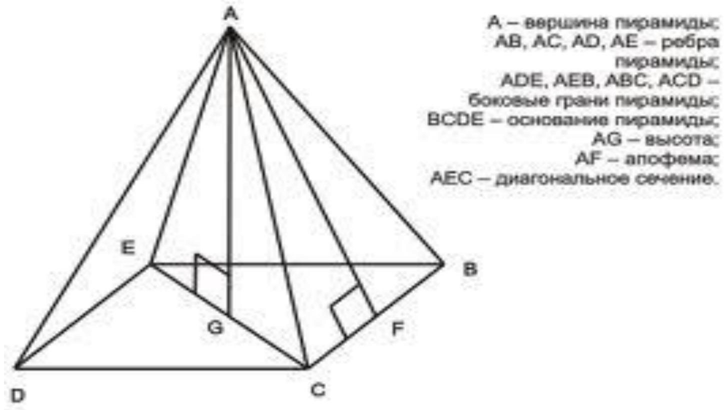
Ход работы:

Пирамида — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т. д.

наклонная *прямая*



Элементы пирамиды



Апофема — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины [ℓ];

боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;

боковые ребра — общие стороны боковых граней;

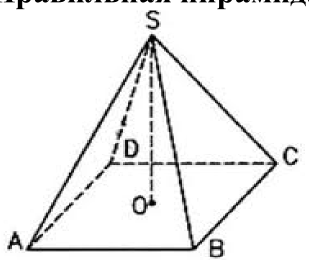
вершина пирамиды — точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;

высота — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра) (H);

диагональное сечение пирамиды — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;

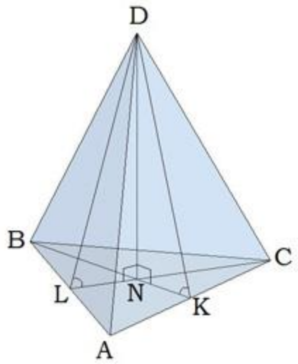
основание — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды.

Правильная пирамида

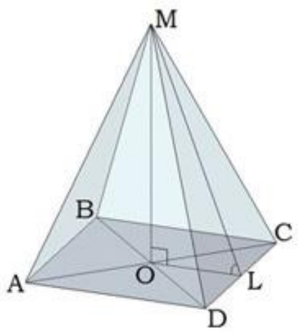


Пирамида называется *правильной*, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. Тогда она обладает такими свойствами: боковые ребра правильной пирамиды равны; в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники; в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около неё сферу;

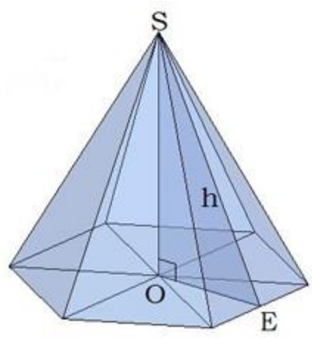
Правильная треугольная пирамида, у которой все рёбра равны, называется тетраэдром.



Правильная треугольная пирамида

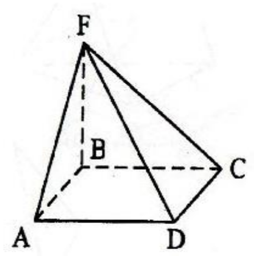


Правильная четырёхугольная пирамида



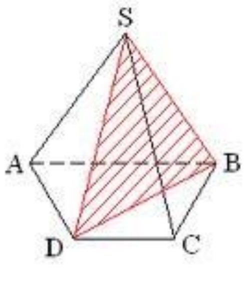
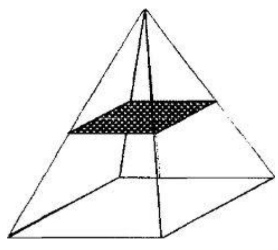
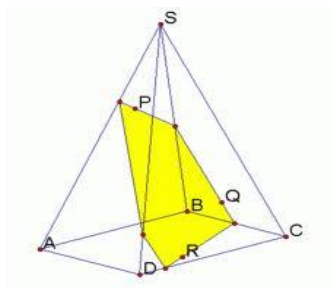
Правильная шестиугольная пирамида

Прямоугольная пирамида



Пирамида называется *прямоугольной*, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.

Сечения пирамиды:

		
диагональное сечение	сечение плоскостью, параллельной основанию	сечение плоскостью, проходящей под углом к основанию

Задачи для самостоятельного решения:

1. В правильной четырехугольной пирамиде *PABCD*, все ребра которой равны 4, точка *K* — середина бокового ребра *AP*.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку *K* и параллельной прямым *PB* и *BC*.

б) Найдите площадь сечения.

2. Основанием прямой четырехугольной призмы *ABCDA'B'C'D'* является квадрат *ABCD* со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}.$ Точка *K* — середина ребра *BB'*. Через точки *K* и *C'* проведена плоскость α, параллельная прямой *BD'*.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида *MABCD*, все рёбра которой равны 12. Точка *N* — середина бокового ребра *MA*, точка *K* делит боковое ребро *MB* в отношении 2 : 1, считая от вершины *M*.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки *N* и *K* параллельно прямой *AD*, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

4. В основании правильной пирамиды *PABCD* лежит квадрат *ABCD* со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину *B* и середину ребра *PD* перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

5. В основании правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* лежит квадрат *ABCD* со стороной 6. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер *MA* и *MB* проведена плоскость α, параллельная ребру *MC*.

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды *MABC* является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды *MABC* плоскостью α.

6. В правильном тетраэдре *ABCD* точки *K* и *M* — середины рёбер *AB* и *CD* соответственно. Плоскость α содержит прямую *KM* и параллельна прямой *AD*.

а) Докажите, что сечение тетраэдра плоскостью α — квадрат.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра *ABCD* плоскостью α, если $AB = 2\sqrt{3}.$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 68

Название практической работы: *Вычисление основных элементов пирамиды.*

Цель работы: научиться вычислять основные элементы пирамиды.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания:

- Понятие о пирамидах и их основных элементах.
- Понятие о сечениях пирамиды.

умения: Вычисление основных элементов пирамиды.

Ход работы:

1. *Пирамида с равными боковыми ребрами:*

Если боковые рёбра пирамиды с плоскостью основания образуют равные углы, то рёбра пирамиды равны, и вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около многоугольника основания.

Чтобы было легче запомнить, можно представить вид пирамиды сверху (см. рис.1).

Проекции рёбер равны, через их концы можно провести окружность.

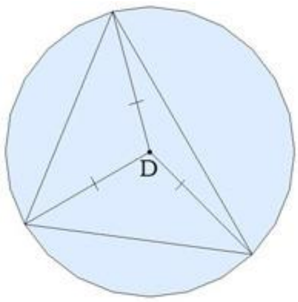


рис.1

У пирамиды могут быть равны боковые рёбра тогда, когда около многоугольника основания можно описать окружность.

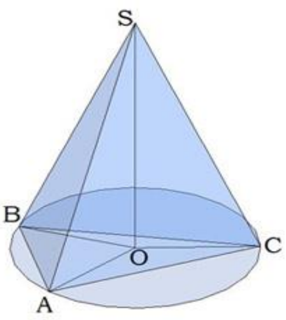


Рис. 2

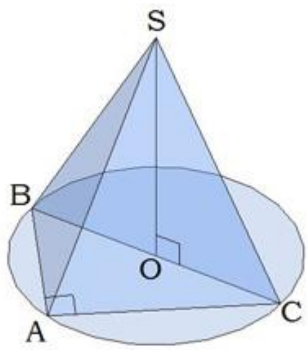


Рис. 3

Главные зависимости для многоугольников, около которых можно описать окружность

Многоугольник, около которого можно описать окружность	**Центр описанной окружности**	**Формулы**
произвольный треугольник (рис.2)	точка пересечения серединных перпендикуляров	$R = \frac{abc}{4S} \quad \frac{a}{sin\alpha} = 2R$ где a,b,c - стороны треугольника
равнобедренный треугольник	точка пересечения серединных перпендикуляров, находится на высоте, проведенной к основанию	$R = \frac{abc}{4S} \quad \frac{a}{sin\alpha} = 2R$

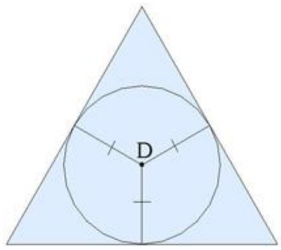
прямоугольный треугольник (рис.3)	середина гипотенузы	R - половина гипотенузы
прямоугольник	точка пересечения диагоналей	R - половина диагонали

Если основание - правильный многоугольник и все боковые грани равны, то пирамида является правильной.

2. *Пирамида с равными двугранными углами при основании:*

Если боковые грани пирамиды с её основанием образуют равные двугранные углы, то все высоты боковых граней пирамиды равны (у правильной пирамиды это апофемы), и вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в многоугольник основания.

Чтобы легче это запомнить, можно представить, что смотрите на пирамиду сверху
(см. рисунок).
Проекции высот боковых граней пирамиды равны, через их концы можно вписать окружность.



У пирамиды могут быть равные двугранные углы при основании тогда, когда в многоугольник основания можно вписать окружность.

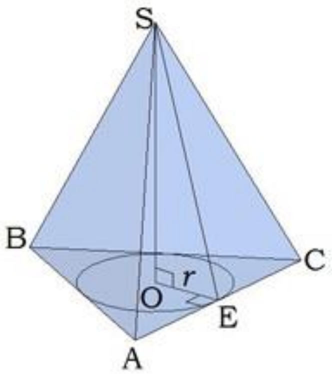


Рис. 2

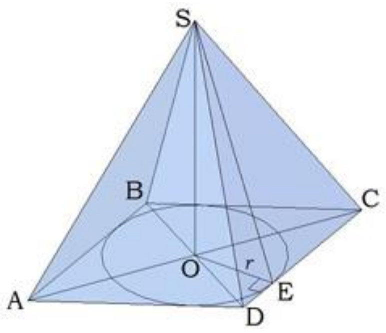


Рис. 3

Отмечая радиус r на рисунке, нужно быть очень внимательным! Радиус вписанной окружности перпендикулярен стороне. Например, в произвольном треугольнике он не находится на биссектрисе (рис.2) и в ромбе не параллелен стороне (рис.3).

Главные зависимости для многоугольников, в которые можно вписать окружность

Многоугольник	Центр вписанной окружности	Формулы
любой треугольник (рис.2)	точка пересечения биссектрис	$r = \frac{S_{\Delta}}{p}$ где p - полупериметр
ромб (рис.3)	точка пересечения диагоналей	$r = \frac{S_{\text{ромба}}}{p}$ r - половина высоты ромба

Задачи для самостоятельного решения:

1.Высота правильной треугольной пирамиды равна $a\sqrt{3}$; радиус окружности, описанной около ее основания, 2a. Найдите: а) апофему пирамиды; б) угол между боковой гранью и основанием; в) плоский угол при вершине пирамиды.

2. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 2a. Высота пирамиды равна $a\sqrt{3}$. Найдите: а) сторону основания пирамиды; б) угол между боковой гранью и основанием; в) расстояние от центра основания пирамиды до плоскости боковой грани.

3. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Высота пирамиды равна 12 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.

4. Основание пирамиды - ромб с диагоналями 10 и 18 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Меньшее боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите большее боковое ребро пирамиды.

5. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.

6. Основанием пирамиды DABC является прямоугольный треугольник ABC, у которого гипотенуза AB равна 29 см, катет AC равен 21 см. Ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 69

Название практической работы: *Исследование симметрии в многогранниках. Построение правильных многогранников.*

Цель работы: научиться строить правильные многогранники и исследовать в них симметрию.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания:

– Понятие о многогранниках и их основных элементах.

– Понятие о симметрии.

умения: Определение симметричных элементов в многогранниках.

Ход работы:

1. Записать определение правильного многогранника.

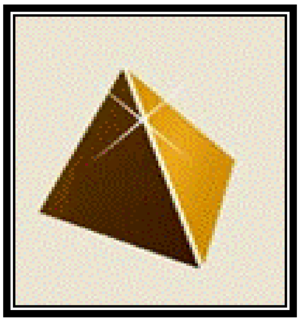
Многогранник называется правильным, если его грани - ………… .... многоугольники и в каждой вершине сходится дно и то же число ……………………..

2. Перечислить свойства правильного многогранника:

А) все ребра правильного многогранника ……………………….. …………………………………………………………………………..

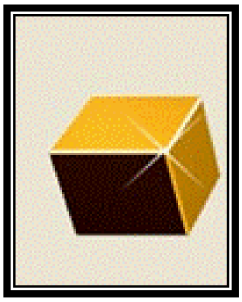
Б) все двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром - …………………………………………………………………………..

3. Перечислить правильные многогранники



А) …………………………………………..

Грани - …………………………………………………………..

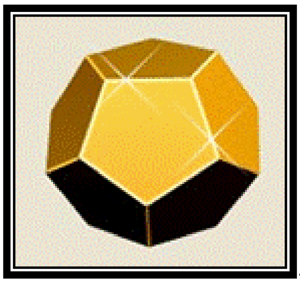


Б) …………………………………………..

Грани - …………………………………………………………..

В) …………………………………………..

Грани - …………………………………………………………..



Г) …………………………………………..

Грани - …………………………………………………………..

Д) …………………………………………..

Грани - …………………………………………………………..

Угол правильного $\boldsymbol{n}$-угольника равен $\alpha = \frac{180^0(\ldots\ldots\ldots)}{\ldots\ldots}$

	Правильный $\boldsymbol{n}$-угольник			
	$\boldsymbol{n} = 3$	$\boldsymbol{n} = 4$	$\boldsymbol{n} = 5$	$\boldsymbol{n} = 6$
Градусная мера угла правильного $\boldsymbol{n}$-угольника				

Пусть при вершине сходится $\boldsymbol{n}$ ребер, тогда плоских углов при этой вершине ….., причем они все …………….. между собой.

Пусть один из углов из этих плоских углов равен $\boldsymbol{x}$, тогда сумма плоских углов при вершине ………, и по свойству многогранного угла получим $\boldsymbol{nx}$….. 360^0, откуда х …......

	Количество плоских углов при одной вершине				
	3	4	5	6	7
Градусная мера одного угла меньше					

<u>Задание 1:</u> Доказать, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и $\boldsymbol{n}$-угольники при $\boldsymbol{n}\geq 6$.

Доказательство:

Угол правильного $\boldsymbol{n}$-угольника при $\boldsymbol{n}\geq 6$ не меньше $\ldots\ldots^0$. С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее ……плоских углов. Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани - …………………… $\boldsymbol{n}$-угольники при $\boldsymbol{n}\geq 6$, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше …………………………..

По свойству многогранного угла: сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника ………………………..

Вывод: ……………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………

<u>Задание 2:</u> Доказать, что существует всего 5 правильных многогранников

Доказательство:

Форма граней	Градусная мера плоского угла	Число ребер при одной вершине	Сумма плоских углов при одной вершине	Противоречит ли теореме о сумме плоских углов многогранного угла	Число граней такого многогранника	Название правильного многогранника
Правильный треугольник		3				
		4				
		5				
		6				
Правильный четырехугольник (………….)		3				
		4				
Правильный пятиугольник		3				
		4				

Вывод: …………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………….

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 70

Название практической работы: *Построение усеченной пирамиды и вычисление ее основных элементов.*

Цель работы: : научиться строить усечённую пирамиду и вычислять её основные элементы.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

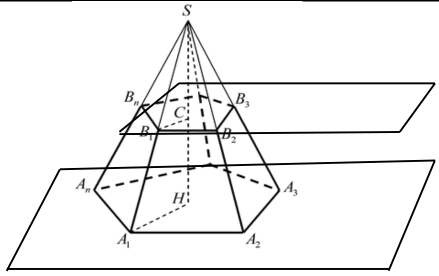
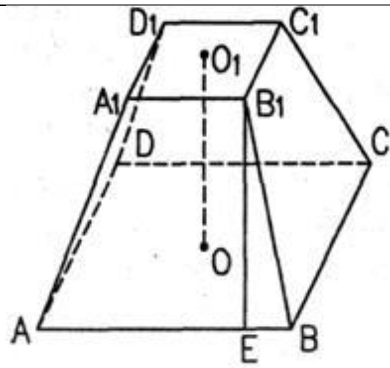
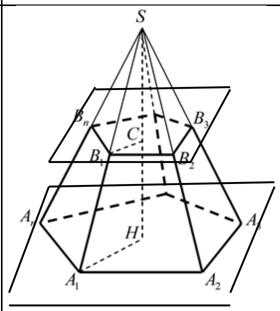
***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02

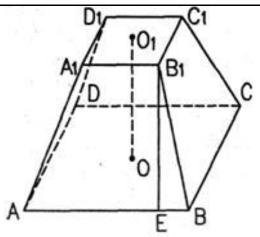
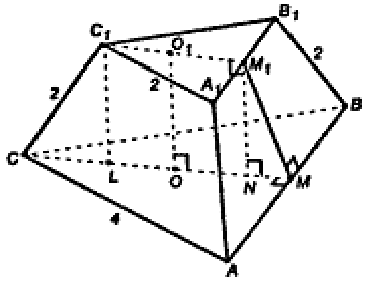
***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания: Понятие о усечённых пирамидах и их основных элементах.

умения: Вычисление основных элементов усечённой пирамиды.

Ход работы:

1.Изобразим произвольную пирамиду $SA_1\ A_2\ldots A_n$. 2. Проведём секущую плоскость параллельно основанию, пересекающую боковые рёбра пирамиды в точках $B_1\ B_2\ldots\ B_n$. 3.Секущая плоскость разбила пирамиду на два многогранника, один из которых так же является пирамидой., а другой называется **усечённой пирамидой.**	
Итак, **усечённой пирамидой** называется многогранник, гранями которого являются многоугольники $A_1\ A_2\ldots\ A_n$ и $B_1\ B_2\ldots B_n$(**верхнее и нижнее основания**), расположенных на параллельных плоскостях и четырёхугольников $A_1\ A_2\ B_1\ B_2$, $A_2\ A_3\ B_2\ B_3$,…$A_{n-1}\ A_n\ B_{n-1}\ B_n$(**боковые грани**). Отрезки, соединяющие вершины оснований называются **боковыми рёбрами** усечённой пирамиды. На чертеже изображена усечённая пирамида $ABCDA_1\ B_1\ C_1\ D_1$. **Высотой** пирамиды называется перпендикуляр, проведённый из любой точки основания к плоскости другого.	 $ABCDA_1\ B_1\ C_1\ D_1$-усечённая пирамида. ABCD и $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$–основания $A\ A_1B_1\ B$-боковая грань $A\ A_1$-боковое ребро OO_1-высота
Рассмотрим боковую грань $A_1\ A_2\ B_1\ B_2$ усечённой пирамиды . Стороны $A_1\ A_2$ и $B_1\ B_2$ параллельны, так как принадлежат параллельным прямым, по которым плоскость $S\ A_1\ A_2$ пересекается с параллельными плоскостями альфа и бета. Стороны $A_1\ B_1$ и $A_2\ B_2$ не параллельны, так как их продолжения пересекаются в точке S. Таким образом мы доказали, что боковая грань правильной усечённой пирамиды $A_1\ A_2\ B_1\ B_2$ -является **трапецией**. Очевидно, что все боковые грани усечённой пирамиды являются трапециями.	 β α (желательно сопоставлять объекты чертежа со словами, можно анимацией либо просто выделять)
Если усечённая пирамида получена путём сечения параллельно основанию правильной	

пирамиды, то усеченная пирамида будет так же **правильной**. Основания правильной усечённой пирамиды – это правильные многоугольники, а боковые грани- **равнобедренные трапеции**. Высота боковой грани называется **апофемой**.	 A A_1B_1 B- равнобедренная трапеция. B_1E-апофема.
Применим свои знания при решении задач: **Задача 1.** Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 4 дм и 2 дм. Точки O и O_1-центры оснований пирамиды. Найти высоту и апофему пирамиды, если боковое ребро равно 2 дм. Для начала проведём краткий анализ задачи: так как усечённая пирамида правильная, то боковые рёбра-равные равнобедренные трапеции. В основании лежат правильные треугольники, значит все углы этих треугольников будут по 60 градусов. Решение: 1. Дополнительное построение: построим CM перпендикулярно AB, C_1M_1 перпендикулярно A_1B_1 и соединим точки M_1 и M. По теореме о трёх перпендикулярах M_1M перпендикулярен AB(одновременно M_1M перпендикулярна A_1B_1), значит M_1M-апофема. 2. Поскольку точки O и O_1-центры оснований пирамиды, то OO_1-высота h. Дополнительное построение: построим C_1L перпендикулярно CM и M_1 N так же перпендикулярно CM. Тогда $C_1L= OO_1= M_1N=h$(как расстояния между параллельными прямыми). 3.Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$-правильные, значит OC и O_1C_1-радиусы описанных окружностей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Найдем OC и O_1C_1по формуле для нахождения радиуса описанной окружности	 <u>Дано:</u> $ABCA_1B_1C_1$-усечённая пирамида, AB=BC=AC=4 дм, $A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1=2$ дм, $AA_1=2$ дм <u>Найти:</u> высоту, апофему <u>Решение:</u> 1.Д.п. $CM\perp AB$, $C_1M_1\perp A_1B_1 \rightarrow M_1M\perp AB$ и $M_1M\perp A_1B_1$(по т.т.п.) M_1M-апофема. 2. OO_1-высота h. Д.п. $C_1L\perp CM$, $M_1N\perp CM$. $C_1L= OO_1= M_1N=h$(как расстояния между параллельными прямыми). 3.Δ ABC и Δ $A_1B_1C_1$-правильные→ OC и O_1C_1-радиусы описанных окружностей. $OC=\frac{AB}{2\sin 60^0}=\frac{4}{2*\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ дм $O_1C_1=\frac{A_1B_1}{2\sin 60^0}=\frac{2}{2*\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ дм 4.

4.Найдем длину отрезка CL как разность между длинами отрезков OC и O_1C_1:	$CL= OC- O_1C_1= \frac{4}{\sqrt3} - \frac{2}{\sqrt3} = \frac{2}{\sqrt3}$ дм
5.Из прямоугольного треугольника CC_1L найдём C_1 L по теореме Пифагора:	5.Δ CC_1L-прямоугольный, по теореме Пифагора: Так как $C_1L= OO1=h$, следовательно высота h равна $\underline{2\sqrt6}$ дм $C_1\ L=\sqrt{CC_1^2- CL^2}=\sqrt{2^2-\frac{(2)^2}{(\sqrt3)^2}}=\frac{\sqrt8}{\sqrt3} =\frac{2\sqrt6}{3}$ дм
6. По определению синуса из прямоугольного треугольника A_1 C_1 M найдём длину отрезка C_1M_1: Длину отрезка O_1M_1 найдем как разность длин отрезков C_1M_1 и C_1O_1:	6. $C_1M_1=A_1C_1*\sin60^0=2*\frac{\sqrt3}{2} =\sqrt3$ дм $O_1M_1= C_1M_1- C_1O_1=\sqrt3-\frac{2}{\sqrt3}=\frac{1}{\sqrt3}$ дм
7.Из прямоугольного треугольника ACM по определению синуса найдём длину отрезка CM: Из разности отрезков CM и CO найдем длину OM:	7. $CM=AC*\sin60^0=4*\frac{\sqrt3}{2} =2\sqrt3$ дм $OM= CM – CO=2\sqrt3-\frac{4}{\sqrt3} =\frac{2}{\sqrt3}$ дм
8. Рассмотрим прямоугольный треугольник M_1NM и найдем длину отрезка M_1M по теореме Пифагора: Здесь неизвестна длина отрезка MN. Её можно найти как разность длин отрезков OM и ON: MN= OM – ON. В свою очередь $ON= O_1\ M_1=\frac{1}{\sqrt3}$ дм, так как O_1 M_1 NO-прямоугольник.	8.Δ M_1NM-прямоугольный, по теореме Пифагора: $M_1M=\sqrt{h^2+MN^2}$ MN= OM – ON. $ON= O_1\ M_1=\frac{1}{\sqrt3}$ дм, так как O_1 M_1 NO-прямоугольник. $MN= OM – ON= OM- O_1\ M_1=\frac{2}{\sqrt3} - \frac{1}{\sqrt3} =\frac{1}{\sqrt3}$ $M_1M=\sqrt{h^2+MN^2}$ $M_1M==\sqrt{\frac{(2\sqrt3)^2}{(3)^2} +\frac{1}{(\sqrt3)^2}} =\sqrt{\frac{8}{3} +\frac{1}{3}} =\sqrt{\frac{9}{3}}=\sqrt3$ <u>Ответ:</u> $M_1M=\sqrt3$ дм, $O_1O=\frac{2\sqrt6}{3}$ дм

Задачи для самостоятельного решения:

1. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды.

2. Основание пирамиды - прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите высоту пирамиды.

3. У четырехугольной усечённой пирамиды стороны одного основания равны 6, 7, 8, 9 см, а меньшая сторона другого основания равна 5 см. Найдите остальные стороны этого основания.

4. В правильной треугольной пирамиде с высотой h через сторону основания a проведена плоскость, пересекающая противолежащая противолежащее боковое ребро под прямым углом. Найдите площадь сечения.

5. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и две данные точки на её основании.

6. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны оснований 3 см и 5 см. Найдите диагональ этой пирамиды.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 71

Название практической работы: *Построение цилиндра и его сечений.*

Цель работы: научиться строить цилиндры и их сечения

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные: ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания: Понятие о цилиндрах и их основных элементах.

умения:

- Вычисление основных элементов цилиндра.
- Построение сечений цилиндра.

Ход работы:

Цилиндром называется тело, которое состоит из двух кругов, совмещаемых параллельным переносом и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.

Круги называют **основаниями** цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей этих кругов – образующими цилиндра (рис. 1)

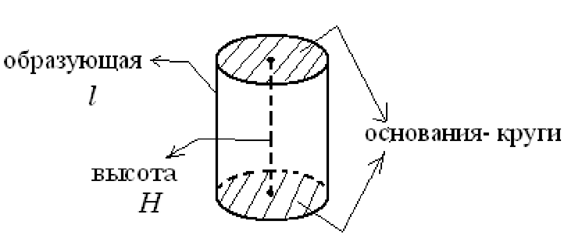


рис. 1

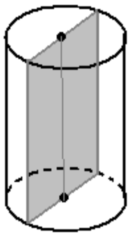


рис. 2

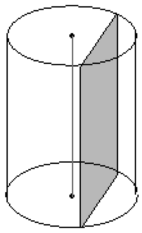


рис. 3

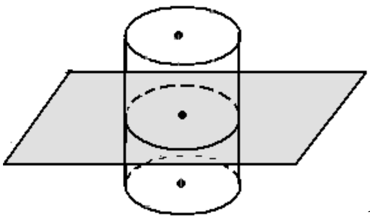


рис. 4

<u>Свойства цилиндра:</u>

1) Основания цилиндра равны и лежат в параллельных плоскостях.

2) Образующие цилиндра равны и параллельны.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется **осевым сечением**.

Осевое сечение цилиндра – прямоугольник со сторонами 2R и l (в прямом цилиндре l = H) рис. 2

Сечение цилиндра, параллельные его оси, являются прямоугольниками (рис. 3).

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям – круг, равный основаниям (рис. 4)

Задачи для самостоятельного решения:

1. Радиус цилиндра равен 3см, а его высота- 5см. Найдите площадь осевого сечения и площадь полной поверхности цилиндра.

2. Радиус цилиндра равен 2см, а его высота- 3см. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра.

3. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

4. Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.

а) Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 72

Название практической работы: *Вычисление основных элементов цилиндра.*

Цель работы: научиться вычислять основные элементы цилиндра.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов
-
-

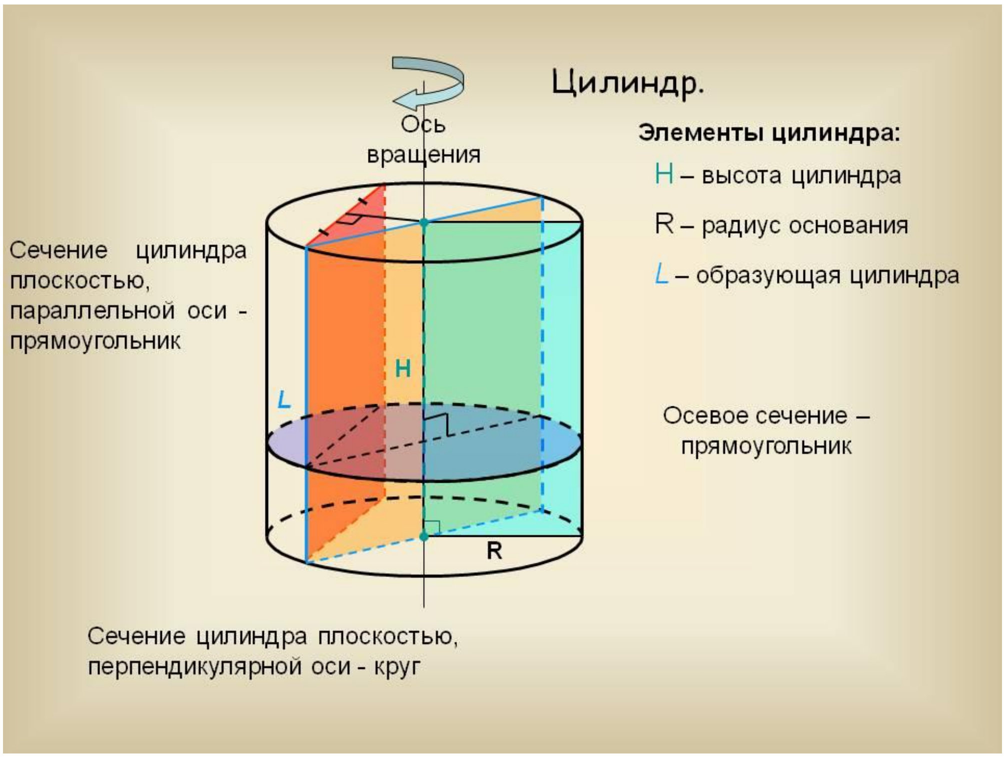
***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания: Понятие о цилиндрах и их основных элементах.

умения: Вычисление основных элементов цилиндра.

Ход работы:



Задачи для самостоятельного решения:

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите: высоту цилиндра.
2. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм . Концы отрезка АВ, равного 10 дм, лежат на окружностях обоих оснований. Найдите кратчайшее расстояние от него до оси.
3. Высота цилиндра равна 16 см. На расстоянии 6 см от оси цилиндра проведено сечение, параллельное оси цилиндра и имеющее форму квадрата. Найдите радиус цилиндра.
4. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен 60^0. Найдите: а) высоту цилиндра; б) радиус цилиндра; в) площадь основания цилиндра.
5. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите высоту цилиндра и площадь его основания.
6. Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 м^2, а площадь основания – 5 м^2. Найдите высоту цилиндра.

Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом α к основанию, пересекает верхнее основание по хорде, равной b и стягивающей дугу β. Найдите высоту цилиндра.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 73

Название практической работы: *Построение конуса и его сечений.*

Цель работы: научиться строить конус и его основные элементы.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.
предметные: ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

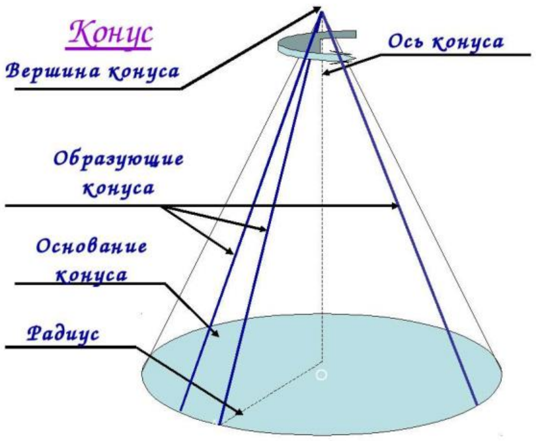
знания:

- Понятие о конусах и их основных элементах.
- Понятие о сечениях конуса.

умения:

1. Вычисление основных элементов конуса.

Ход работы:

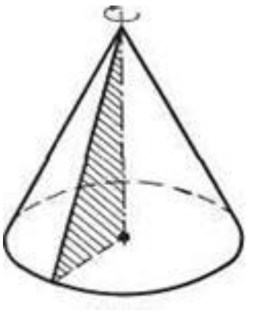


Конусом называют тело, которое состоит из круга (основания), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины) и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются ***образующими, конуса***.

Конус называется ***прямым***, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания.



Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Наглядно прямой круговой конус можно представлять себе как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси.

Задачи для самостоятельного решения:

Вариант 1.

1. Какая фигура получается в сечении конуса плоскостью, проходящей через ось конуса?
2. Что представляет собой сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса?
3. Чему равна площадь осевого сечения конуса, если его высота в 2 раза больше радиуса основания и равна5 см?
4. Осевое сечение конуса представляет собой прямоугольный треугольник с катетом а. Чему равна высота конуса?
5. Высота конуса равна 8 дм. На каком расстоянии от вершины конуса надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна: а) половине площади основания; б) четверти площади основания.

Вариант 2.

1. Какая фигура получается в сечении конуса плоскостью, проходящей перпендикулярно оси конуса?

2. Что представляет собой сечение конуса плоскостью, параллельной двум образующим конуса?

3. Чему равна площадь осевого сечения конуса, если осевым сечением конуса является, а радиус основания конуса 3 см?

4. Осевое сечение конуса представляет собой равносторонний треугольник со стороной а. Чему равна высота конуса?

5. Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник со стороной 2r. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен: а) 30^0; б) 45^0; в) 60^0.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 74

Название практической работы: *Вычисление основных элементов конуса.*

Цель работы: научиться вычислять основные элементы конуса.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания: Понятие о конусах и их основных элементах.

умения: Вычисление основных элементов конусов.

Ход работы:

1. Тело, состоящее из точки, круга и отрезков, соединяющих эту точку с точками на окружности называется

а) Цилиндром
б) Конусом
в) Пирамидой
г) Нет правильного ответа

2. Тело, полученное в результате вращения прямоугольного треугольника, называется:

а) Цилиндром
б) Конусом
в) Пирамидой
г) Нет правильного ответа

3. Осевое сечение конуса равносторонний треугольник. Чему равна образующая, если радиус равен 10 см.?

а) 10 см
б) 15 см
в) 20 см
г) Нет правильного ответа

4. Радиус конуса 8 см. Чему равна его образующая, если угол между радиусом и образующей 60 градусов?

а) 12 см
б) 16 см

в) 4 см

г) Нет правильного ответа

5. Верно ли, что если у конуса сечение - равносторонний треугольник, то диаметр равен образующей?

а) да

б) нет

в) не всегда

г) нет правильного ответа

6. Радиус конуса 3 см, образующая 5 см. Чему равна площадь осевого сечения?

а) 15 кв.см.

б) 14 кв.см.

в) 12 кв.см.

г) нет правильного ответа

7. В конусе параллельно основанию проведено сечение. Определите его радиус, если площади основания и сечения равны 64 и 256 см. кв?

а) 4

б) 2

в) 1

г) Нет правильного ответа

8. Сечение конуса, проходящее через вершину и две точки основания ...

а) Произвольный треугольник

б) Равнобедренный треугольник

в) Прямоугольный треугольник

г) Равносторонний треугольник

9. Ось вращения прямоугольного треугольника в конусе является ...

а) радиусом

б) диаметром

в) образующей

г) высотой

10. 3. Радиус основания конуса равен 10 см, а высота 15 см. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, параллельной основанию и находящейся на расстоянии 2см от вершины конуса

а) $\frac{16\Pi}{9}$ см

б) $\frac{9\Pi}{16}$ см

в) $\frac{17\Pi}{10}$ см

г) 5625П см

д)9п см

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 75

Название практической работы: *Построение и вычисление основных элементов усеченного конуса.*

Цель работы: научиться строить усеченный конус и вычислять его основные элементы

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***етапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

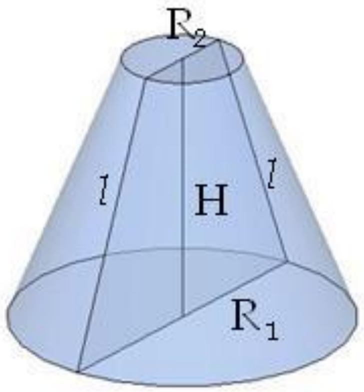
знания:

- Понятие о усеченном конусе и его основных элементах.
- Понятие о сечениях усеченного конуса.

умения: Вычисление основных элементов усеченного конуса

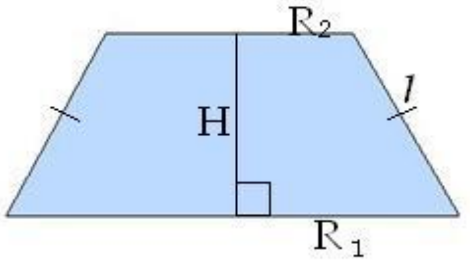
Ход работы:

Усечённый конус — тело вращения, которое получается при вращении прямоугольной трапеции вокруг меньшей боковой стороны.



R_2 — радиус меньшего основания;
R_1 — радиус большего основания;
L — образующая;
H — высота

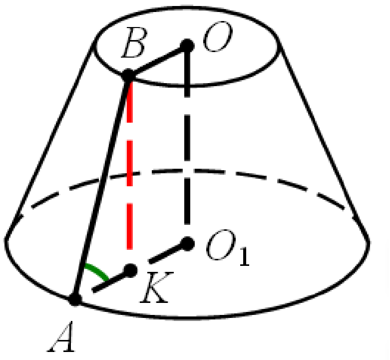
При решении задач чаще всего достаточно нарисовать только осевое сечение усечённого конуса, которое является равнобедренной трапецией.



Задача:

Образующая усечённого конуса равна 2а и наклонена к основанию под углом 60°. Радиус одного основания в два раза больше радиуса второго основания. Найдите каждый из радиусов.

Пусть образующая усечённого конуса AB = 2a, а угол наклона образующей к плоскости основания конуса ∠ BAO1 = 60°.



Учитывая, что $AO_1 = 2BO$, опустим из точки B на плоскость нижнего основания перпендикуляр $BK \perp AO_1$ тогда $BO = KO_1 = AK$.

В ΔABK: $AK = AB \cos\angle BAK \Rightarrow AK = 2a \cos 60° = a$.

Тогда $AK = KO_1 = BO = a$, $AO_1 = 2a$.

Ответ: a, 2a.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найдите образующую усеченного конуса, если радиусы оснований равны 3 см и 6см, а высота равна 4 см.
2. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 11 см, а образующая равна 10 см. Найдите:

   а) Высоту усеченного конуса;

   б) Площадь осевого сечения усеченного конуса.
3. Диагональ осевого сечения усечённого конуса равна 40 см и перпендикулярна к образующей конуса, равной 30 см. Найдите площадь сечения и полной поверхности конуса.
4. Образующая усеченного конуса равна 6 см и наклонена к плоскости основания под углом 60˚. Диагональ осевого сечения делит этот угол пополам. Найдите площадь осевого сечения конуса.
5. Высота усеченного конуса равна $2\sqrt{3}$ см. Диагональ осевого сечения конуса образует с плоскостью основания угол 30˚ и перпендикулярна образующей. Найдите площадь осевого сечения конуса.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 76

Название практической работы: *Построение шара и сферы, их сечений. Уравнение сферы.*

Цель работы: научиться строить шар, сечения шара и сферы и вычислять их основные элементы.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов
-
-

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные: ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания:

- Понятие о шаре, сфере и их основных элементах.
- Понятие об уравнении сферы.

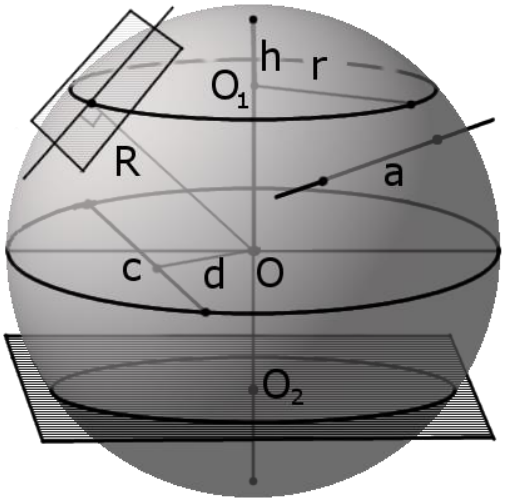
умения:

- Составление уравнения сферы.
- Построение сечений шара.

Ход работы:

Сфера (поверхность шара) — это совокупность всех точек в трехмерном пространстве, которые находятся на одинаковом расстоянии от одной точки, называемой центром сферы (O). Сферу можно описать, как объёмную фигуру, которая образуется вращением окружности вокруг своего диаметра на 180° или полуокружности вокруг своего диаметра на 360°.

Шар — это совокупность всех точек в трехмерном пространстве, расстояние от которых не превышает определенного расстояния до точки, называемой центром шара (O) (совокупность всех точек трехмерного пространства ограниченных сферой).



Шар можно описать как объёмную фигуру, которая образуется вращением круга вокруг своего диаметра на 180° или полуокружности вокруг своего диаметра на 360°.

Радиус сферы (шара) (R) - это расстояние от центра сферы (шара) O к любой точке сферы (поверхности шара).

Диаметр сферы (шара) (D) - это отрезок, соединяющий две точки сферы (поверхности шара) и проходящий через ее центр.

Уравнение сферы

1. Уравнение сферы с радиусом R и центром в начале декартовой системе координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

2. Уравнение сферы с радиусом R и центром в точке с координатами (x_0, y_0, z_0) в декартовой системе координат:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Диаметрально противоположными точками называются любые две точки на поверхности шара (сфере), которые соединены диаметром.

Основные свойства сферы и шара

1. Все точки сферы одинаково удалены от центра.
2. Любое сечение сферы плоскостью является окружностью.
3. Любое сечение шара плоскостью есть кругом.
4. Сфера имеет наибольший объём среди всех пространственных фигур с одинаковой площадью поверхности.
5. Через любые две диаметрально противоположные точки можно провести множество больших окружностей для сферы или кругов для шара.
6. Через любые две точки, кроме диаметрально противоположных точек, можно провести только одну большую окружность для сферы или большой круг для шара.
7. Любые два больших круга одного шара пересекаются по прямой, проходящей через центр шара, а окружности пересекаются в двух диаметрально противоположных точках.
8. Если расстояние между центрами любых двух шаров меньше суммы их радиусов и больше модуля разности их радиусов, то такие шары пересекаются, а в плоскости пересечения образуется круг.

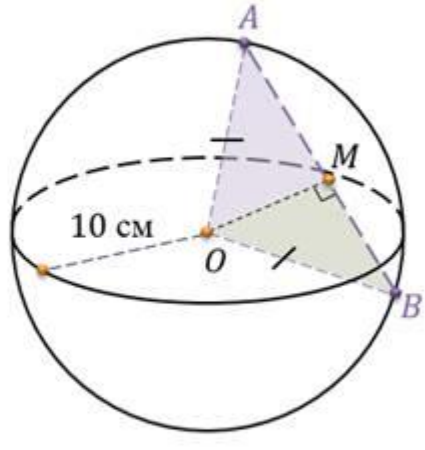
Секущая, хорда, секущая плоскость сферы и их свойства

Секущая сферы - это прямая, которая пересекает сферу в двух точках. Точки пересечения называются точками протыкания поверхности или точками входа и выхода на поверхности.

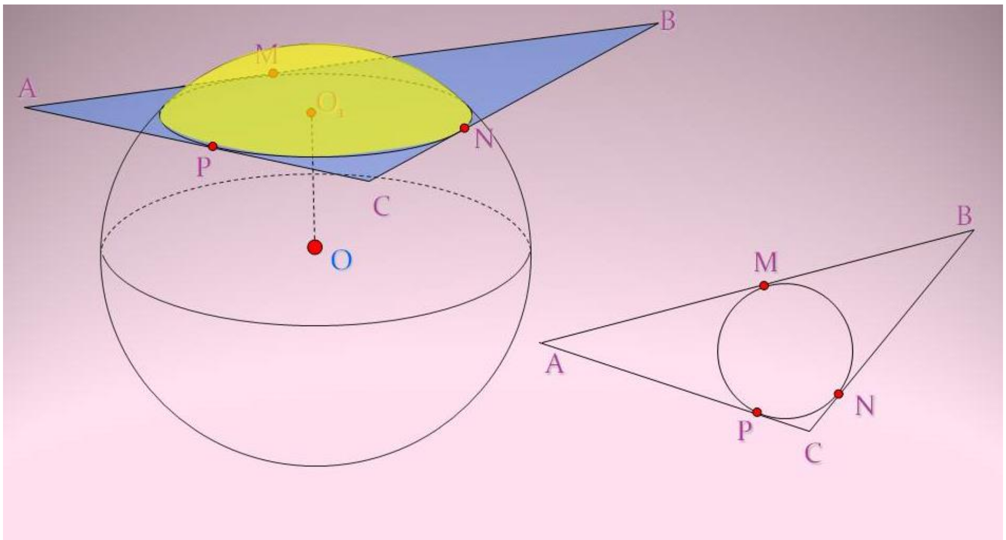
Хорда сферы (шара) - это отрезок, соединяющий две точки сферы (поверхности шара).
Секущая плоскость - это плоскость, которая пересекает сферу.
Диаметральная плоскость - это секущая плоскость, проходящая через центр сферы или шара, в сечении образует соответственно большую окружность и большой круг. Большая окружность и большой круг имеют центр, который совпадают с центром сферы (шара).
Любая хорда, проходящая через центр сферы (шара) является **диаметром**.
Хорда является отрезком секущей прямой.
Расстояние d от центра сферы до секущей всегда меньше чем радиус сферы:

$$d < R$$

Расстояние m между секущей плоскостью и центром сферы всегда меньше радиуса R: $m < R$
Местом сечения секущей плоскости на сфере всегда будет малая окружность, а на шаре местом сечения будет малый круг. Малая окружность и малый круг имеют свои центры, не совпадающих с центром сферы (шара). Радиус r такого круга можно найти по формуле: $r = \sqrt{R^2 - m^2}$,
где R - радиус сферы (шара), m - расстояние от центра шара до секущей плоскости.
Полусфера (полушар) - это половина сферы (шара), которая образуется при ее сечении диаметральной плоскостью.
Касательная, касательная плоскость к сфере и их свойства
Касательная к сфере - это прямая, которая касается сферы только в одной точке.
Касательная плоскость к сфере - это плоскость, которая соприкасается со сферой только в одной точке.
Касательная прямая (плоскость) всегда перпендикулярна радиусу сферы, проведенному к точке соприкосновения
Расстояние от центра сферы до касательной прямой (плоскости) равно радиусу сферы.
Задача 1: отрезок AB – хорда сферы, не проходящая через центр сферы O. Вычислите расстояние от центра сферы до середины хорды AB, если радиус сферы равен 10 см, а длина хорды AB равна 16 см.



Решение: обозначим середину хорды AB точкой M.
Рассмотрим ΔAOB. Он равнобедренный, т.е. OA=-OB, так как OA=OB=R. А как мы знаем, все радиусы одной сферы равны между собой. Отсюда, OA=-OB=R=10 (см).
Теперь рассмотрим ΔOBM. Он прямоугольный, так как отрезок OM является серединным перпендикуляром проведённым к хорде AB. Его катет $MB = \frac{1}{2}AB = 8$ (см).
Воспользовавшись теоремой Пифагора, найдём катет OM, который как раз таки и есть расстояние от центра сферы до середины хорды AB. Получаем, что $OM = \sqrt{OB^2 - MB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).
Ответ: 6 см.
Задача 2: Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если AB=13, BC=14, CA=15



Решение:

Окружность, вписанная в треугольник, является сечением сферы.

Найдем ее радиус.

Площадь треугольника с известными сторонами можно вычислить по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

p=0,5(AB+BC+AC) =21

$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 3 \cdot 4$

S=84.

С другой стороны, S=p·r.

Отсюда r=4.

Теперь найдем расстояние от центра шара до секущей плоскости.

Используем соотношение:

$R^2 = h^2 + r^2$

$h^2 = R^2 - r^2$

$h^2 = 25 - 16 = 9$

h=3.

Ответ: 3.

Задача 3. Составьте уравнение сферы с центром A, проходящей через точку N, если A(-2; 2; 0), N(0; 0; 0).

Решение: Воспользуемся уравнением сферы:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Подставим вместо (x_0, y_0, z_0) координаты точки A, а вместо (x, y, z) координаты точки N, тогда получим:

$$(0 + 2)^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 0)^2 = R^2$$
$$4 + 4 = R^2 \Rightarrow R^2 = 8$$

Окончательно, получим: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 8$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Напишите уравнение сферы радиуса R с центром A, если A (2;-4;7), R=3

2. Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 25$

3. Напишите уравнение сферы с центром А, проходящей через точку N, если A(-2;2;0), N(0;0;0).

4. Шар радиуса 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

5. Точка М – середина отрезка АВ, концы которого лежат на сфере радиуса R с центром О. Найдите ОМ, если R=15 см, АВ=18 см.

6. Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса R так, что угол между диаметром и плоскостью равен α. Найдите длину окружности, получившейся в сечении, если: а) R=2 см, α=30°; б) R=5 м, α=45°.

7. Радиус сферы равен 112 см. Точка, лежащая на плоскости, касательной к сфере, удалена от точки касания на 15 см. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точке сферы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 77

Название практической работы: *Вычисление площади поверхности и объёма призмы и пирамиды.*

Цель работы: используя ранее изученный материал, научиться решать задачи на вычисление площади поверхности и объёма призмы и пирамиды.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

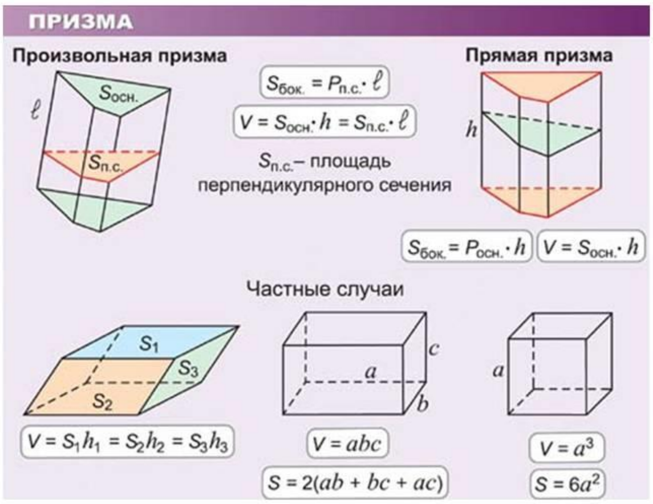
***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

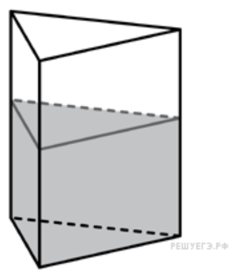
знания: Понятие о призме, пирамиде и их основных элементах.

умения: Вычисление площади поверхности и объёма призмы и пирамиды.

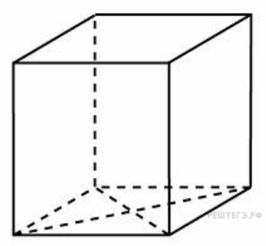
Ход работы:



Пример 1. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.



Решение: Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту $V = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}H$. Поэтому $H = \frac{4V}{\sqrt{3}a^2}$, а значит, при увеличении стороны a в 4 раза знаменатель увеличится в 16 раз, то есть высота уменьшится в 16 раз и будет равна 5 см.



Пример 2. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.

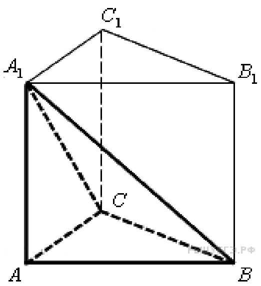
Решение: Площадь ромба вычисляется по формуле:

$$S_P = \frac{1}{2}d_1 d_2 = 24.$$

По свойству диагоналей ромба: $a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 5$

Тогда площадь полной поверхности призмы вычисляется по формуле:

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2S_P + 4aH = 48 + 4 \cdot 5 \cdot 10 = 248.$$



Пример 3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.

Решение: Требуется найти объём пирамиды, основание и высота которой совпадают с основанием и высотой данной треугольной призмы. Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пр}}h_{\text{пр}} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 2.$$

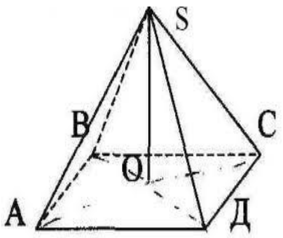
ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ		
	Пирамида	**Усеченная пирамида**
Боковая поверхность	$S_{бок} = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где S_i — площадь одной боковой грани	$S_{бок} = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где S_i — площадь одной боковой грани
Полная поверхность	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$	$S_{полн} = S_{бок} + S + s$, где S — площадь нижнего основания, s — площадь верхнего основания
Объем	$V = \frac{1}{3} H \ldots \cdot S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} H \ldots \cdot (S + s + \sqrt{Ss})$

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ		
	Пирамида	**Усеченная пирамида**
Боковая поверхность	$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot l$, где P — периметр основания, l — апофема	$S_{бок} = \frac{1}{2} (P + p) \cdot l$, где P — периметр нижнего основания, p — периметр верхнего основания, l — апофема
Полная поверхность	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$	$S_{полн} = S_{бок} + S + s$, где S — площадь нижнего основания, s — площадь верхнего основания
Объем	$V = \frac{1}{3} H \ldots \cdot S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} H \ldots \cdot (S + s + \sqrt{Ss})$

Пример 1.

Дано: SАВСД – пирамида, АВСД –прямоугольник. АВ=3см, ВС= 6см, Н=10см, ℓ_1=10,5см., ℓ_2=10,2см , ℓ- апофема. Найти: $S_{б.п.}$ $S_{п.п.}$

Решение:



т.к. пирамида неправильная, то $S_{б.п.}$ находят как сумму площадей ее боковых граней, т.е. площадей треугольников. $S_1 = 1/2 \cdot \ell_1 \cdot AB = 1/2 \cdot 10{,}5 \cdot 3 = 15{,}75$ (см^2) - это площадь одной грани, а их две одинаковых, т.е

$S_{1,2} = 15{,}75 \cdot 2 = 31{,}5$ (см^2)

Пример 2. Дана треугольная усеченная пирамида. Ее высота равна 10 см, стороны одного из оснований равны a = 27 см, b = 2 см и c = 52 см. периметр второго основания равняется р2 = 72 см. найдите объем пирамиды.

Решение:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right)$$

По формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, рассчитаем площадь S_1.

Найдем полупериметр основания:

p_1= 27+29+52 = 108 см;

p_1= 108/2 = 54 см;

$S_1 = \sqrt{54(54-27)\cdot(54-29)\cdot(54-52)} = \sqrt{54\cdot 27\cdot 25\cdot 2}$ = 270 см^2;

Зная, что пирамида усеченная, делаем вывод, что треугольники, лежащие в основаниях – подобны. Коэффициент подобия этих треугольников можно найти из соотношения периметров. Отношение площадей треугольников будет равно квадрату этого коэффициента.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{108^2}{72^2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$S_2 = \frac{4S_1}{9} = \frac{4\cdot 270}{9} = \frac{1080}{9} = 120$$

Теперь, когда нашли S_1 и S_2, можно рассчитать объем:

$$V = \frac{1}{3}\cdot 10\cdot\left(270 + \sqrt{270\cdot 120} + 120\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 10\cdot\left(270 + \sqrt{3240} + 120\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 10\cdot(270 + 180 + 120)$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 10\cdot 570 = 1900$$

Задачи для самостоятельного решения:

Призма:

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а диагональ боковой грани 10 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 9 см, а диагональ боковой грани равна 15 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

3.Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20 см. Большая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

4. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 6, а высота – 8.

5. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными $4\sqrt{5}$ и 8, и боковым ребром, равным 5.

6. Площадь полной поверхности правильной четырёхугольной призмы на 32 см^2 больше площади её боковой поверхности. Найдите длину стороны основания призмы.

7. Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной призмы, если сторона её основания равна 20, а площадь поверхности 1760.

8. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота – 10.

9. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсечённой треугольной призмы.

10. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсечённой треугольной призмы равен 5. Найдите объем исходной призмы.

11. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, высота призмы равна 10. Найдите площадь её поверхности.

12. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь её поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.

13. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь её поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.

14. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.

15. Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 6. Какой будет площадь поверхности призмы, если все её ребра увеличить в три раза?

16. Площадь поверхности куба равна 18. Найдите его диагональ.

17. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро куба.

18. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?

19. Объем одного куба в 8 раз больше объёма другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

Пирамида:

1. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 6 см, площадь нижнего основания 8 см^2, а площадь верхнего основания равна 2 см^2.

2. Найти объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 3 см, нижнее основание – это равносторонний треугольник со сторонами $6\sqrt{3}$ см, а верхнее основание – это равносторонний треугольник со стороной $4\sqrt{3}$ см.

3. Крыша башни имеет вид правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 12 м, а высота 18 м. Сколько понадобится плиток на покрытие этой крыши, если каждая плитка имеет вид прямоугольника со сторонами 22 см и 18 см.

4. Крыша имеет форму пирамиды с квадратным основанием 4,5 м х 4,5 м и высотой 4 м. Сколько листов железа размером 70 см х 140 см нужно для покрытия крыши, если на отходы нужно добавить 10% площади крыши?

5. Пирамида Снофру имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 220 м, а высота — 104 м. Сторона основания точной музейной копии этой пирамиды равна 44 см. Найдите высоту музейной копии. Ответ дайте в сантиметрах.

6. Даны две правильные четырёхугольные пирамиды. Объём первой пирамиды равен 16. У второй пирамиды высота в 2 раза больше, а сторона основания в 1,5 раза больше, чем у первой. Найдите объём второй пирамиды.

7. Боковое ребро правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равно 4, а угол при основании боковой грани 600. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

8. Площадь основания правильной треугольной пирамиды $\sqrt{3}.$ Угол наклона боковой грани к плоскости основания 450. Найдите апофему пирамиды.

9. В основании пирамиды DABC лежит прямоугольный треугольник ABC, $\angle C$ = 900, $\angle$ A= 300, BC=10. Боковые рёбра пирамиды равнонаклонены к плоскости основания. Высота пирамиды равна 5. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

10. Основанием пирамиды *MABCD* является квадрат *ABCD*, ребро *MD* перпендикулярно к плоскости основания, *AD* = *DM* = *a*. Найдите площадь поверхности пирамиды.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 78

Название практической работы: *Вычисление площади поверхности и объёма цилиндра и конуса.*

Цель работы: используя ранее изученный материал, научиться решать задачи на вычисление площади поверхности и объёма цилиндра.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

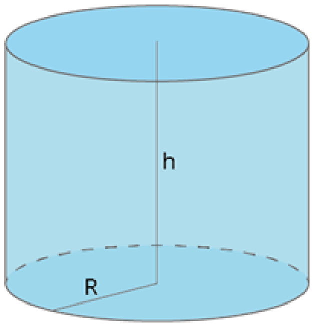
знания: Понятие о цилиндре и конусе, их основных элементах.

умения: Вычисление площади поверхности и объёма цилиндра и конуса

Ход работы:

Цель работы:

Содержание работы:



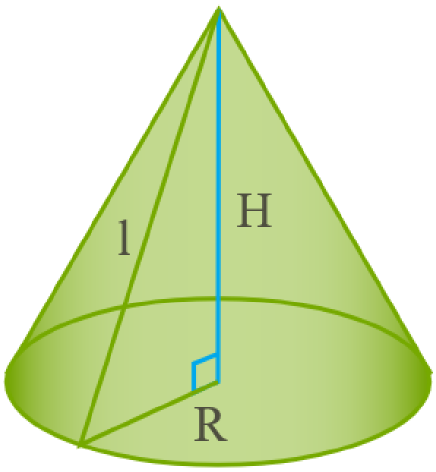
Площадь поверхности цилиндра состоит из площади боковой поверхности и площади оснований цилиндра.

Площадь боковой поверхности цилиндра
$S(бок.) = 2\pi RH$,
где R — радиус цилиндра,
H — высота цилиндра

Основания цилиндра — круги. $S(круга) = \pi R^2$.

Площадь полной поверхности цилиндра равна:
$S(полн.) = 2S(осн.) + S(бок.) = 2\pi R^2 + 2\pi RH$.

Объём цилиндра V(цилиндра) $= \pi R^2 \cdot H$.



Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле:
S(бок.)$= \pi Rl$,
где R — радиус конуса,
l — образующая конуса.

Площадь основания конуса вычисляется по формуле S(круга) $= \pi R^2$.

Площадь полной поверхности конуса вычисляется по формуле
S(полн.) $= S$(бок.) $+ S$(круга) $= \pi Rl + \pi R^2$.

Объём конуса вычисляют по формуле
$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S(\text{круга}) = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3}$

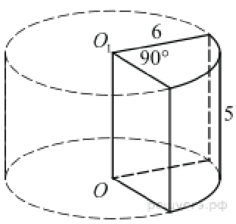
Задачи для самостоятельного решения:

Цилиндр:

1. Объем первого цилиндра равен 12 м^3. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра.

2. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

4. Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



5. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

6. Найдите объем части цилиндра, изображенной на рисунке.

7. Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.

8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π, а диаметр основания — 1. Найдите высоту цилиндра.

Конус:

1. Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 4 см и 7 см, вокруг большего катета.
2. Высота конуса равна 5 см, а угол при вершине осевого сечения равен 120°. Найдите объем конуса.
3. Высота конуса равна 12 см, а его образующая равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.
4. Квадрат со стороной 3 см вращается вокруг своей диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения тела вращения.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 79

Название практической работы: *Вычисление площади сферы и объёма шара.*

Цель работы*:* используя ранее изученный материал, научиться решать задачи на вычисление площади сферы и объёма шара.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

–

–

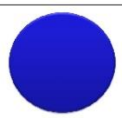
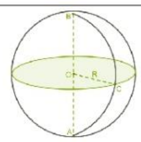
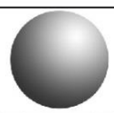
***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

знания: Понятие о сфере, шаре и их основных элементах.

умения: Вычисление площади сферы и объёма шара.

Ход работы:

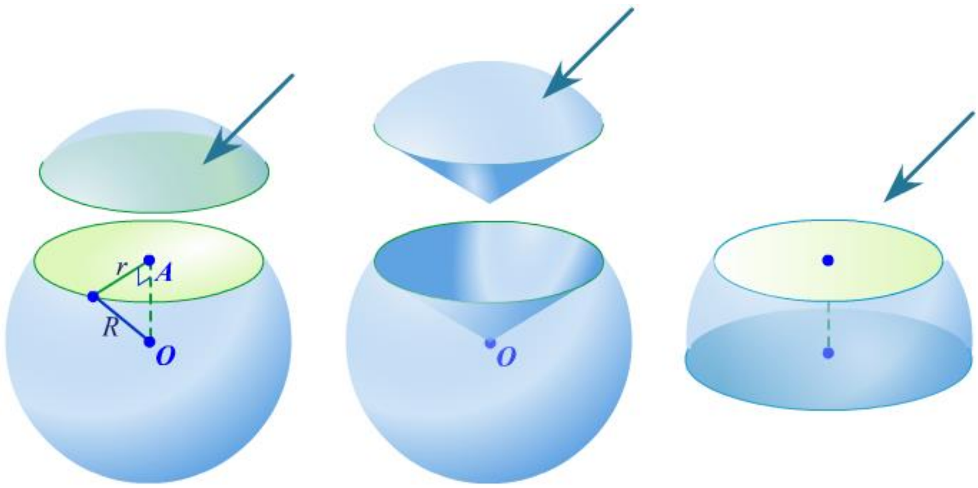
Фигура	*Чертёж*	*Величина*	*Формула*
Окружность		*Длина окружности*	$C = 2\pi R$ $C = \pi D$
Круг		*Площадь круга*	$S = \pi \cdot R^2$
Сфера		*Площадь сферы*	$S = 4\pi R^2$
Шар		*Объём шара*	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Части шара

Шаровый сегмент — часть шара отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью

Шаровый сектор — тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов

Шаровый слой — часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями



Объем шарового сегмента:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h),}$$

где V — объем шарового сегмента;
R — радиус шара;
h — высота сегмента.

Площадь сегментовой поверхности:

$$\boxed{S_{\text{бок.}} = 2\pi Rh,}$$

где $S_{\text{бок.}}$ — площадь сегментовой поверхности шара;
R — радиус шара;
h — высота сегмента

Объем шарового сектора:

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,}$$

где V — объем щарового сектора;
R — радиус шара;
h — высота сектора

Площадь полной поверхности:

$$\boxed{S_{\text{п.п.}} = \pi R(2h + \sqrt{2Rh - h^2}),}$$

где $S_{\text{п.п.}}$ — площадь полной поверхности шарового сектора;
R — радиус шара;
h — высота сегмента

Объем шарового слоя:

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(R_1^2 + R_2^2)h,}$$

где V — объем шарового слоя;
R_1 и R_2 — радиусы оснований слоя;
h — высота слоя

Площадь боковой поверхности:

$$\boxed{S_{\text{бок.}} = 2\pi Rh,}$$

где $S_{\text{бок.}}$ — площадь боковой поверхности шарового слоя;
R — радиус шара;
h — высота сегмента.

Примеры решения задач:

1. **Найдите площадь сферы, если радиус равен:**

   а) $\mathbf{R = \frac{1}{6}}$ **дм;**
   б) $\mathbf{R = 5}$ **см;**
   в) $\mathbf{R = \sqrt{2}}$ **м;**
   г) $\mathbf{R = 2\sqrt{3}}$ **см**

Дано:

а) $R = \frac{1}{6}$ дм;
б) $R = 5$ см;
в) $R = \sqrt{2}$ м;
г) $R = 2\sqrt{3}$ см

$S-?$

Решение:

Площадь сферы равна: $S = 4\pi R^2$. Подставляем

а) $S = 4\pi \cdot (\frac{1}{6})^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}\pi$ дм^2
б) $S = 4\pi \cdot 5^2 = 4\pi \cdot 25 = 100\pi$ см^2
в) $S = 4\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 4\pi \cdot 2 = 8\pi$ м^2
г) $S = 4\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 4\pi \cdot 2 \cdot 3 = 24\pi$ см^2

Ответ:

а) $S = \frac{1}{9}\pi$ дм^2
б) $S = 100\pi$ см^2
в) $S = 8\pi$ м^2
г) $S = 24\pi$ см^2

2. **Площадь сферы равна $\mathbf{324\pi}$ см^2. Найдите радиус *R* сферы.**

Дано:

$S = 324\pi$ см^2

$R-?$

Решение:

Формула площади сферы: $S = 4\pi R^2$.

$$R^2 = \frac{S}{4\pi}$$

$$R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \sqrt{\frac{324\pi}{4\pi}} = \sqrt{81} = 9 \text{ см}^2$$

Ответ: $R = 9$ см^2

3. **Найдите объем шара, если радиус *R* равен 3 см.**

Дано:

R = 3 см

V - ?

Решение:

Формула объёма шара: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 27 = 4 \cdot \pi \cdot 9 = 36\pi \text{ см}^2$$

Ответ: $V = 36\pi$ см^2

4. **Найдите радиус шара, если объем шара равен $\mathbf{288\pi}$ м^3**

Дано:

$V = 288\pi$ м^3

R - ?

Решение:

Формула объёма шара: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

$$3V = 4 \cdot \pi \cdot R^3$$

$$R^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$R^3 = \frac{3 \cdot 288\pi}{4\pi} = 3 \cdot 72 = 216$$

$$R = \sqrt[3]{216} = 6 \text{ м}$$

Ответ: $R = 6$ *м*

Задачи для самостоятельного решения:

1. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

2. Дано два шара. Радиус первого шара в 2 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

3. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

4. Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

5. Объем первого шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

6. Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

7. В шаре радиуса 15см проведено сечение, площадь которого равна 81π см^2. Найдите объем меньшего шарового сегмента, отсекаемого плоскостью сечения.

8. На расстоянии 9см от центра шара проведено сечение, длина окружности которого равна 24π см. Найдите объем меньшего шарового сегмента, отсекаемого плоскостью сечения.

9. Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол 60. Найдите отношение объемов конуса и шара.

10. В конус, осевое сечение которого есть правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение площади сферы к площади боковой поверхности конуса.

11. Объем цилиндра равен 96π см^3 площадь его осевого сечения - 48см.^{2} Найдите площадь сферы, описанной около цилиндра.

12. Диаметр шара равен высоте цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат. Найдите отношение объемов шара и цилиндра.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 80

Название практической работы: *Вычисление площади поверхности и объёма усеченной пирамиды и усеченного конуса.*

Цель работы: используя ранее изученный материал, научиться решать задачи на вычисление площади поверхности и объёма усеченного конуса и усеченной пирамиды.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16.

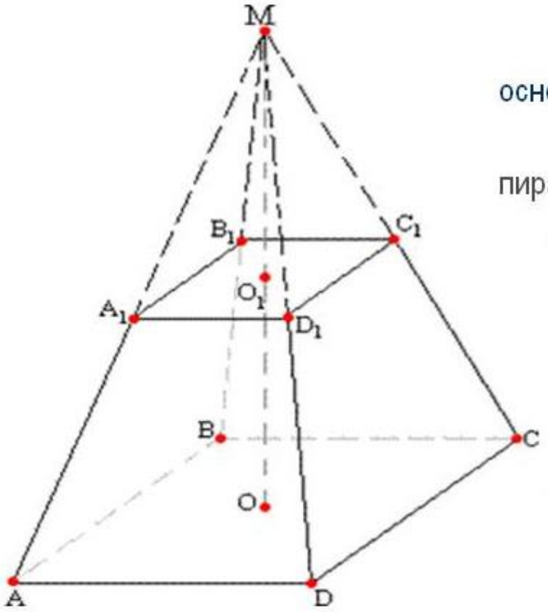
знания: Понятие о усеченной пирамиде, усеченном конусе и их основных элементах.

умения: Вычисление площади поверхности и объёма усеченного конуса и усеченной пирамиды.

Ход работы:

Усеченная пирамида

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает ее на подобную пирамиду и усёченную пирамиду.



Многоугольники $A_1B_1C_1D_1$ и ABCD – основания усечённой пирамиды.

Перпендикуляр O_1O – высота усечённой пирамиды.

- Площадь боковой поверхности усечённой пирамиды:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h$$

где P_1, P_2 – периметры оснований, h – апофема усечённой пирамиды.

- Объём усечённой пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$$

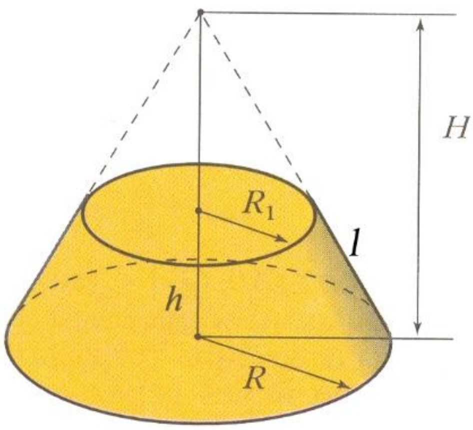
где S_1, S_2 – площади основаниций, H – высота усечённой пирамиды.

Пример 1. Найти площадь боковой поверхности усеченной треугольной пирамиды, если она получена из правильной пирамиды с основанием 6 и апофемой 4 путем отсечения плоскостью, проходящей через среднюю линию боковых граней.

Решение. По теореме о средней линии получим, что верхнее основание усеченной пирамиды равно $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$, а апофема равна $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. Тогда, по формуле: $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot (P_1 + P_2) \cdot h$, получим $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 6) \cdot 2 = 27$

Ответ: 27.

Усеченный конус



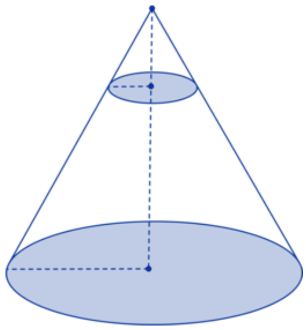
- Формулы:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + RR_1 + R_1^2)$$

$$S_{бок.пов.} = \pi(R + R_1)l$$

$$S_{полн.пов.} = \pi(R + R_1)l + \pi R^2 + \pi r^2$$

Здесь h – высота усеченного конуса; R и R_1 – радиусы его верхнего и нижнего оснований; l – его образующая

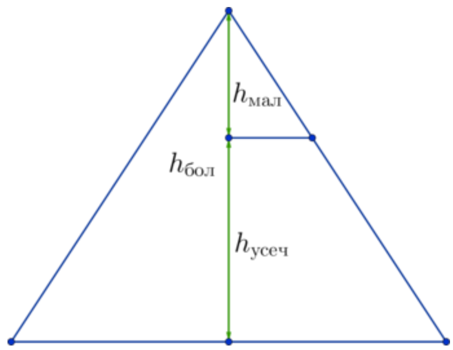


Пример 2. Площадь боковой поверхности конуса равна 48π, а площадь боковой поверхности усеченного конуса с такими же основанием и углом наклона образующей к плоскости основания равна 36π. Найдите высоту усеченного конуса, если высота исходного конуса равна 10.

Решение:

Площадь боковой поверхности меньшего конуса, который дополняет усеченный конус до полного, равна разности их площадей поверхностей:

$S_{мал}=48\pi-36\pi=12\pi$.



Отношение площадей боковых поверхностей большого и малого конусов равно квадрату коэффициента подобия между ними:

$$\frac{S_{бол}}{S_{мал}} = k^2 = \frac{48\pi}{12\pi} = 4 \Rightarrow k = 2$$

Тогда высоты конусов относятся друг к другу:

$$\frac{h_{бол}}{h_{мал}} = \frac{10}{h_{мал}} = k = 2$$

Тогда $h_{мал}=5 \Rightarrow h_{усеч}=h_{бол}-h_{мал}=10-5=5$

Ответ: 5

Задачи для самостоятельного решения:

1. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 и 6. Найдите площадь диагонального сечения, если боковое ребро образует с большим основанием угол, равный 45.
2. Найдите высоту правильной усеченной четырехугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 14 и 10, а диагональ равна 18.
3. В основаниях усеченной пирамиды правильные треугольники со сторонами 2 и 6. Определите высоту этой пирамиды, если ее объём равен 52.
4. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами a и b (a>b). Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Определите величину двугранных углов при сторонах оснований.
5. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10. Стороны одного основания равны 27,29 и 52, а периметр другого основания равен 72. Определите объём усеченной пирамиды.
6. В основаниях усеченной пирамиды лежат прямоугольные треугольники с острым углом 60. Гипотенузы этих треугольников равны 6 и 4. Высота данной пирамиды. Найдите объём ученной пирамиды.
7. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 4 и 4; боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60. Найдите полную поверхность пирамиды.
8. Стороны основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся, как 3:2. Высота пирамиды равна 3. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60. Найдите объём пирамиды.
9. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды ̊ равно и наклонено к плоскости основания под углом 60. Диагональ пирамиды перпендикулярна боковому ребру. Найдите площадь меньшего основания пирамиды.

10. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 6 см, а высота равна 4 см. Найдите образующую усеченного конуса, площадь боковой и полной поверхности усеченного конуса.

11. Дана трапеция ABCD, в которой $\angle A = 90°$, $\angle D = 30°$, $BC = 3\sqrt{3}$ см, $CD = 6$ см. Вычислите площадь боковой поверхности усеченного конуса, образованного вращением данной трапеции вокруг стороны AB.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 81

Название практической работы: *Расчет объема вместимости веществ*.

Цель работы*:* Научиться применять ранее изученный материал, связанный с вычислением объёмов пространственных фигур для решения практических задач.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 01, ПРб 06, ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРб 14, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16, ПРу 19.

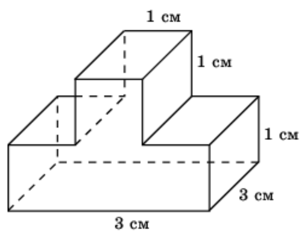
знания: понятие о пространственных фигурах.

умения: применение формул для вычисления объёмов пространственных фигур.

Ход работы:

Используя материал предыдущих практических работ, решить практические задачи:

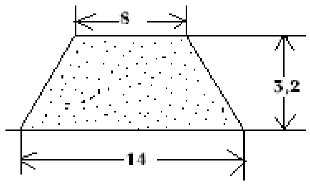
1. Египетские пирамиды – древнейшее и вместе с тем единственное сохранившееся до наших дней чудо света. Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырехугольной пирамиды. Высота пирамиды на сегодняшний день составляет 138,75 м, сторона основания 230м. Вычислите объем пирамиды.
2. Вычислите количество нефти в тоннах, находящейся в цистерне цилиндрической формы, диаметр которой равен 22 м, а высота 8м, плотность нефти 800 кг/м^3.
3. Три латунных куба с рёбрами 3см, 4см и 5см переплавлены в один куб. Какую длину имеет ребро этого куба?
4. Какой объем молока может войти в тетрапак в виде пирамиды, основание которой равносторонний треугольник со стороной 20см, высотой 24см.
5. Найти диаметр медной проволоки, если 30м проволоки весят 121,2г и плотность меди 8,9г/см^3.
6. Сколько шариков диаметром в 1см можно отлить из куска свинца весом в 1 кг, если плотность свинца 11,4 г/см^3?
7. Сколько литров воды вмещает водоём, имеющий форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если глубина его равна 1,2 м, а стороны оснований – 10м и 5м?
8. Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы – прямые).



9. Автоцистерна для перевозки молока имеет форму цилиндра. Внутренний диаметр, которого равен 1,4 м, а длина - 3,5 м.

Сколько тонн молока можно налить в такую цистерну, если заполнить ее доверху? Плотность молока 1032 кг/м^3.

10. В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 дм^3 воды, опустили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали?
11. Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2м и образующая 3,5м. Сколько надо возов, чтобы перевезти весь щебень, уложенный в десяти таких кучах, если 1 м^3 щебня весит 3 т и на один воз грузят 0,5 т.
12. Прямоугольный золотой лист имеет размеры 4,7см × 6,2см и весит 6,3г. Найдите толщину листа (плотность золота 19,3г/см^3).
13. Бак, имеющий форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды, вмещает 190л бензина. Найдите глубину этого бака, если стороны его оснований равны 60см и 40см.
14. Железнодорожная насыпь дана в разрезе (см. чертёж); размеры указаны в метрах. Найти, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.



15. Внутренний диаметр чугунного полого шара 8см, а внешний 10см. Найти вес шара (плотность чугуна 7,3г/см^3).
16. Стаканчик для мороженого конической формы имеет 12см глубину и 5см по диаметру верхней части. На него сверху положили две ложки мороженного в виде полушарий диаметра 5см. Переполнит ли мороженое стаканчик если позволить ему растаять.
17. Свинцовая труба с толщиной стенок в 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Сколько весят 25 м этой трубы, если плотность свинца 11,4г/см^3?
18. На полке в магазине стоят две банки цилиндрической формы земляничного варенья одного и того же сорта. Одна банка в 2 раза выше другой, но зато её диаметр в 2 раза меньше. Высокая банка стоит 23 цента, а низкая 43 цента. Какую из банок купить выгоднее?
19. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4м, причём цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Определить вес стога (плотность сена 0,03г/см^3).
20. Стальной вал, имеющий 1,40 м длины и 0,083 м в диаметре, обтачивается на токарном станке, причём его диаметр уменьшается на 0,003 м. Сколько он теряет в весе благодаря обточке? (плотность стали 7,4г/см^3)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 82

Название практической работы: *Примеры симметрий в профессиях и специальностях технологического профиля.*

Цель работы*:*

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов
-
-

метапредметные**:** МРП 01, МРП 04, МРП 07, МРП 08, МРП 16, МРП 18, МРП 19, МРП 21, МРК 08, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные: ПРб 01, ПРб 06, ПРб 09, ПРб 10, ПРб 11, ПРб 12, ПРб 14, ПРу 14, ПРу 15, ПРу 16, ПРу 19.

знания: понятие симметрии и её видах.

умения: построение симметричных фигур.

Ход работы:

В наиболее общем виде под "симметрией" в математике понимается такое преобразование пространства (плоскости), при котором каждая точка М переходит в другую точку М' относительно некоторой плоскости (или прямой) а, когда отрезок ММ' является перпендикулярным плоскости (или прямой) а и делится ею пополам. Плоскость (прямая) а называется при этом плоскостью (или осью) симметрии. К фундаментальным понятиям симметрии относятся плоскость симметрии, ось симметрии, центр симметрии. Плоскостью симметрии Р называется такая плоскость, которая делит фигуру на две зеркально равные части, расположенные друг относительно друга так, как предмет и его зеркальное отражение.

Виды симметрии.

Центральная симметрия

Симметрия относительно точки или центральная симметрия – это такое свойство геометрической фигуры, когда любой точке, расположенной по одну сторону центра симметрии, соответствует другая точка, расположенная по другую сторону центра. При этом точки находятся на отрезке прямой, проходящей через центр, делящий отрезок пополам.

Практическое задание.

1. Даны точки *A*, *B* и *M*. Постройте точку, симметричную точке *M* относительно середины отрезка *AB*.
2. Какие из следующих букв имеют центр симметрии: А, О, М, Х, К?
3. Имеют ли центр симметрии: а) отрезок; б) луч; в) пара пересекающихся прямых; г) квадрат?

Осевая симметрия

Симметрия относительно прямой (или осевая симметрия) – это такое свойство геометрической фигуры, когда любой точке, расположенной по одну сторону прямой, всегда будет соответствовать точка, расположенная по другую сторону прямой, а отрезки, соединяющие эти точки, будут перпендикулярны оси симметрии и делятся ею пополам.

Практическое задание.

1. Даны две точки *A* и *B*, симметричные относительно некоторой прямой, и точка *M*. Постройте точку, симметричную точке *M* относительно той же прямой.
2. Какие из следующих букв имеют ось симметрии: А, Б, Г, Е, О?
3. Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) прямая; в) луч?
4. Сколько осей симметрии имеет рисунок? (см. рис. 1)

Рис. 1

Зеркальная симметрия

Точки A и B называются симметричными относительно плоскости α (плоскость симметрии), если плоскость α проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости α считается симметричной сама себе.

Практическое задание.

1. Найдите координаты точек, в которые переходят точки A (0; 1; 2), B (3; -1; 4), C (1; 0; -2) при: а) центральной симметрии относительно начала координат; б) осевой симметрии относительно координатных осей; в) зеркальной симметрии относительно координатных плоскостей.
2. В правую или левую перчатку переходит правая перчатка при зеркальной симметрии? осевой симметрии? центральной симметрии?
3. На рисунке показано, как цифра 4 отражается в двух зеркалах. Что будет видно на месте знака вопроса, если то же самое сделать с цифрой 5? (см. рис. 2)
4. На рисунке показано, как слово КЕНГУРУ отражается в двух зеркалах. Что получится, если то же самое проделать с числом 2010? (см. рис. 3)

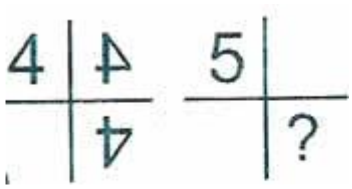


Рис. 2

Рис. 3

1. Индивидуальное: достройте, применив осевую симметрию (см. рис. 3).

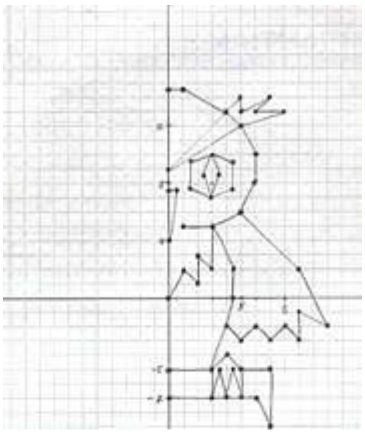


Рис. 3

2. Постройте фигуру, симметричную данной относительно: а) точки; б) прямой (см. рис. 4, 5).

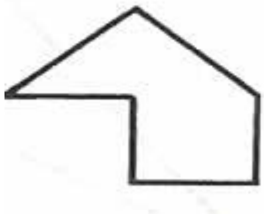
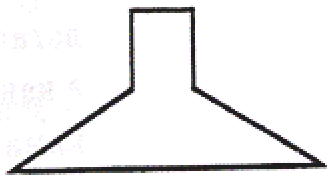
 

Рис. 4 Рис. 5

3. Творческое задание: «В мире животных». Нарисуйте представителя из мира животных и покажите ось симметрии.
4. Ответьте на вопросы:

   1) Почему же в природе царит симметрия? Почему симметрично всё живое от микроорганизмов до человека?

   2) Приведите примеры симметрии в архитектуре, скульптуре, живописи, литературе, музыке, танцах.

   3) Где применяется симметрия у вас в профессии?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 83

Название практической работы: *Подсчет числа размещений.*

Цель работы: Закрепить навыки вычисления числа комбинаций с помощью формулы размещений.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 08, ПРу 02, ПРу 03, ПРу 04, ПРу 12, ПРу13, ПРу 18.

знания: понятие размещений.

умения: применение формулы размещений при вычислении числа комбинаций.

Ход работы:

Определение. ***Размещениями*** из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их следования.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример. При расследовании хищения установлено, что у преступника семизначный телефонный номер, в котором ни одна цифра не повторяется и нет нуля. Следователь, полагая, что перебор этих номеров потребует одного-двух часов, доложил о раскрытии преступления. Прав ли он?

Решение. Число номеров равно числу размещений из 9 элементов по 7, т.е. равно A_7^4.

По формуле получаем $A_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 181440$ номеров.

Даже если на проверку одного номера тратить 1 минуту, то на все уйдет 3024 часа или 126 суток. Таким образом, следователь – не прав.

Задания для самостоятельного решения:

1. Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?
2. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
3. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?
4. Сколькими способами 6 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоит 20 одноместных столов?
5. На странице альбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные места: а) 2 фотографии; б) 4 фотографии; в) 6 фотографий?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 84

Название практической работы: *Подсчет числа сочетаний.*

Цель работы*:* Закрепить навыки вычисления числа комбинаций с помощью формулы сочетаний.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 08, ПРу 02, ПРу 03, ПРу 04, ПРу 12, ПРу13, ПРу 18.

знания: понятие сочетаний.

умения: применение формулы сочетаний при вычислении числа комбинаций.

Ход работы:

Определение. ***Сочетаниями*** из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. (Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, не считаются различными.)

Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Пример. В штате прокуратуры областного центра имеется 16 следователей. Сколькими способами можно выбрать 2 из них для проверки оперативной информации о готовящемся преступлении?

Решение. Способов столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число равно

$C_{16}^2 = \frac{16!}{(16-2)!2!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 1}{14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$, т.е. всего 120 способов выбора следователей.

Задания для самостоятельного решения:

1. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов, и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки.

а) Сколько встреч было между футболистами?

б) Сколько встреч было между хоккеистами?
в) Сколько встреч было между футболистами и хоккеистами?
г) Сколько встреч было всего?
2. В отделе работают 5 ведущих и 8 старших научных сотрудников. В командировку надо послать двух ведущих и трех старших научных сотрудников. Сколькими способами может быть сделан выбор сотрудников, которых надо послать в командировку?
3. Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на две группы: а) по 4 и 8 человек; б) по 5 и 7 человек?
4. В правильном 17-угольнике провели все диагонали.
а) Сколько всего получилось отрезков?
б) Сколько имеется сторон?
в) Сколько провели диагоналей?
г) Сколько всего диагоналей в выпуклом n-угольнике?
5. Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом. Известно, что рукопожатий было от 60 до 70. Сколько человек встретились, если известно, что:
а) каждый здоровался с каждым;
б) только один человек не здоровался ни с кем;
в) только двое не поздоровались между собой;
г) четверо поздоровались только между собой.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 85

Название практической работы: *Подсчет числа перестановок.*

Цель работы: научиться решать задачи на вычисление числа комбинаций с использованием формулы перестановок.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРб 08, ПРу 02, ПРу 03, ПРу 04, ПРу 12, ПРу13, ПРу 18.

знания: Понятие о перестановках.

умения: Вычисление числа комбинаций с помощью формулы перестановок.

Ход работы:

Перестановками из n элементов называются такие соединения из n элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком следования элементов. $P_n = n!$

Пример 1. Замок сейфа открывается, если введена правильная комбинация. Преступник пытается открыть сейф, набирая код наудачу. Он знает, что код состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что все числа не повторяются и последней является 5. Сколько попыток ему придется сделать.

Решение. Так как число пять должно стоять на последнем месте, то остальные пять цифр могут стоять на оставшихся местах в любом порядке. Следовательно, количество кодов из шестизначных чисел, с пятеркой на конце, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Пример 2. Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

Решение. Будем считать выделенные книги за одну книгу. Тогда уже для шести книг существует $P_6=6!=720$ перестановок. Однако четыре определенные книги можно переставить между собой $P_4=4!=24$ способами. По правилу умножения имеем

$$P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280.$$

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 1: Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если каждая цифра в изображении числа встречается один раз?

Задача 2: Сколькими способами можно обить 6 стульев тканью, если имеются ткани 6 различных цветов и все стулья должны быть разного цвета.

Задача 3: Дачник выделил на своём участке семь грядок для выращивания овощей, т.к. хочет иметь свои помидоры, огурцы, перец, лук, чеснок, салат и кабачки. Каждый вид должен иметь отдельную грядку. Сколькими способами он может расположить грядки для посадки?

Задача 4: Пассажирский поезд состоит из трех багажных вагонов и восьми купированных. Сколькими способами можно сформировать состав, если багажные вагоны должны находиться в его начале?

Задача 5: В первенстве края по футболу участвуют 11 команд. Сколько существует различных способов распределения мест в таблице розыгрыша, если на первое место могут претендовать только 4 определенные команды?

Задача 6: Четыре мальчика и четыре девочки рассаживаются в ряд на восемь подряд расположенных мест, причем мальчики садятся на четные места, а девочки – на нечетные. Сколькими способами они могут это сделать?

Задача 7: Сколькими способами можно посадить за круглый стол трех мужчин и трех женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 86

Название практической работы: *Решение задач на перебор вариантов.*

Цель работы: Закрепить навыки применения комбинаторных формул при решении прикладных задач.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

–

–

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

предметные: ПРб 08, ПРу 02, ПРу 03, ПРу 04, ПРу 12, ПРу13, ПРу 18.

знания: Понятие о перестановках.

умения: Вычисление числа комбинаций с помощью формул и правил комбинаторики.

Ход работы:

Два основных правила комбинаторной теории

Теория комбинаторики зиждется на двух основных принципах – это правило сложения и правило умножения. Рассмотрим их подробнее.

Правило сложения: Пусть объект А мы можем выбрать из множества m способами, а объект В можно выбрать n способами, то объект «А+В» можно выбрать $m+n$ способами.
Рассмотрим пример – *пусть в одном ящике есть m шариков, а во втором ящике – n шариков. Сколькими способами можно вытащить шарик из одного этих ящиков*. Очевидно, что ОДИН шарик можно достать $m+n$ способами.
Правило умножения: Пусть объект А выбирается m способами, объект В выбирается n способами, то оба объекта можно выбрать mn способами.
Все очень просто – каждый из m способов выбора объекта А комбинируется с каждым из n способов выбора объекта В, то есть количество способов просто умножается друг на друга.
Рассмотрим простой пример: *сколько чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, если число должно быть двузначным?*
Можно составить 90 чисел – первую цифру числа (объект А) можем выбрать 9 способами, так как число не может начинаться с нуля. Вторую цифру числа (объект В) можем выбрать 10 способами, так как у нас есть 10 цифр. Итого получается $9*10=90$ чисел.
Задачи для самостоятельного решения:
Задача 1. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?
Задача 2. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?
Задача 3. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?
Задача 4. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?
Задача 5. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.
Задача 6. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?
Задача 7. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?
Задача 8. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?
Задача 9. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове Гора и Институт?
Задача 10. Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 87

Название практической работы: *Выполнение операций над случайными событиями.*

Цель работы: Закрепить навыки выполнения операций над случайными событиями.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные: МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.
предметные: ПРб 07, ПРб 08, ПРу 02, ПРу 03, ПРу 04, ПРу 12, ПРу 13, ПРу 18.

знания: понятие случайного события и операций над случайными событиями.

умения: выполнение операций над случайными событиями.

Ход работы:

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*.

В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, *невозможным*.

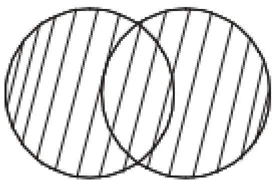
События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

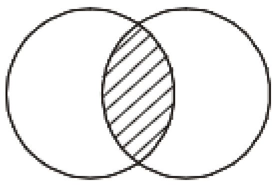
Суммой двух событий А и В (обозначается А+В) называется событие, состоящее из всех исходов, входящих либо в А, либо в В . Другими словами, под А+В понимают следующее событие: произошло или событие А, или событие В, либо они произошли одновременно, т.е. произошло хотя бы одно из событий А или В.

Произведением двух событий А и В (обозначается АВ) называется событие, состоящее из тех исходов, которые входят как в А, так и в В. Иными словами, АВ означает событие, при котором события А и В наступают одновременно.

$A+B$



AB



Задание для самостоятельного решения:

Пусть А, В, С — три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из А, В, С:

1. Произошло только А.
2. Произошло А и В, но С не произошло.
3. Все три события произошли.
4. Произошло, по крайней мере, одно из событий.
5. Произошли, по крайней мере, два события.
6. Произошло одно и только одно событие.
7. Произошли два и только два события.
8. Ни одно событие не произошло.
9. Произошло не более двух событий.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 88

Название практической работы: *Вычисление вероятностей с помощью теоремы сложения.*

Цель работы*:* Закрепить навыки вычисления вероятностей с помощью теоремы сложения.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные**:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные**:** ПРб 07, ПРб 08, ПРу 02, ПРу 03, ПРу 04, ПРу 12, ПРу 13, ПРу 18.

знания:

- понятие совместных и несовместности событий;
- теорема сложения вероятностей.

умения: вычисление вероятностей с помощью теоремы сложения вероятностей**.**

Ход работы:

Вероятность несовместных событий

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Пример 1.

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие *A*).

Решение:

очевидно, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: *B* – одна деталь стандартная, две нестандартные; *C* – две детали стандартные, одна нестандартная; *Д* – три детали стандартные.

Т.о., событие *A* можно представить в виде суммы этих трех событий: $A=B+C+Д$.

Тогда $P(A)=P(B)+P(C)+P(Д)$.

Вычислим вероятность каждого события:

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_5^2}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 1\cdot 2}=\frac{35}{76}$$

$$P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 15\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{5}{38}$$

$$P(Д)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{1}{114}$$

Итак,

$$P(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}=0{,}601$$

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Пример 2.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?
Решение:
пусть A – число кратно 3, B – число кратно 5. Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, …, 98, 99. Из них 30 – кратные 3, 18 – кратные 5 и шесть чисел одновременно кратны и 3 и 5, поэтому:

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5},\ P(AB)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}.$$

Т.к. A и B совместные события, то по формуле имеем:

$$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}=0{,}467.$$

Задания для самостоятельного решения:
Решите задачи, используя теоремы сложения, умножения вероятностей:
1) В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?
2) Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими учащимися равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.
3) Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность следующих событий:
а) только одно отделение получит газеты вовремя;
б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.
4) Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 89

Название практической работы: *Вычисление вероятностей с помощью теоремы умножения.*

Цель работы: Закрепить навыки вычисления вероятностей с помощью теоремы умножения.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 07, ПРб 08, ПРу 02, ПРу 03, ПРу 04, ПРу 12, ПРу 13, ПРу 18.

знания:

- понятие независимости событий;
- теорема умножения вероятностей.

умения: вычисление вероятностей с помощью теоремы умножения вероятностей**.**

Ход работы:

Событие B называют *независимым от события A*, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:
$P_A(B) = P(B)$.
Итак, если событие B не зависит от события A, то событие A не зависит от события B; это означает, что *свойство независимости событий взаимно*.
Для независимых событий теорема умножения имеет вид:
$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$,
т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.
Два события называют *независимыми*, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.
На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.
Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы. Например, события A, B, C попарно независимы, если независимы события A и B, A и C, B и C.
Пример 1.
Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один – в красный цвет (A), один – в синий цвет (B), один – в черный цвет (C) и один – во все эти три цвета (ABC). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?
Решение:
т.к. из четырех шаров два имеют красный цвет, то $P(A)=2/4=1/2$.
Рассуждая аналогично, найдем $P(B)=1/2$, $P(C)=1/2$.
Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие B уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события A?
Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события A по-прежнему равна 1/2. Другими словами, условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Следовательно, события A и B независимы.
Аналогично придем к выводу, что события A и C, B и C независимы. Итак, события A, B и C попарно независимы.
Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет.
Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет.
Т.о., допустив, что события B и C произошли, приходим к выводу, что событие A обязательно наступит. Следовательно, это событие достоверное и вероятность его равна единице.
Другими словами, условная вероятность $P_{BC}(A)=1$ события A не равна его безусловной вероятности $P(A)=1/2$. Итак, попарно независимые события A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:
$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\dots\cdot P(A_n)$.

Пример 2.
Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.
Решение:
вероятность появления герба первой монеты (событие A): $P(A)=1/2$.
Вероятность появления герба второй монеты (событие B): $P(B)=1/2$.
События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна:
$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=1/2\cdot 1/2=1/4$.

Пример 3.
Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.
Решение:
вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A):
$P(A)=8/10=0{,}8$.
Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B):
$P(B)=7/10=0{,}7$.
Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C):
$P(C)=9/10=0{,}9$.
Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна:
$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504$.

Задания для самостоятельного решения:
Решите задачи:
1) Вероятность того, что в магазине будет продана пара мужской обуви 44-го размера, равна 0,12; 45-го – 0,04; 46-го и большего – 0,01. Найти вероятность того, что будет продана пара мужской обуви не меньше 44-го размера.
2) При условиях задачи 1 найти вероятность того, что очередной будет продана пара обуви меньше 44-го размера.
3) В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении при условии, что извлеченный в первый раз резец в ящик не возвращается.
4) В урне находятся 5 белых шаров, 4 черных и 3 синих. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором - черный (событие B) и при третьем – синий (событие C).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 90

Название практической работы: *Составление закона распределения дискретной случайной величины и вычисление ее числовых характеристик.*

Цель работы*:* Научиться составлять закон распределения ДСВ.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

метапредметные**:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

предметные**:** ПРб 07, ПРб 08, ПРу 02, ПРу 03, ПРу 04, ПРу 12, ПРу 13, ПРу 18.

знания:

- Понятие ДСВ и её ряда распределения;
- Числовые характеристики ДСВ.

умения:

- Составление ряда распределения ДСВ;
- Вычисление числовых характеристик ДСВ.

Ход работы:

Случайное событие может состоять, в частности, в появлении некоторого числа, значение которого не может быть однозначно определено условиями его возникновение. Такие события называют случайными величинами. В этой трактовке мы сохраняем классический подход к понятию случайного события. Однако требование корректности в построении математических теорий заставляет нас вновь обратиться к аксиоматическому подходу, сохранив классические модели в качестве наглядных образцов из сферы практических приложений.

Математически корректно определить случайную величину как числовую функцию, заданную в пространстве элементарных событий.

Предположим вначале, что пространство элементарных событий является конечным множеством. Соответствующую ему случайную величину называют дискретной: она может принимать лишь конечное число значений, каждому из которых может быть сопоставлена вероятность его появления в опыте. Поэтому дискретные случайные величины можно задать таблицей вида:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Здесь буквой X обозначена случайная величина, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень всех ее возможных значений, а $p_1, \ldots, p_n$ – соответствующие им вероятности. Такую таблицу называют законом распределения дискретной случайной величины.

События $X=x_i$, (i=1, 2, ,3, …, n) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1$.

Пример.

Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 руб. и одна вещь стоимостью 30 руб. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из 50.

Решение:

искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать значения: 0, 5, 30 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату – 2 случая и третьему – 1 случай. Найдем их вероятности:

$P(x_1)$=47/50=0,94;
$P(x_2)$=2/50=0,04;
$P(x_3)$=1/50=0,02.
Тогда закон распределения случайной величины имеет вид:

X_i	0	5	30
p_i	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем $p_1+p_2+p_3$=0,94+0,04+0,02=1.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2) Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

2 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

2) Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

3 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	10	20	30	40
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2) Игральную кость бросают дважды. Случайная величина X – сумма очков при обоих подбрасываниях. Составить таблицу распределения вероятностей.

4 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	5	104	15	20
p	0,1	0,3	0,2	0,4

2) В коробке находятся 7 карандашей, из которых 4 – красные. Наудачу берут три карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 91

Название практической работы: *Решение практических задач на обработку числовых данных, вычисление их характеристик.*

Цель работы: Закрепить навыки вычисления числовых характеристик ДСВ при решении практических задач.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов
-
-

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 19, МРК 10, МРК 11, МРР 02, МРР 09.

***предметные*:** ПРб 07, ПРб 08, ПРу 02, ПРу 03, ПРу 04, ПРу 12, ПРу 13, ПРу 18.

знания: формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины;

умения: вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины.

Ход работы:

Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.

Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.

Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда ее *математическое ожидание M(X)* определяется равенством

$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$.

Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.

Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, Pi=1/6. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно

$M(X)$ = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3,5.

Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.

Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.

Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$D\{X) = M[X- M(X)]^2$.

Так же дисперсию можно вычислить и по формуле:

$D\{X) = M(X^2)- [M(X)]^2$,

т. е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата её математического ожидания.

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда, если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность м^2. Поэтому вводится еще одна характеристика, называемая *средним квадратическим отклонением*, обозначается: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Пример.

Пусть X – число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.

Решение:

случайная величина X – число очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составим закон её распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда её математическое ожидание:

M(X)= $1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$.

Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

x_1^0=1-3,5; x_2^0=2-3,5; x_3^0=3-3,5; x_4^0=4-3,5; x_5^0=5-3,5; x_6^0=6-3,5.

Вычислим дисперсию:

$$D(X) = \frac{1}{6}((1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 + (5-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2) = \frac{35}{12}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант

1) Монету подбрасывают 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа появлений герба.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2 вариант

1) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	4	7	10	13
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2) Монету подбрасывают 6 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения «решки».

4 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	2	3	4	5
p	0,15	0,17	0,35	0,21	0,12

2) Монету подбрасывают 5 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения герба.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 92

Название практической работы: *Определение комплексного числа. Выполнение операций над комплексными числами в алгебраической форме.*

Цель работы: Научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРу 11.

знания:

– Понятие комплексного числа.

– Операции над комплексными числами в алгебраической форме.

умения: Вычисление суммы, разности произведения и частного комплексных чисел в алгебраической форме.

Ход работы:

Комплексными числами называются числа вида $a+bi$, где a и b - действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2=-1$, называется мнимой единицей, если для этих чисел понятия равенства и действия сложения и умножения определены следующим образом:

1) два комплексных числа a_1+b_1i и a_2+b_2i называются *равными*, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$;

2) *суммой* двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$;

3) *произведением* двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число $(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$.

Запись комплексного числа в виде $z=a+bi$ называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Действительное число a называется действительной частью комплексного числа $z=a+bi$, а действительное число b - мнимой частью.

Комплексное число $a-bi$ называется комплексно сопряженным с числом $a+bi$ и обозначается $\bar{z}$, т.е. $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$.

Комплексные числа вида $a+bi$ и $-a-bi$ называются противоположными.

Рассматривая *вычитание* и *деление* комплексных чисел как действия, обратные соответственно сложению и умножению, получаем правила вычитания и деления комплексных чисел:

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i;$$

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

Пример 1.

Выполнить действия: 1) $(4+2i)+(1+5i)$; 2) $(3+5i)-(6+3i)$.

Решение. 1) По правилу сложения комплексных чисел получим

$(4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5)i=5+7i$.

2) По правилу вычитания комплексных чисел получим

$(3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i=-3+2i$.

Пример 2.

Выполнить действия: 1) $2i\cdot 3i$; 2) $(2-3i)(2+3i)$; 3) $(5-4i)(3+2i)$.

Решение. 1) $2i\cdot 3i=6i^2=-6$;

2) $(2-3i)(2+3i)=4-9i^2=4+9=13$;

3) По правилу умножения комплексных чисел получим

$(5-4i)(3+2i)=[5\cdot 3-(-4)\cdot 2]+i[5\cdot 2+3(-4)]=23-2i$.

Можно произвести умножение по правилу умножения многочленов:

$(5-4i)(3+2i)=15+10i-12i+8=23-2i$.

Пример 3.

Выполнить действия: 1) $\frac{2}{3i}$; 2) $\frac{1}{1+i}$; 3) $\frac{1+i}{1-i}$; 4) $\frac{2-3i}{4+5i}$.

Решение. 1) Умножив делимое и делитель на i, получим

$$\frac{2}{3i}=\frac{2i}{3i\cdot i}=\frac{2i}{-3}=-\frac{2}{3}i.$$

2) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1-i^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

3) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$.

4) $\frac{2-3i}{4+5i}=\frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{8-10i-12i+15i^2}{16+25}=\frac{-7-22i}{41}=-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i$.

Пример 4.

Вычислить $(1+i)^8$.

Решение. Используя соотношение $(1+i)^2=2i$, получим $(1+i)^8=\left[(1+i)^2\right]^4=(2i)^4=16i^4=16$.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполните действия: 1) $(3+i)+(-3-8i)$; 2) $(5-4i)+(7+4i)$; 3) $(-6+2i)+(-6-2i)$; 4) $(0{,}2+0{,}1i)+(0{,}8-1{,}1i)$; 5) $(2-3i)+(5+6i)+(-3-4i)$; 6) $(1-i)-(7-3i)-(2+i)+(6-2i)$.
2. Вычислите: 1) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$; 2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5$; 3) $i+i^{11}+i^{21}+i^{31}+i^{41}$; 4) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$; 5) $\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}$; 6) $\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}$.
3. Выполните действия: 1) $-i\sqrt{5}\cdot 4i\sqrt{5}$; 2) $(5-3i)\cdot 2i$; 3) $(3+4i)(3-4i)$; 4) $(5+3i)(2-5i)$; 5) $(-2-i)(1+i)$; 6) $4+2i+(-1+6i)(6-i)$; 7) $(3-2i)(5+4i)-7i+1$; 8) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)$; 6) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}5+0{,}4i)$.
4. Выполните действия: 1) $\frac{1}{i}$; 2) $\frac{1}{1-i}$; 3) $\frac{1-i}{1+i}$; 4) $\frac{3-2i}{1+3i}$; 5) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$; 6) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$; 7) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$; 8) $\frac{a+bi}{a-bi}$; 9) $\frac{(a+bi)(b+ai)}{b-ai}$; 10) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$; 11) $\frac{1-3i}{i-2}+\frac{4i+1}{3i-1}$; 12) $\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}$.
5. Разложите на комплексные множители: 1) m^2+n^2; 2) $4m^2+9n^2$; 3) $\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{16}$; 4) $m+n$; 5) $2+\sqrt{3}$; 6) $1+\sin^2\alpha$; 7) 3.
6. Вычислите: 1) $(1-i)^{12}$; 2) $(1+i)^{17}$; 3) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2$; 5) $(1+i)^{-2}$; 6) $(1-i)^{-3}$; 7) $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 93

Название практической работы: *Выполнение операций над комплексными числами в тригонометрической форме.*

Цель работы*:* Научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

– ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРу 11.

знания:

– Понятие комплексного числа.
– Операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

умения: Вычисление суммы, разности произведения и частного комплексных чисел в тригонометрической форме.

Ход работы:

Число вида $z = \alpha + i\beta$, где α, β- действительные числа, аi- мнимая единица, определяемая равенством: $i^2 = -1$, называется *комплексным числом*.α- действительная часть комплексного числа, β- мнимая часть комплексного числа.

Модулем комплексного числа $z = \alpha + i\beta$:$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Запись комплексного числа в виде $z = a + ib$ называется алгебраической формой записи комплексного числа. Часто бывает удобна другая форма записи комплексного числа. Пусть $z = a + bi, r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$и$\varphi = \arg z$. Тогда по определению аргумента имеем:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$$

Отсюда получается $z = a + bi = r(\cos\varphi + isin\varphi)$

Такая форма называется тригонометрической формой записи комплексного числа. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

Пример 1 **:** Записать число $z = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Найдём модуль этого числа:$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ Аргумент данного числа находится из системы $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Значит, один из аргументов числа $z = 1 - \sqrt{3}i$ равен $-\frac{\pi}{3}$.

Получаем: $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Умножение, деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме определяются следующим образом:

если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

1) $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$, если $r_2 \neq 0$;

если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in N$, то

3) $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,2,...n-1$.

В ответ записываются главные значения аргумента полученного результата, заключенные в промежутке $(-\pi; \pi]$.

Пример 2**.** Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:

а) $z_1 \cdot z_2$;б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) $z_2{}^6$, если $z_1 = 3(cos75° + isin75°)$ и $z_2 = 2(cos15° + isin15°)$

а)$z_1 \cdot\ z_2 = 3(cos75° + isin75°) \cdot 2(cos15° + isin15°) =$

$$= 6\left(cos(75° + 15°) + isin(75° + 15°)\right) = 6(cos90° + isin90°) = 6i$$

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3(cos75°+isin75°)}{2(cos15°+isin15°)} = \frac{3}{2}\left(cos(75° - 15°) + isin(75° - 15°)\right) =$

$$= \frac{3}{2}(cos60° + isin60°) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

в)${z_2}^6 = \left(2(cos15° + isin15°)\right)^6 = 2^6\left(cos(6 \cdot 15°) + isin(6 \cdot 15°)\right) =$

$$= 64(cos90° + isin90°) = 64i$$

Пример 3. Найти $\sqrt[4]{-16}$

Представим в тригонометрической форме – 16:

Найдём модуль этого числа:$|z| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16$ Аргумент данного числа находится из системы $\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{16}{16} = -1 \\ \sin\varphi = \frac{0}{16} = 0 \end{cases}$

Значит, один из аргументов числа $z = -16$равен π.

Получаем: $z = 16(\cos\pi + isin\pi)$.

Найдем корень: $\sqrt[4]{-16}$=$\sqrt[4]{16(\cos\pi + isin\pi)} = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + isin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)$

Найдем различные корни:

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi + 0}{4} + isin\frac{\pi + 0}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{4} + isin\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{4} + isin\frac{\pi + 4\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$k = 3 \Rightarrow z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi + 6\pi}{4} + isin\frac{\pi + 6\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел		
1. Выполнить действия над числами в тригонометрической форме: а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) ${z_2}^n$		
$z_1 = 2(cos5° + isin5°)$	$z_1 = 2(cos15° + isin15°)$	$z_1 = 5(cos160° + isin160°)$

$z_2 = 3(cos40° + isin40°)$ $n=3$	$z_2 = 10(cos105° + isin105°)$ $n=3$	$z_2 = 2(cos20° + isin20°)$ $n=6$
2.Выполнить действия в тригонометрической форме и представить результат в тригонометрической и алгебраической формах		
$\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-4}$	$\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{3}$	$\left((\sqrt{3}-i)(-1+i)\right)^{6}$
3. Найти значения корней		
$\sqrt[3]{-1}$	$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[3]{8i}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 94

Название практической работы: *Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.*

Цель работы: Научиться решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом

Результаты:

Формируемые элементы ПК (профессионально ориентированное содержание):

- ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

***метапредметные*:** МРП 01, МРП 02, МРП 03, МРП 05, МРП 12, МРП 13, МРП 21, МРК 11, МРР 02.

***предметные*:** ПРу 11.

знания:

- Понятие комплексного числа и операций над ними.
- Формулы для нахождения корней квадратного уравнения.

умения: Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

Ход работы:

Содержание работы:

Квадратным уравнением называется уравнение вида: $ax^2 + bx + c = 0$, в общем случае для его решения необходимо вычислить дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$ и найти корни:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Если дискриминант отрицательный, то необходимо учесть, что $\sqrt{-1} = i$.

Пример 1.

На множестве комплексных чисел решить квадратные уравнения:

а) $x^2 + 1 = 0$; б) $5x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решение: а) $x^2 + 1 = 0$, т.к. это неполное квадратное уравнение, то

$x^2 = -1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x_{1,2} = \pm i.$

б) $5x^2 + 3x + 1 = 0$. Для решения этого уравнения вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -11 < 0$, тогда $\sqrt{D} = \sqrt{-11} = \sqrt{11} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{11}i$. А корни квадратного уравнения найдём по формуле $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2\cdot5} = \frac{-3\pm\sqrt{11}i}{10} = \frac{-3}{10} \pm \frac{\sqrt{11}i}{10}$.

Аналогичным образом, решаются квадратные уравнения с комплексными коэффициентами.
Пример 2.
На множестве комплексных чисел решить квадратное уравнение: $z^2 - 8iz - 15 = 0$
Решение: Выпишем коэффициенты: $a = 1, b = -8i, c = -15$, тогда $D = b^2 - 4ac = (-8i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = -64 + 60 = -4 < 0$, тогда $\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$. А корни квадратного уравнения найдём по формуле: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{8i \pm 2i}{2 \cdot 1}$. Следовательно, $z_1 = \frac{8i+2i}{2} = \frac{10i}{2} = 5i$, $z_2 = \frac{8i-2i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$.

Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения:
1. $x^2 + 16 = 0$
2. $x^2 - 2x + 4 = 0$
3. $x^2 - 6x + 10 = 0$
4. $4x^2 + 4x + 5 = 0$
5. $x^4 + 16 = 0$
6. $z^2 - iz + 2 = 0$
7. $z^2 - (3 + 2i)z + 6i = 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Основные печатные издания

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник / М. И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – Москва : Академия, 2022. – 254 с. : ил. – (Профессиональное образование). – URL: https://academia-moscow.ru/reader/?id=351069 (дата обращения: 12.03.2020). – ISBN 978-5-4468-7084-4. – Текст : электронный.

2. Основные электронные издания

1. Учебный онлайн курс. Алгебра и начала математического анализа, 10 класс. Базовый уровень // Мобильное электронное образование: [сайт]. – 2022. - URL: https://k05ui.mob-edu.ru/ui/#/course/12 (дата обращения: 31.01.2023). - Режим доступа: для зарегистрир. пользователей

2. Учебный онлайн курс. Алгебра и начала математического анализа, 10 класс. Углублённый уровень // Мобильное электронное образование: [сайт]. – 2022. - URL: https://k05ui.mob-edu.ru/ui/#/course/13 (дата обращения: 31.01.2023). - Режим доступа: для зарегистрир. пользователей

3. Учебный онлайн курс. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс. Базовый уровень // Мобильное электронное образование: [сайт]. – 2022. - URL: https://k05ui.mob-edu.ru/ui/#/course/14 (дата обращения: 31.01.2023). - Режим доступа: для зарегистрир. пользователей

4. Учебный онлайн курс. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс. Углублённый уровень // Мобильное электронное образование: [сайт]. – 2022. - URL: https://k05ui.mob-edu.ru/ui/#/course/15 (дата обращения: 31.01.2023). - Режим доступа: для зарегистрир. пользователей