Министерство образования и науки Челябинской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Южно-Уральский государственный технический колледж»

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации
по выполнению практических работ

для студентов специальности

38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет
(по отраслям)
(учебный план 2023г.)

Челябинск, 2023

АКТ СОГЛАСОВАНИЯ

на методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» составлены для студентов очной формы обучения специальности среднего профессионального образования 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), разработанных преподавателем ГБПОУ «Южно-Уральский государственный технический колледж» Макаренко О.И.

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» составлены для студентов очной формы обучения, в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины.

Настоящие методические рекомендации рассчитаны на 20 часов, обеспечивающих подготовку квалифицированных специалистов среднего звена по профессиям экономического профиля.

Автором разработана структура методических рекомендаций по выполнению практических работ, последовательность выполнения практических заданий, необходимый теоретический материал, содержание практических работ, а также перечень контрольных вопросов по каждой работе.

Контроль и оценка результатов выполненных практических работ по учебной дисциплине «Математика» осуществляется различными формами и методами.

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» могут быть использованы в общеобразовательных учреждениях СПО для студентов очной формы обучения специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

Главный бухгалтер ООО Пусконаладочная компания «Южуралэлектромонтаж»

_______________ /М.А. Дмитриева/

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (ФГОС 2018).

Практические занятия являются важным элементом учебной дисциплины. В процессе выполнения практических работ обучающиеся систематизируют и закрепляют полученные теоретические знания, развивают интеллектуальные и профессиональные умения, формируют элементы компетенций будущих специалистов.

Методические рекомендации предназначены для организации выполнения практических работ по учебной дисциплине «Математика».

Программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено выполнение 12 практических работ, направленных **на формирование *элементов следующих компетенций*:**

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

***умений*:**

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

обобщение, систематизацию, углубление и закрепление *знаний*:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Личностные результаты реализации программы воспитания *(дескрипторы)*	**Код личностных результатов реализации программы воспитания**
Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».	**ЛР 4**
Осознающий приоритетную ценность личности человека; уважающий собственную и чужую уникальность в различных ситуациях, во всех формах и видах деятельности.	**ЛР 7**

Личностные результаты реализации программы воспитания, определенные отраслевыми требованиями к деловым качествам личности	
Готовый соответствовать ожиданиям работодателей: проектно-мыслящий, эффективно взаимодействующий с членами команды и сотрудничающий с другими людьми, осознанно выполняющий профессиональные требования, ответственный, пунктуальный, дисциплинированный, трудолюбивый, критически мыслящий, нацеленный на достижение поставленных целей; демонстрирующий профессиональную жизнестойкость	**ЛР 14**

В методических указаниях к выполнению практических работ содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая практическая работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий.

Ход выполнения практической работы

Практические работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. В тетрадях для практических работ выполнить самостоятельную работу или решить номера, которые указаны в работе.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Критерии оценивания практических работ

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

Перечень практических работ

№ работы	Наименование практических работ	Кол-во часов
1.	Выполнение операций над комплексными числами в различных формах.	2
2.	Вычисление ранга матрицы.	
3.	Решение систем линейных уравнений различными методами	2

4.	Раскрытие различных неопределённостей	2
5.	Вычисление производных сложных функций и высших порядков	2
6.	Исследование функции с помощью производной.	2
7.	Вычисление неопределённых интегралов	2
8.	Вычисление определённых интегралов. Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур	2
9.	Решение дифференциальных уравнений	2
10.	Решение вероятностных задач.	2
11.	Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм.	2
12.	Решение задач линейного программирования графическим методом	2
ВСЕГО		24

Практическая работа № 1

Выполнение операций над комплексными числами в различных формах.

Цель работы:

Научиться выполнять операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

Знания:

1. Понятие комплексного числа.

Умения:

1. Выполнение операций над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

2. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

Содержание работы:

Число вида $z = \alpha + i\beta$, где α, β- действительные числа, аi- мнимая единица, определяемая равенством: $i^2 = -1$, называется *комплексным числом.*α- действительная часть комплексного числа, β- мнимая часть комплексного числа.

Модулем комплексного числа $z = \alpha + i\beta$:$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Числа $z = \alpha + i\beta$ и $z = \alpha - i\beta$ называются *сопряженными.*

Для того, чтобы *сложить или вычесть* два комплексных числа в алгебраической форме нужно соответственно сложить или вычесть их действительные и мнимые части.

Пример: Найти сумму и разность чисел: $z_1 = 1 - 2i \quad z_2 = 3 + i$

$$z_1 + z_2 = (1 - 2i\ ) + (3 + i\ ) = (1 + 3) + (-2 + 1)i = 4 - i$$

$$z_1 - z_2 = (1 - 2i\ ) - (3 + i\ ) = (1 - 3) + (-2 - 1)i = -2 - 3i$$

Для того, чтобы *умножить* два комплексных числа в алгебраической форме нужно перемножить их как многочлены и учесть при этом, что $i^2 = -1$.

Пример: Найти произведение чисел: $z_1 = 1 - 2i \quad z_2 = 3 + i$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i\ ) \cdot (3 + i\ ) = 3 + i - 6i - 2i^2 = 3 - 5i + 2 = 5 - 5i$$

Для нахождения частного комплексных чисел $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ и $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ сначала числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$умножают на сопряженное знаменателю число$\overline{z_2} = \alpha_2 - i\beta_2$, а затем производят остальные действия.

Пример: Найти частное чисел: $z_1 = 1 - 2i \quad z_2 = 3 + i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3+i} = \frac{(1-2i\ )(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-6i-i+2i^2}{9-i^2} = \frac{3-7i-2}{9+1} = \frac{1-7i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i=0{,}1 - 0{,}7i$$

Запись комплексного числа в виде $z = a + ib$ называется алгебраической формой записи комплексного числа. Часто бывает удобна другая форма записи комплексного числа. Пусть $z = a + bi, r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$и$\varphi = \arg z$. Тогда по определению аргумента имеем:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$$

Отсюда получается $z = a + bi = \ r(\cos\varphi + isin\varphi)$

Такая форма называется тригонометрической формой записи комплексного числа. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

*Пример:*Записать число $z = 1 - \sqrt{3}i$в тригонометрической форме.

Найдём модуль этого числа:$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ Аргумент данного числа находится из системы $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Значит, один из аргументов числа $z = 1 - \sqrt{3}i$равен $-\frac{\pi}{3}$.

Получаем: $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Умножение, деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме определяются следующим образом:

если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

1) $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$, если $r_2 \neq 0$;

если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in N$, то

3) $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,2,...n-1$.

В ответ записываются главные значения аргумента полученного результата, заключенные в промежутке $(-\pi; \pi]$.

Пример: Выполнить действия над числами в тригонометрической форме:

а) $z_1 \cdot z_2$;б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) $z_2{}^6$, если $z_1 = 3(cos75° + isin75°)$ и $z_2 = 2(cos15° + isin15°)$

а)$z_1 \cdot\ z_2 = 3(cos75° + isin75°) \cdot 2(cos15° + isin15°) =$

$$= 6\left(cos(75° + 15°) + isin(75° + 15°)\right) = 6(cos90° + isin90°) = 6i$$

б)$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3(cos75°+isin75°)}{2(cos15°+isin15°)} = \frac{3}{2}\left(cos(75° - 15°) + isin(75° - 15°)\right) =$

$$= \frac{3}{2}(cos60° + isin60°) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

в)$z_2{}^6 = \left(2(cos15° + isin15°)\right)^6 = 2^6\left(cos(6 \cdot 15°) + isin(6 \cdot 15°)\right) =$

$$= 64(cos90° + isin90°) = 64i$$

Пример: Найти $\sqrt[4]{-16}$

Представим в тригонометрической форме – 16:

Найдём модуль этого числа:$|z| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16$ Аргумент данного числа находится из системы $\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{16}{16} = -1 \\ \sin\varphi = \frac{0}{16} = 0 \end{cases}$

Значит, один из аргументов числа $z = -16$равен π.

Получаем: $z = 16(\cos\pi + isin\pi)$.

Найдем корень: $\sqrt[4]{-16}$=$\sqrt[4]{16(\cos\pi + isin\pi)} = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + isin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)$

Найдем различные корни:

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi + 0}{4} + isin\frac{\pi + 0}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{4} + isin\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$k=2 \Rightarrow z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + isin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$
$$k=3 \Rightarrow z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + isin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел		
$z_1 = -2 - 3i$ $z_2 = 1 + 2i$	$z_1 = 3 - 2i$ $z_2 = 2 - i$	$z_1 = -3 + 4i$ $z_2 = 1 + 3i$
2. Вычислить		
$i^{14} - i^{15} - i^{16}$	$i^{18} + i^{19} - i^{20}$	$i^{16} - i^{17} + i^{18}$
3. Определить, при каких действительных значенияхxиyкомплексные числа z_1 и z_2будут равны		
$z_1 = y^2 + 10y + xi$ $z_2 = 1 - i + x^2 i$	$z_1 = y^2 - 10y + 2xi$ $z_2 = 1 - 2i + x^2 i$	$z_1 = y^2 + 9y - 2xi$ $z_2 = 2 - 3i + x^2 i$
4. Решить уравнение		
$x^2 + 2x + 2 = 0$	$x^2 - 4x + 13 = 0$	$x^2 + 18x + 82 = 0$
5. Решить уравнение		
$\|z\| + z = 2 + i$	$z - \|z\| = 4 + 3i$	$z^2 + \|z\| = 0$
6. Выполнить действия над числами в тригонометрической форме: а) $z_1 \cdot z_2$;б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) ${z_2}^n$		
$z_1 = 2(cos5° + isin5°)$ $z_2 = 3(cos40° + isin40°)$ n=3	$z_1 = 2(cos15° + isin15°)$ $z_2 = 10(cos105° + isin105°)$ n=3	$z_1 = 5(cos160° + isin160°)$ $z_2 = 2(cos20° + isin20°)$ n=6
7. Выполнить действия в тригонометрической форме и представить результат в тригонометрической и алгебраической формах		
$\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-4}$	$\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$	$\left((\sqrt{3}-i)(-1+i)\right)^6$
8. Найти значения корней		
$\sqrt[3]{-1}$	$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[3]{8i}$

Практическая работа № 2

Вычисление ранга матрицы

Цель работы:

1. Научиться вычислять ранг матрицы.

Знания

1. Понятие ранга матрицы.
2. Методы вычисления ранга матрицы.

Умения:

1. Вычисление ранга матрицы.

Содержание работы:

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Пусть в матрице А размера m×nвыбраны произвольно k строк и k столбцов ($k \le \min(m,n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется минором k−го порядка матрицы А.

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы А **называется ее рангом**, а любой минор порядка r, отличный от нуля - базисным минором.

Основные методы вычисления ранга матрицы:

Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице найден минор k-го порядка М, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры (k+1)− го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор М: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор (k+1)−го порядка, и вся процедура повторяется.

Метод элементарных преобразований основан на том, что элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга. Используя эти преобразования матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы кроме $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ ($r \le \min(m,n)$), равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r.

Пример 1. Найти методом окаймления миноров ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Начинаем с миноров 1-го порядка, т.е. с элементов матрицы А. Выберем, например, минор (элемент) $M_1 = 1$, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$, отличный от нуля. Переходим теперь к минорам 3-го порядка, окаймляющим M_2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый). Вычисляем их: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы А равен двум.

Пример 2 Найти ранг матрицы$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Решение. Из второй строки вычтем первую и переставим эти строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix};$$

из третьей строки вычтем первую; получим матрицуВ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая эквивалентна матрице А, так как получена из нее с помощью конечного множества элементарных преобразований. Очевидно, что ранг матрицы В равен 2, а следовательно, и r(A)=2.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить ранг матрицы:

Вариант № 1	Вариант № 2	Вариант № 3
$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 70 \\ -2 & 5 & 02 \\ -1 & 2 & 72 \end{pmatrix}$	1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1\;2 \\ -3 & 2 & -1{-2} \\ 9 & -6 & 3\;6 \end{pmatrix}$	1. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0\;9 \\ -1 & -2 & 0{-3} \\ 0 & 4 & 4\;0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

Практическая работа № 3

Решение систем линейных уравнений различными методами

Цель работы:

1. Научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

2. Научиться решать системы линейных уравнений матричным методом.
3. Научиться решать системы уравнения методом Гаусса.

Знания:

1. Понятие системы линейных уравнений.
2. Матричный метод и метод Крамера.
3. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.

Умения:

1. Решение систем линейных уравнений матричным методом и методом Крамера.
2. Решение систем линейных уравнений матричным методом Гаусса.

Содержание работы:

Системой из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными называется система вида: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ (1)

1. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{b}_1 & a_{12} & a_{13} \\ \mathrm{b}_2 & a_{22} & a_{23} \\ \mathrm{b}_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{b}_1 & a_{13} \\ a_{21} & \mathrm{b}_2 & a_{23} \\ a_{31} & \mathrm{b}_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \mathrm{b}_2 \\ a_{31} & a_{32} & \mathrm{b}_3 \end{vmatrix}$

Пример: Решить систему $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ методом Крамера

Вычисляем определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 .$$

Чтобы получить определитель Δ_1, мы заменили в определителе Δ первый столбец на столбец из свободных членов; заменяя в определителе Δ 2-ой столбец на столбец из свободных членов, получаем Δ_2; аналогичным образом, заменяя в определителе Δ 3-ий столбец на столбец из свободных членов, получаем Δ_3. Решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1 .$$

Ответ: (1; 0; -1)

2. Запишем систему (I) в матричном виде $AX = B$, тогда решение ищем в виде: $X = A^{-1}B$ (при условии, что матрица А- невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$).*Пример:*Решить систему $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ с помощью обратной матрицы.

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 1 - 1 - 0 + 2 = 3 \neq 0$$

Найдем матрицу A^{-1}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 , \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 ,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{23} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 ,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ тогда } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ:(1; 0; -1)

3. Процесс решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Гаусса состоит из двух этапов.

Первый этап (прямой ход метода) – система приводится к треугольному виду.

Второй этап (обратный ход) – неизвестные определяются последовательно, начиная с последнего неизвестного и заканчивая первым.

Пример: Решить систему: $\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ 3x-y+5z=2, \\ x-2y+4z=3. \end{cases}$

Решение:

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \times(-2) & \times(-3) \\ \oplus & \oplus \\ & \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем $r(\overline{A})=3$, ранг матрицы системы также равен трем, r(A)=3 и число неизвестных n=3, следовательно, система определенная, т.е. имеет единственное решение.

2. Записываем уравнение, используя последнюю строку приведённой матрицы: *z=1.*

Из второй строки: *5y-7z = -7,* т.к. *z=1, то y= 0.*Из третьей строки: *x- 2y +4z=3,* т.к.*z =1 y = 0,* то*x = 1.*

Ответ: (-1,0,1)

*Пример:*Решить систему: $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3-4x_4=-10 \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-3x_4=2 \end{cases}$

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \times(-2) & \times(-3) \\ + & + \\ & \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 21 \\ 0 & -10 & 11 & 9 & 32 \end{array}\right) \times\frac{1}{7} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & 11 & 9 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times(-10) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -4 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

полученная расширенная матрица имеет ранг равный трем $r(\overline{A})=3$, ранг матрицы системы также равен трем, r(A)=3. Поскольку ранг рассмотренных матриц равен 3, а число неизвестных переменных 4, т. е. r=3< n= 4, то делаем вывод о неопределенности данной системы линейных уравнений (т.е. система имеет бесконечное множество решений).

Базисными переменными будут x_1, x_2, x_3 (соответствующие этим переменным коэффициенты находятся в уголках ступенек треугольной матрицы), а переменная x_4 будет свободной. Пусть $x_4 = C$, тогда

из третьей строки приведённой матрицы: $x_3 - x_4 = 2 \Rightarrow x_3 - C = 2 \Rightarrow x_3 = 2 + C$

из второй строки: $-x_2 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow -x_2 + 2 + C + C = 3 \Rightarrow x_2 = 2C - 1$

из первойстроки: $x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -10 \Rightarrow x_1 + 3(2C-1) - 4(2+C) - 4C = -10$

$x_1 + 6C - 3 - 8 - 4C - 4C = -10 \Rightarrow x_1 = 2C + 1$

Ответ: *(2C+1; 2C-1; C+2; C), C∈R*

Задания для самостоятельной работы:

Решить систему: а) методом Крамера; б) методом обратной матрицы;

1) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ 7x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 18 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 26 \\ x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19 \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$

7) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 17 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11 \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

Рнешить систему методом Гаусса:

1 $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3+5x_4=3, \\ 5x_1+2x_2-5x_3-3x_4=-1, \\ 7x_1-5x_2+3x_3+x_4=4. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=5, \\ 4x_1+3x_2-2x_3-x_4=2. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-2x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3-5x_4=3, \\ 3x_1-x_2-x_3-4x_4=3. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=4, \\ 3x_1+2x_2+4x_3-x_4=5. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4=5, \\ x_1+x_2-3x_3-2x_4=-7, \\ 2x_1-2x_2+4x_3-3x_4=-9. \end{cases}$

6 $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_4=2, \\ 2x_1-3x_2+2x_3-3x_4=-5, \\ 4x_1-x_2-4x_3+x_4=-1. \end{cases}$

7 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=5, \\ 3x_1-4x_2+3x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+x_2-2x_3+4x_4=4. \end{cases}$

8 $\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3-3x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+2x_3+2x_4=5, \\ 5x_1-8x_2+17x_3-19x_4=5. \end{cases}$

Практическая работа № 4

Раскрытие различных неопределённостей

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять пределы с различными видами неопределённостей.

Знания(актуализация):

1. Определения предела функции.

Умения:

1. Вычисление пределов функций: раскрытие неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty-\infty;\ 1^{\infty}\right]$.

Содержание работы:

Типы неопределённостей и их виды

1 тип Неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$*в пределе*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases} 0, \text{если} n<k \\ \infty, \text{если } n>k \\ \dfrac{a_n}{b_k}, \text{если } n>k \end{cases}$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+8}{2x^2-1}=\frac{5}{2}$(т.к. старшие степени числителя и знаменателя равны, то делим коэффициенты при старших степенях x).

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^{3}-3x+8}{2x^{2}-1}=\infty$(т.к. старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя)

2 тип Неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$*в пределе* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

Для раскрытия неопределённости необходимо либо разложить числитель и знаменатель на множители, либо умножить выражение содержащее корни на сопряжённое.

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^{2}-5x+6}{x^{2}-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}x^{2}-5x+6=0\\ x_{1}=2\quad x_{2}=3\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-2)}{(x+3)}=\left[\frac{3-2}{3+3}\right]=\frac{1}{6}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x+3-9}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}=\left[\frac{2}{3+3}\right]=\frac{1}{3}$

3 тип I-ый замечательный предел и основные эквивалентности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

При $x\to 0$ имеют место следующие неопределённости:

$$\sin x\sim x \qquad tg\, x\sim x \qquad \arcsin x\sim x \qquad arctg\, x\sim x$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^{2}}{2}\, e^{x}-1\sim x \qquad ln(1-x)\sim x$$

Примеры:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^{2}3x}{1-cos5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^{2}}{\frac{(5x)^{2}}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^{2}}{\frac{25x^{2}}{2}}=\frac{18}{25}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x^{2}-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(x-1)}=\frac{-1}{-1}=1$$

4 тип II -ой замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Примеры:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3}{x+1}-1\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3-x-1}{x+1}\right)^{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-4}}\right)^{\frac{-4}{x+1}\cdot(x-1)}=\lim_{x\to\infty}(e)^{\frac{-4x+4}{x+1}}=e^{4}$$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*
	«3»	
а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3}$	а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-8}{4x+2}$	а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x+2}{5x-1}$
б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3-2x}{x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x+5}{2x+7}$	б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1-8x}{4x+5}$
в) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-36}{x-6}$	в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$	в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$	г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x}$
д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$
	«4»	
а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$	а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x+5}{x^2+6}$	а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3+5x-2}$
б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8}$	б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}$	б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}$
в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}$	в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$	в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{\sin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin 3x}$
д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{2x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{3x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{5x}$
	«5»	
а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$	а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$	а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$
б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{8x^3-3x^2+2x}{4x^3-2x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-4x+5}{x^3+4}$	б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+2x-3}{300x-1000}$
в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$	в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin^2\frac{x}{5}}$	г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 4x}{\sin^2 x}$
д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{5x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{4x}$

Практическая работа № 5

Вычисление производных сложных функций и высших порядков

Цель работы:

Проверить умения нахождения производной сложной функции.

Знания:

1. Определение производной и её свойства.
2. Понятие сложной функции.
3. Формула вычисления производной сложной функции.

Умения:

1.Вычисление производной заданной сложной функции.

Содержание работы:

Таблица производных основных элементарных функций:

$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \neq 0)$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Основные правила нахождения производной:

$$(c)' = 0; \quad (x)' = 1; \quad (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (cu)' = cu'; \quad (uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Производная сложной функции

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, то $y = f(\varphi(x))$- сложная функции, тогда её производная вычисляется по формуле $y'_x = y'_u u'_x$, то есть $\left(f(\varphi(x))\right)' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$. Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: *производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.*

Примеры:

1.Найти производную сложной функции:$y = ln(x^3 - 3x^2 + 4x)$.

Положим $y = \ln u$, где $u = x^3 - 3x^2 + 4x$получим:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \left(ln(x^3 - 3x^2 + 4x)\right)' = \frac{1}{u} \cdot (x^3 - 3x^2 + 4x)' =$$
$$= \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 4x} \cdot (3x^2 - 6x + 4) = \frac{3x^2 - 6x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4x}$$

2. .Найти производную сложной функции:$y = cos^2 \frac{x}{6}$.

Положим $y = u^2, u = \cos v\,, v = \frac{x}{6}$, получим:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u \cdot (-\sin v) \cdot \frac{1}{6} = 2\cos\frac{x}{6} \cdot \left(-\sin\frac{x}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}\sin\frac{x}{3}$$

Задания для самостоятельной работы:

Вычислите производные сложных функций:

Вариант 1

1) $y = cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$2) $y = \sqrt{x^2 + 4}$3) $y = 2^{arcsinx^2}$ 4) $y = \ln\frac{2x-1}{2x+1}$5) $y = \frac{1}{(5x-1)^3}$

Вариант 2

1) $y = sin(2x^2 - 3x + 1)$ 2) $y = cos^3(2x - 1)$ 3) $y = \left(\sqrt{x} + \frac{x^2}{4}\right)^3$ 4) $y = \ln(\ln x)$ 5) $y = e^{arctg\,4x}$

Вариант 3

1) $y = cos(3x^2 - 4x)$ 2) $y = sin^3(1 - 2x)$ 3) $y = \left(x^2 - 2\sqrt{x}\right)^4$ 4) $y = log_2(2x - 5)$ 5) $y = e^{-x^3}$

Вариант 4

1) $y = tg(x^3 - 1)$ 2) $y = 5^{x^2-3x+5}$ 3) $y = \sqrt[3]{(7 - 2x)^2}$ 4) $y = \frac{1}{\ln 3x}$ 5) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

Вариант 5

1) $y = ctg(2 - x^2)$ 2) $y = \ln(\cos(5x))$ 3) $y = 2^{\frac{1}{x}}$ 4) $y = \cos(\cos x)$ 5) $y = \sqrt{3x - 4}$

Практическая работа № 6

Вычисление неопределённых интегралов

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл, применяя таблицу и свойства интегралов, находить неопределенный интеграл с помощью замены переменных.

Знания:

1. Понятие неопределённого интеграла, его основных свойств.

Умения:

1. Вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования.

2. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменной

Содержание работы:

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctgx + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int tgxdx = \ln\lvert\cos x\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin xdx = -\cos xdx$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos xdx = \sin xdx$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	

Непосредственное интегрирование – это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов. Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

1) деление числителя на знаменатель почленно;
2) применение формул сокращенного умножения;
3) применение тригонометрических тождеств.

Пример 1. Найти интеграл $\int \left(3x^2 + 2x - 5\right) dx$

Решение.

$$\int \left(3x^2 + 2x - 5\right)dx = \int 3x^2 dx + \int 2xdx - \int 5dx = x^3 + x^2 - 5x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{7x^2 + x - 1}{x^3} dx$

Решение. Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель.

$$\int \frac{7x^2 + x - 1}{x^3} dx = 7\int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx = 7\ln\lvert x\rvert - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \left(1 + e^x\right)^3 dx$

Решение. Возводим в куб и интегрируем каждое слагаемое.

$$\int \left(1 + e^x\right)^3 dx = \int \left(1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}\right)dx = \int dx + 3\int e^x dx + 3\int e^{2x} dx + \int e^{3x} dx =$$

$$= x + 3e^x + \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{2x-3}{x^2-4}dx$

Решение. Разлагаем подынтегральную дробь на две слагаемых дроби, деля числитель почленно на знаменатель.

$$\int \frac{2x-3}{x^2-4}dx = \int \frac{2x}{x^2-4}dx - 3\int \frac{dx}{x^2-4} = \ln\left|x^2-4\right| - \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

*Пример 5.*Найти интеграл $\int \frac{x^2}{x^2+5}dx$

Решение. Выделим в неправильной дроби целую часть и правильную дробь.

$$\int \frac{x^2}{x^2+5}dx = \int \frac{(x^2+5)-5}{x^2+5}dx = \int\left(1 - \frac{5}{x^2+5}\right)dx = \int dx - 5\int \frac{dx}{x^2+5} =$$

$$= x - \sqrt{5}arctg\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

*Пример 6.*Вычислить $\int(3x-4)^4dx$

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной$t = 3x - 4$

$$\int (3x-4)^4 dx = \left| \begin{array}{c} t = 3x-4 \\ dt = (3x-4)'dx = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int t^4 \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5} + C$$

$$= \frac{t^5}{15} + C =$$

$$= \frac{(3x-4)^5}{15} + C$$

Пример 7. Вычислить$\int \frac{x^2}{x^3+8}dx$

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной$t = x^3 + 8$

$$\int \frac{x^2}{x^3+8}dx = \left| \begin{matrix} t = x^3+8 \\ dt = (x^3+8)'dx = 3x^2dx \\ x^2dx = \frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\cdot ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{3}\cdot ln|x^3+8| + C$$

Пример 8. Вычислить $\int \frac{\cos x}{sin^2x+4}dx$

Данный интеграл будет приведён к табличному, если сделать замену переменной$t = \sin x$

$$\int \frac{\cos x}{sin^2x+4}dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = (\sin x)'dx = \cos x\, dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}arctg\ \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}arctg\ \frac{\sin x}{2} + C$$

Задания для практической работы:

Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*
$\int\left(2\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{2x} + 5\right)dx$	$\int(x-1)(x+2)dx$	$\int\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right)dx$
$\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$	$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$	$\int \frac{x^2-2x+1}{x^3}dx$
$\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$	$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$	$\int tg^2 x dx$
$\int \frac{dx}{(5-3x)^5}$	$\int \frac{dx}{11-4x}$	$\int \sqrt{8x-9}dx$
$\int x\sqrt{x^2-7}dx$	$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$	$\int \frac{xdx}{x^2+6}$
$\int \frac{e^xdx}{e^x+4}$	$\int \sin x\, cos^2xdx$	$\int \frac{e^xdx}{(e^x-5)^3}$

Практическая работа № 7

Вычисление определённых интегралов. Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур

Цель работы:

1. Научиться вычислять определённые интегралы.
2. Познакомиться с понятием криволинейной трапеции
3. На конкретных примерах научиться находить площадь криволинейной трапеции

Знания:

1. Понятие определённого интеграла.

2. Свойства определённого интеграла.
3. Основные методы вычисления определённых интегралов.
4. Понятие криволинейной трапеции
5. Методы вычисления площади криволинейной трапеции

Умения:

1. Вычисление определённых интегралов.
2. Вычисление площади криволинейной трапеции

Содержание работы:

Для вычисления определённого интеграла от функции *f(x)*в том случае, когда можно найти соответствующий неопределённый интеграл *F(x)*, служит формула Ньютона-Лейбница: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$.

Пример: $\int_1^2 (2x-1)dx = \int_1^2 2xdx - \int_1^2 dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 = 2^2 - 1^2 - (2-1) = 2$

Интегрирование по частям в определённом интеграле:

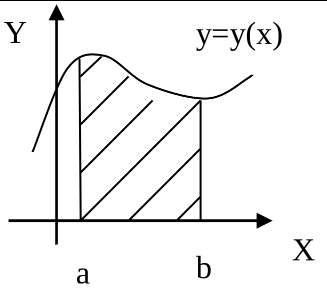
$$\boldsymbol{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$$

Пример: $\int_0^{ln2} xe^x dx = \left|\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix}\right| = xe^x\Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{ln2} e^x dx = \ln 2\cdot e^{ln2} - 0 - e^x\Big|_0^{ln2} = 2ln2 - e^{ln2} + 1 = 2ln2 - 2 + 1 = 2ln2 - 1$

Замена переменной в определённом интеграле: $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$

Пример: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{sin^2 x+1} = \left|\begin{matrix} \sin x = t \\ dt = (\sin x)'dx = \cos x dx \\ \text{если x=0, то t=sin 0=0} \\ \text{если x=}\frac{\pi}{2}\text{, то t=sin}\frac{\pi}{2}\text{=1} \end{matrix}\right| = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = arctgt\Big|_0^1 = arctg\,1 - arctg\,0 == \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:

 **Рис.1**	сверху - графиком непрерывной функции *y=y(x)* снизу – осью OX (*y=0*) слева – прямой *x=a* справа – прямой*x=b*

Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S=\int_a^b y(x)dx \qquad (1)$$

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-2x+2$, x=-1, x=2 и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

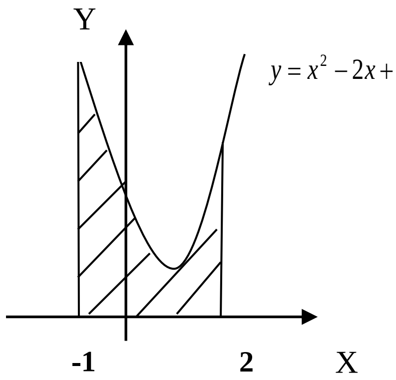


Рис. 2

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2}-\left.x^2\right|_{-1}^{2}+\left.2x\right|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)-\left(2^2-(-1)^2\right)+\left(2\cdot 2-2\cdot(-1)\right)=$$

$$=3-3+6=6.$$

Ответ: 6 кв.ед.

Пусть y=f(x) – непрерывная функция при $x\in[a, b]$, график которой расположен ниже оси OX (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

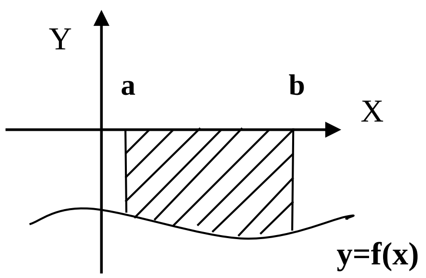


Рис. 3

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (2)$$

Пример 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2-5x+6$ и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

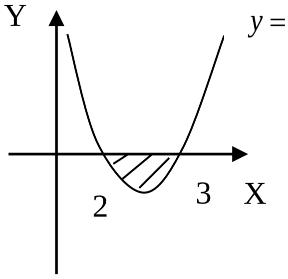


Рис. 4

$$S=\left|\int_2^3 (x^2-5x+6)dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 - \frac{5x^2}{2}\Bigg|_2^3 + 6x\Big|_2^3\right| =$$

$$=\left|\left(\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{5\cdot 3^2}{2}-\frac{5\cdot 2^2}{2}\right)+(6\cdot 3-6\cdot 2)\right| =$$

$$=\left|\frac{19}{3}-\frac{25}{2}+6\right| = \left|\frac{38-75+36}{6}\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

Ответ: 1/6 кв.ед.

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2+1$ и $y=-x+3$.

Решение: данная фигура (рис. 5)представляет собой разность криволинейных трапеций

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: x_1=-2 и x_2=1.

$S=\int_{-2}^{1}(-x+3)dx-\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx$. Можно записать под один интеграл:

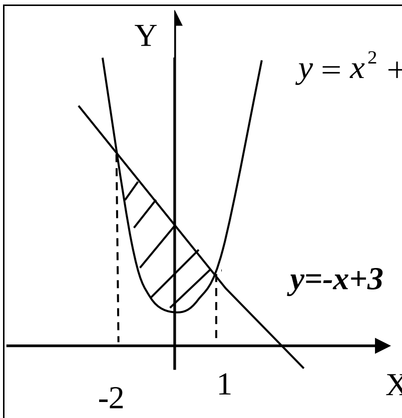


Рис. 5

$$S=\int_{-2}^{1}\left(-x+3-(x^2+1)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=$$

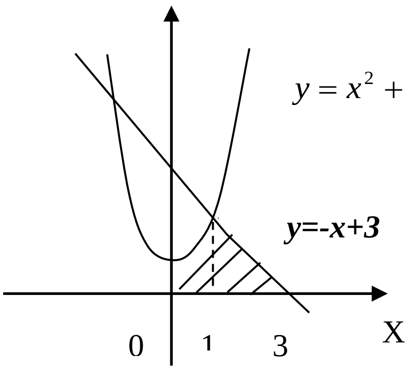
$$=2x\Big|_{-2}^{1}-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{1}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1}=\left(2\cdot 1-2\cdot(-2)\right)-\left(\frac{1^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}\right)=6-\left(-\frac{3}{2}\right)-3=4\frac{1}{2}$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

Пример 4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2+1$ и $y=-x+3$, и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций S=S_1+S_2, где $S_1=\int_0^1(x^2+1)dx$ и $S_2=\int_1^3(-x+3)dx$. Получим формулу:

 Рис. 6	$S = \int\limits_0^1 (x^2+1)dx + \int\limits_1^3 (-x+3)dx = \frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1 + x\Big\vert_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big\vert_1^3 +$ $+ 3x\Big\vert_1^3 =$ $= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + (1-0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^3}{2}\right) + (3\cdot 3 - 3\cdot 1) =$ $= \frac{1}{3} + 1 - 4 + 6 = 3\frac{1}{3}$ Ответ: $3\frac{1}{3}$ кв.ед.

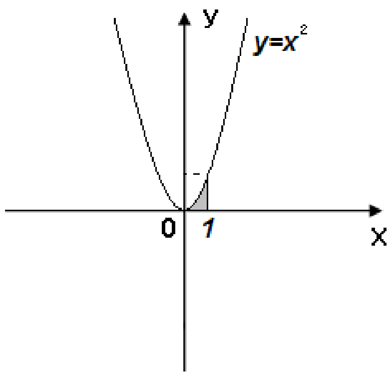
Задания для практической работы:

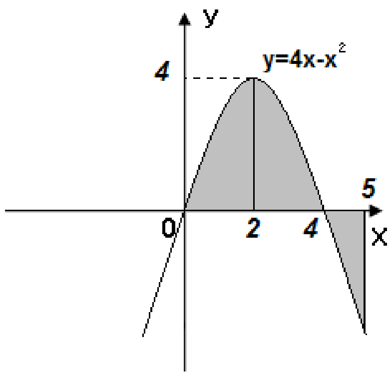
Задание 1 Вычислить определённые интегралы:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$	$\int\limits_2^3 (2x-1)(3x+5)dx$	$\int\limits_0^8 \sqrt[3]{x}(x+1)dx$
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \sin xdx$	$\int\limits_0^1 x \cdot 2^x dx$	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 5x \cos xdx$
$\int\limits_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^3+1)}}$	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 xdx$	$\int\limits_0^1 x(x^2-3)^5\, dx$

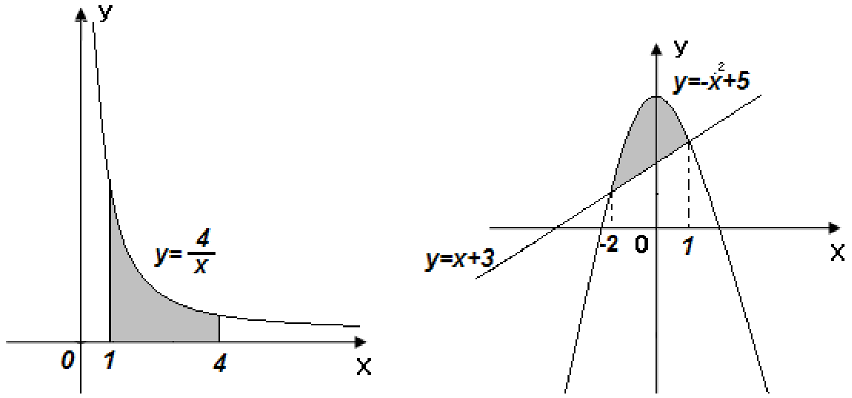
Задание 2 Вычислить площади фигур

Вариант 1

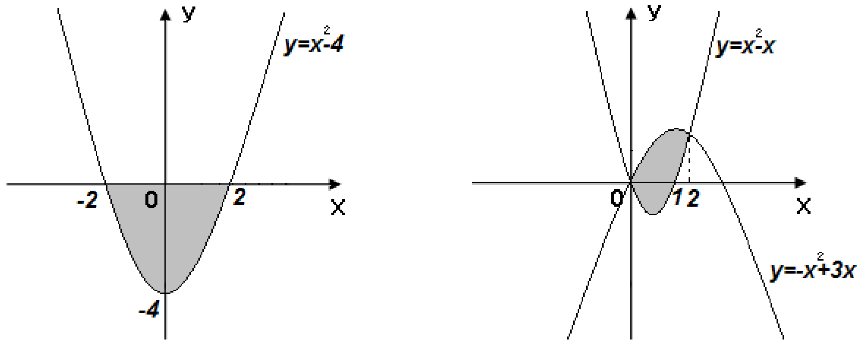




Вариант 2



Вариант 3



Практическая работа № 8

Решение дифференциальных уравнений

Цель работы:

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения

Знания:

1. Понятие дифференциального уравнения.

2. Виды дифференциальных уравнений первого и второго порядков и методы их решения.

Умения:

1. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, линейных и однородных.

2. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Содержание работы:

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y) \text{ или } X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

*Пример1.*Найти решение дифференциального уравнения$\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии $y(2) = 1$

Подставим $y' = \frac{dy}{dx}$ в уравнение, тогда$\frac{ydx}{dy} = \ln y \Rightarrow dx = \frac{\ln y\, dy}{y} \Rightarrow \int dx = \int \frac{\ln y\, dy}{y}$

$\Rightarrow\left|\begin{matrix} \ln y = t \\ d(\ln y) = (\ln y)'dy = dt \\ \frac{dy}{y} = dt \end{matrix}\right| \Rightarrow x = \int tdt \Rightarrow x = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow$–общее решение $x = \frac{ln^2 y}{2} + C$

Решим задачу Коши: при $y(2) = 1$: $2 = \frac{ln^2 1}{2} + C \Rightarrow 2 = C$, отсюда *частное решение:* $x = \frac{ln^2 y}{2} + 2$

Пример 2. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1) \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 1} = xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int xdx \Rightarrow arctg\, y = \frac{x^2}{2} + C$$

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть
f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т.е. $f(tx; ty) = f(x; y)$

Пример 3. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию $u = \frac{y}{x};\quad y = ux;\quad y' = u'x + u$.

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$u'x + u = u(\ln u + 1);\quad u'x + u = u\ln u + u;\quad u'x = u\ln u;$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x};\quad \int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x};$

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C;\quad \ln u = Cx;\quad u = e^{Cx};$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение: $y = xe^{Cx}$.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)*– однородные функции одинакового измерения.

Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть

Q(x) неравна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию *y* заменить произведением двух вспомогательных функций *u=u(x)* и *v=v(x)*, т.е. положить *y=uv*, тогда $y' = u'v + uv'$.

Пример 4 Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка $y' - \frac{y}{x} = 3x$

Будем искать решение в виде $y = u \cdot v \quad y' = u'v + uv'$.

Тогда уравнение примет вид: $u'v + uv' - \frac{uv}{x} = 3x$. Сгруппируем второе и третье слагаемые и вынесем u за скобки: $u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = 3x$. Подберём функцию v так, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль, т.е. $v' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln|v| = ln|x| \Rightarrow \boldsymbol{v = x}$

Подставляя это частное решение в исходное уравнение получим:

$$u'v = 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} x = 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow du = 3dx \Rightarrow \int du = \int 3dx \Rightarrow \boldsymbol{u = 3x + C}$$

Итак, общее решение исходного уравнения: $\boldsymbol{y = uv = (3x + C)x}$

Однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение: $ay'' + by' + cy = 0$. Для отыскания общего решения этого уравнения составляют характеристическое уравнение: $ak^2 + bk + c = 0$, которое получается из исходного уравнения заменой производных искомой функции соответствующими степенями *k*, причем сама функция заменяется единицей.

Тогда общее решение уравнение строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения:

<table>
<tr><td>D>0
корни действительные и различные
$k_1 \neq k_2$</td><td>D=0
корни действительные и равные
$k_1 = k_2 = k$</td><td>D<0
корни комплексные
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Общее решение дифференциального уравнения записывается в виде:</td></tr>
</table>

$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$	$y_0 = (C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x) e^{\alpha x}$

Пример 5. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$; $k_1 = k_2 = 2$.

Общее решение: $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$.

Пример 6 Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$; $D = -16$; $k_1 = -1 + 2i$;
$k_2 = -1 - 2i$.

Общее решение: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Пример 7. Решить уравнение $y'' - y' - 12 = 0$

Характеристическое уравнение: $k^2 - k - 12 = 0$; $k_1 = 4$ $k_2 = -3$.

Общее решение: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x}$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция:		
$x^2 y' - 2xy = 3$ $y = 3x^2 - \frac{1}{x}$	$y' - y \cdot ctgx = ctgx$ $y = \sin x - 1$	$xy' + 2y = e^{x^2}$ $y = 3 - e^{-x^2}$
2. Решите уравнение с разделяющими переменными		
$y' = 1 + x$	$(1 + x^2)y' - 2xy = 0$	$ydy - (1 + 2x)dx = 0$
3. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию		
$(1 + x^3)y' = 3x^2 y$ y(0)=2	$2\sqrt{y}dx - dy = 0$ y(0)=1	$y' + y\sin 2x = 0$ $y(\frac{\pi}{4}) = 1$
4. Решите однородное дифференциальное уравнение		
$xy' = 5y + x$	$y' = 2 + \frac{y}{x}$	$(x + y)dx + 2xdy = 0$
5. Решите линейное дифференциальное уравнение		
$y' - y\ ctg\ x = \frac{1}{\sin x}$	$y' + 4\frac{y}{x} + x = 0$	$y' - 7y = 8e^{2x}$
6. Решите уравнения 2го порядка		

а) $y''-7y'+12y=0$ б) $y''-4y'+5y=0$ в) $y''-8y'+16y=0.$ г) $y''+25y=0.$ д) $y''-7y'=0.$	а) $y''-3y'-10y=0$ б) $y''+2y'+3y=0$ в) $y''+4y'+4y=0.$ г) $y''+y=0.$ д) $y''-5y'=0.$	а) $y''-8y'+15y=0$ б) $y''+4y'+12y=0$ в) $y''-10y'+25y=0.$ г) $y''+4y=0.$ д) $y''-y'=0.$

Практическая работа № 9

Решение вероятностных задач

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять вероятности случайных событий.

Знания:

1. Понятие случайного события.
2. Классическое определение вероятности.

Умения:

1. Вычисление вероятности случайного события с применением комбинаторных формул.

Содержание работы:

1. Размещения

Рассмотрим простейшие понятия, связанные с выбором и расположением некоторого множества объектов.

Подсчет числа способов, которыми можно совершить эти действия, часто производится при решении вероятностных задач.

Определение. Размещением из n элементов по $k(k\leq n)$ называется любое упорядоченное подмножество из kэлементов множества, состоящего из nразличных элементов.

Пример. Следующие последовательности цифр являются размещениями по 2 элемента из 3 элементов множества {1;2;3}: 12, 13, 23, 21, 31, 32.

Заметим, что размещения отличаются порядком входящих в них элементов и их составом. Размещения 12 и 21 содержат одинаковые цифры, но порядок их расположения различен. Поэтому эти размещения считаются разными.

Число различных размещений из n элементов по k обозначается A_n^kи вычисляется по формуле:$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$, гдеn! = 1·2·...·(n- 1)·n(читается «n–факториал»).

2. Перестановки

Определение. Перестановками изnэлементов называются такие размещения изnэлементов, которые различаются только расположением элементов.

Число перестановок из n элементов P_n вычисляется по формуле: $P_n = n!$

Пример. Сколькими способами могут встать в очередь 5 человек? Количество способов равно числу перестановок из 5 элементов, т.е. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

3. Сочетания

Определение. Сочетаниями из n элементов по k называются такие размещения из n элементов по k, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число различных сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k вычисляется по формуле: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

По определению 0!=1.

Для сочетаний справедливы следующие свойства:

1. $C_n^1 = n$
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. $C_n^n = C_n^0 = 1$
4. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Пример. Имеются 5 цветков разного цвета. Для букета выбирается 3 цветка. Число различных букетов по 3 цветка из 5 равно: $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

4. События

Познание действительности в естественных науках происходит в результате испытаний (эксперимента, наблюдений, опыта).

Испытанием или опытом называется осуществление какого-нибудь определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).

Таким образом, событие рассматривается как результат испытания.

Пример. Бросание монеты – это испытание. Появление орла при бросании – событие.

Наблюдаемые нами события различаются по степени возможности их появления и по характеру их взаимосвязи.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.

Пример. Получение студентом положительной или отрицательной оценки на экзамене есть событие достоверное, если экзамен протекает согласно обычным правилам.

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в результате данного испытания.

*Пример.*Извлечение из урны белого шара, в которой находятся лишь цветные (небелые) шары, есть событие невозможное. Отметим, что при других условиях опыта появления белого шара не исключается; таким образом, это событие невозможно лишь в условиях нашего опыта.

Далее случайные события будем обозначать большими латинскими буквами A,B,C... Достоверное событие обозначим буквой Ω, невозможное – Ø.

Два или несколько событий называются*равновозможными*в данном испытании, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным или менее возможным, чем другие.

*Пример.*При одном бросании игральной кости появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков - все это события равновозможные. Предполагается, конечно, что игральная кость изготовлена из однородного материала и имеет правильную форму.

Два события называются*несовместными*в данном испытании, если появление одного из них исключает появление другого, и*совместными*в противном случае.

*Пример.*В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Беремна удачу одну деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. Эти события несовместные.

Несколько событий образуют*полную группу событий*в данном испытании, если в результате этого испытания обязательно наступит хотя бы одно из них.

*Пример.*События из примера образуют полную группу равновозможных и попарно несовместных событий.

Два несовместных события, образующих полную группу событий в данном испытании, называются противоположными событиями.

Если одно из них обозначено черезA, то другое принято обозначать через$\bar{A}$(читается «неA»).

*Пример.*Попадание и промах при одном выстреле по цели - события противоположные.

5. Классическое определение вероятности

Вероятность события– численная мера возможности его наступления.

СобытиеAназывается*благоприятствующим*событиюB, если всякий раз, когда наступает событиеA, наступает и событиеB.

СобытияA_1,A_2, ...,A_nобразуют*схему случаев*, если они:

1) равновозможны;

2) попарно несовместны;

3) образуют полную группу.

В схеме случаев (и только в этой схеме) имеет место классическое определение вероятности$P(A)$ событияA. Здесь случаем называют каждое из событий, принадлежащих выделенной полной группе равновозможных и попарно несовместных событий.

Еслиn– число всех случаев в схеме, аm– число случаев, благоприятствующих событиюA, то*вероятность события*Aопределяется равенством:$P(A) = \frac{m}{n}$.

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице.

2. Вероятность невозможного события равна нулю.

3. Вероятность случайного события есть положительное число,заключенное между нулем и единицей$0 \leq P(A) \leq 1$.

6. Операции над событиями. Теорема сложения вероятностей

Суммой, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий (в одном и том же испытании).

Пример. Бросаются две игральные кости. Пусть событиеAсостоит в выпадении 4 очков на 1 кости, а событиеB– в выпадении 5 очков на другой кости. СобытияAиBсовместны. Поэтому событие$A+B$состоит в выпадении 4 очков на первой кости, или 5 очков на второй кости, или 4 очков на первой кости и 5 очков на второй одновременно.

Пример.СобытиеA– выигрыш по 1 займу, событиеB– выигрыш по 2 займу. Тогда событие$A+B$– выигрыш хотя бы по одному займу (возможно по двум сразу).

Произведениемили пересечением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий (в одном и том же испытании).

Пример.СобытияAиBсостоят в успешном прохождении I и II туров соответственно при поступлении в институт. Тогда событие$A \times B$состоит в успешном прохождении обоих туров.

Теорема. Если событияA_i(i= 1, 2, …,n) попарно несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Если событияA_1иA_2 совместны, то вероятность суммы двух совместных событий равна:$P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \times A_2)$.

8. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Условной вероятностью$P(B/A)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие А уже наступило.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого, т.е.$P(A) = P(A/B)$

Если события A и B независимы, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Задания для самостоятельной работы:

1. В коробке находятся $m+2$ синих, $n+3$ красных и $2n+1$ зеленых карандашей. Одновременно вынимают $m+3n+2$ карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет $m+1$ синих и $n+1$ красных.

2. В первой урне находятся $m+2$ шаров белого и n шаров черного цвета, во второй — $m+n$ белого и m синего, в третьей — $n+3$ белого и $m+1$ красного цвета. Из первой и второй урны наудачу извлекают по одному шару и кладут в третью. После этого из третьей вынимают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень при одном выстреле равна $\frac{m+n}{m+n+2}$. Производится $n+4$ выстрела. Найти вероятность того, что он промахнется не более двух раз.

4. Каждый избиратель независимо от остальных избирателей, отдаёт свой голос за кандидата А с вероятностью 0,1(m+n) и за кандидата В – с вероятностью 1-0,1(m+n). Оценить вероятность того, что в результате голосования на избирательном участке (5000 избирателей) один из кандидатов опередит другого:

а) ровно на 1900 голосов; б) не менее, чем на 1900 голосов

Таблица 1 (выбор параметра m)

А	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

Таблица 2 (выбор параметра n)

В	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	3	5	4	2	1	5	4	1	3	2

Практическая работа № 10

Составление статистического распределения выборки, построение гистограмм

Цель работы:

Научиться строить статистический ряд выборки и гистограммы.

Знания:

1. Понятие о выборочном исследовании.
2. Понятие о представлении статистических данных.

Умения:

1. Построение статистического ряда и гистограммы.

Содержание работы:

Предмет математической статистики составляют разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данный, получаемых в результате наблюдения случайных явлений.

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных, т.е. результатов наблюдения.

В математической статистике рассматривают две основных задачи:

1) Первая задача состоит в том, чтобы указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате поставленных экспериментов

2) Состоит в разработке методов анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка параметров распределения, вид которого неизвестен; оценка зависимой случайной величины от одной или нескольких случайных величин

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого неизвестен.

Изучение тех или иных явлений методами математической статистики служат решение многих вопросов, выдвигаемых наукой и практикой правильная организация технологического процесса наибольше целесообразное планирование и прочее.

И так, основная задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Генеральная и выборочная совокупность.

Совокупность всех объектов, подчинённых данному признаку, называется **генеральной совокупностью**. Число таких объектов называется **объёмом генеральной совокупности.**

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторых качественных или количественных признаков, характеризующие эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественными признаками может служить стандартность деталей, а количественным - контролируемый размер детали.

Обычно из всей совокупности отбирают ограниченное число объектов, которое изучают такую случайно отобранную совокупность, называют **выборочной совокупностью** или **выборкой.**

Выборка, достаточно хорошо описывающая всю генеральную совокупность, называется **репрезентативной.** Для того, чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке, необходимо, чтобы

объекты выборки правильно его представляли, т. е. выборка должна быть репрезентативной (представительной).

Для получение репрезентативной выборки необходимо ,чтобы все отображённые элементы имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. В случае большого объёма генеральной совокупности используют таблицу случайных чисел. Например, чтобы выразить 20объектов из пронумерованной генеральной совокупности можно записать 20 случайных чисел.

Элементы x_1, x_2,.. x_nслучайно попавшие в выборку называются вариантами, а их кол-во n – объем выборки. Отобранные элементы располагают в порядке возрастания. Такая последовательность называется вариационным рядом.

Разность между максимальным и минимальными элементами называется **размахом выборки.**

Среди n-элементов выборки могут быть встречаться повторяющиеся.

Например x_1 – n_1 раз, x_2 – n_2 раз; x_n – n_n раз. Числа n_1, n_2, n_n называются частотами вариант.

Расположенное в порядке возрастания вариант последовательность пар чисел, составленная из вариант и их частот (x_1;n_1), (x_2;n_2) называется статистическим рядом или статистическим распределением. При этом пользуются табличной записью:

x_i	x_1	x_2	….
n_i	n_1	n_2	….

Пример: записать вариационный ряд и статистическое распределение выборки из числа учебных дней в году, пропущенных по болезни студентами. Определить размах выборки:

5,0,3,7,0,1,0,5,0,5,2,10,2,0,7,2,4,7,7,4

1) Найдем объем выборки: n=20
2) Запишем вариационный ряд:

0,0,0,0,0,2,2,2,3,4,4,5,5,5,7,7,7,7,10,10

3) Запишем статистическое распределение:

x_i	0	2	3	4	5	7	10

n_i	5	3	1	2	3	4	2

4) Определим размах выборки: Z=10-0=10

При большом объеме выборки для упрощения ее вычисления ее элементы объединяют в разряды, представляя в выборку в виде группированного статистического ряда. Для этого все содержащиеся элементы разбивают на k интервалов равной длины.

Графические представления статистической совокупности

Полигон и гистограмма.

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения. Они позволяют лучше представить характер распределения элементов выборки, а иногда и сделать предположения о законе распределения генеральной совокупности.

Основные понятия.

Ряд распределения – это ряд чисел, в котором значение изучаемого признака (варианта) расположены в определенном порядке. Либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Наряду с вариантами ряд распределений включают в частоты (величины, показывающие сколько раз каждая из вариантов встречаются в данной совокупности). Сумма частот равна объему совокупности. Таким образом, ряд распределения состоит из вариант и частот.

В зависимости от прерывности и непрерывности варьирующего признака ряды распределения удобно представлять в виде двух разновидностей: **дискретного и вариационного (интервальных)**

Дискретный ряд представляет собой ряд прерывных чисел.

Например: распределение семей по числу членов.

При непрерывной вариации распределением признака называется интервальным.

Например: распределение совхозов области по % выполнению плана.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка. Наблюдаемые значения x_i- называют вариантами, n_i- числа наблюдения частотами, $n = \sum n_i$- объем выборки, отношения частот к объему выборки называется **относительными частотами** $W_i = \frac{n_i}{n}$

Пример. Составить распределения относительных частот, если задано распределение частот выборки объема n=20

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Решение. Найдём относительные частоты.

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{20}$$
$$w_2 = \frac{10}{20}$$
$$w_3 = \frac{7}{20}$$

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,5	0,35

0,15+0,5+0,35=1 .

Сумма относительных частот равна единице.

В целях наглядности строят различные графики *полигон* и *гистограмма*.

Полигоном частот называется ломаная линия вершиной, которой являются точки $((x_1, n_1), (x_2, n_2) \dots (x_{k,} n_k)$ определяемые элементами статистического ряда. Для его построения по оси абсцисс откладывают варианты x_i, а по оси ординат соответствующая им частота n_i.

Построенные точки соединяют отрезками прямых.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура составленная из прямоугольников построенных на интервалах так что площадь каждого прямоугольника численно равна частоте варианты расположенной в середине i интервала. То есть площадь гистограммы частот равна объему выборки

*Пример***.**Построить полигон и гистограмму частот.

Дано время недельной загрузки электрических духовых шкафов 50-ти обследованных предприятий общественного питания в часах.

38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
60	52	47	46	49	49	14	57	54	59
77	47	28	48	58	32	42	58	61	30
61	35	47	72	41	45	44	56	30	40
67	65	39	48	43	60	54	42	59	50

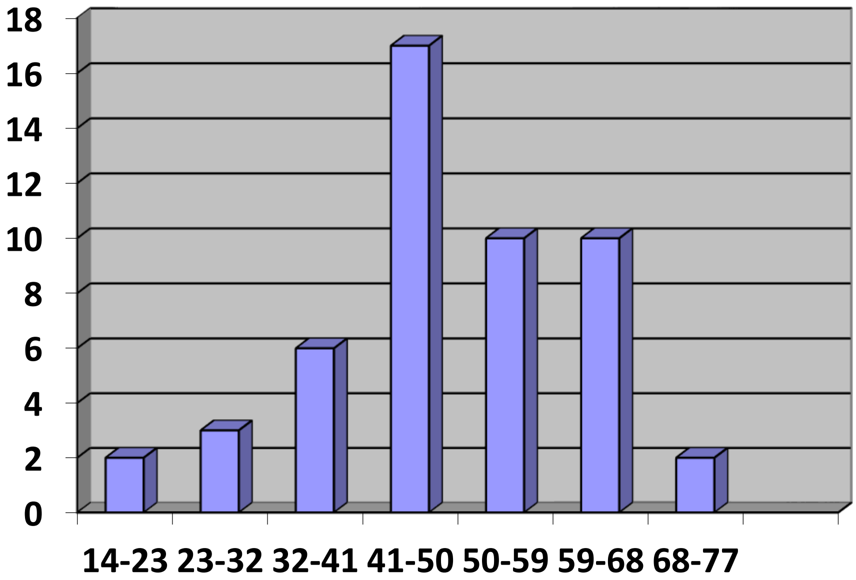
Разобьем ряд распределения на 7 интервалов, определим размах выборки.

77-14=63

Найдем длину интервала.$h = \frac{63}{7} = 9$

	Границы интервалов	Середина интервалов	x_i
1	14-23	18,5	2
2	23-32	27,5	3
3	32-41	36,5	6
4	41-50	45,5	17
5	50-59	54,5	10
6	59-68	63,5	10
7	68-77	72,5	2

Чтобы построить гистограмму найдём относительные частоты.



Задания для самостоятельной работы:

При изменении диаметра валика после шлифовки была получена следующая выборка:

Построить гистограмму частот, предварительно построив ряд статистического

20,3	18,1	20,4	20,1	15,3	22,8	18,3	13,9	16,7	17,8	13,5
15,4	21,9	16,5	16,8	19,3	21,9	14,7	19,8	20,4	21,3	11,8
17,2	15,3	19,7	14,7	17,8	12,5	14,5	18,5	19,5	17,5	18,6
19,2	16,8	20,5	20,8	16,2	10,1	18,1	20,2	17,2	19,4	19,1
23,3	13,2	14,3	19,5	15,7	21,1	18,4	23,8	19,6	17,8	19,3

распределения, состоящий из семи интервалов.

Список литературы

Основные источники:

1.Григорьев, В. П. Математика : учебник / В. П. Григорьев, Т. Н. Сабурова. - 2-е изд., стер. - Москва. : Академия, 2018. - 368 с.

Дополнительные источники:

2.Пехлецкий, И. Д. Математика : учебник / И. Д. Пехлецкий. - 13-е изд., стер. - Москва. : Академия, 2018. - 320 с. - (Профессиональное образование).

3.Баранчиков Е. В. География : учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования. – 7-е изд., стер. – Москва : Издательский центр «Академия», 2019. – 320 с., 16 с. цв. ил. : ил. // Академия. Издательский центр. – URL : https://www.academia-moscow.ru/reader/?id=408725 (дата обращения 24.12.20210)

4.Шульгина, О. В. География: учебник /О. В. Шульгина, А. Б. Козаренко, Д. Н. Самусенко. - Москва : ИНФРА-М, 2020. - 313 с. - (Среднее профессиональное образование). - URL: https:/ znanium.com (дата обращения 01. 04. 2022). - Режим доступа: по подписке.

Интернет - ресурсы

- Электронно-библиотечная система ZNANIUM.COM Режим доступа: http://www.znanium.com/

- Электронно-библиотечная система "ЮРАЙТ" Режим доступа http://www. biblio-online. ru
- Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru/
- Информационные, тренировочные и контрольные материалы. Режим доступа: http:// www. fcior. edu. ru.
- Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. Режим доступа: http:// www. school-collection. edu. ru.